УДК 519.173.5

Федянин Д.Н. [1],

[1] Московский физико-технический институт

Сумма всех попарных расстояний между вершинами в графах: плоская прямоугольная решетка, однородное дерево

Сейчас можно встретить много различных популярных статей по социальным сетям - с появлением www.odnoklassniki.ru и www.vkontakte.ru это очень модное направление. Ценность таких сетей не в последнюю очередь, а возможно и в первую - это взаимодействие между ее участниками.

В материале для данного доклада подсчитана сумма всех попарных расстояний (взаимодействий) между вершинами (участниками) в графе (сети). В качестве простейшего образца взята плоская прямоугольная решетка. Расстоянием между двумя вершинами считаем количество ребер в кратчайшем пути между ними. Получена элегантная формула для квадрата и нетривиальная асимптотика. Выписаны также соотношения для однородного дерева.

Экономико-практические соображения совершенно не вовлекались, оставляя это для следующих публикаций. Использовалась чистая математика и результат имеет теоретическую ценность. Более подробное описание некоторых практических применений теории графов к управлению организационными системами, а также определение однородных деревьев можно найти, например, в [1], [2].

Теорема 1. Сумма всех попарных расстояний в плоской прямоугольной решетке (рис. 1)

$$p = \frac{1}{6}xy((x+1)(y+1)(x+y-2)+(x-1)(y-1)(x+y+2)),$$

где x и y - количество вершин вдоль каждой из сторон.

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов. Первый шаг — рассмотрим произвольную плоскую прямоугольную подрешетку, где размер одной из сторон u вершин, а другой — v и посчитаем сумму всех расстояний от вершины, расположенной в углу до всех остальных вершин прямоугольника

$$h(u,v) = \frac{1}{2}uv(u+v-2).$$

Просуммируем последовательно по всем подрешеткам от *u=0, v=0,* до подрешетки *u=x, v=y.* т.е. найдем

$$q = \sum_{u=0}^{x}\sum_{v=0}^{y} h(u,v) = \frac{1}{12}xy(x+1)(y+1)(x+y-2).$$

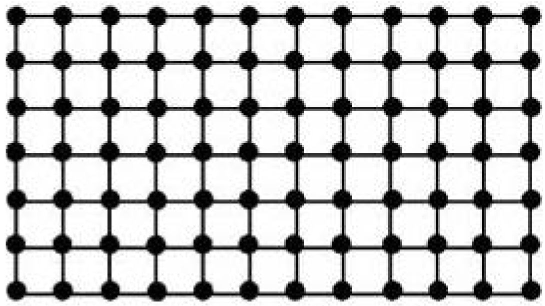

Рис. 1. Плоская прямоугольная решетка

Затем выпишем выражение для суммы расстояний от вершины внутри прямоугольника до всех остальных вершин, используя уже полученное выражение для вершины, расположенной в углу решетки. Потребуется учесть, что возникшие четыре прямоугольника (левый нижний, верхний правый, верхний левый и нижний правый.) будут пересекаться по внутренним границам и уменьшить вычисляемую сумму на сумму расстояний до вершин вдоль этих границ. Следующим шагом будет суммирование по всем таким вершинам внутри прямоугольника

$$p = 4q - y\sum_{0}^{x-1} j(j+1) - x\sum_{i=0}^{y-1} i(i+1).$$

Получим следующее выражение

$$p = \frac{1}{6}xy((x+1)(y+1)(x+y-2) + (x-1)(y-1)(x+y+2)).$$

Это и есть основной результат. Используя полученное выражение и выполнив замену , $x^2 = n$ выпишем результат для квадрата,

$$p = \frac{2}{3}n(n-1)\sqrt{n},$$

здесь n — количество вершин в рассматриваемом графе, p — сумма всех попарных расстояний. Понятно, что при стремлении количества вершин к бесконечности p стремится к бесконечности как $n^{5/2}$.

Итак, получив результат для прямоугольной решетки, попробуем получить для сравнения аналогичный результат для однородного дерева (рис. 2). Здесь мы пойдем тем же путем: посчитаем сумму расстояний от вершины до всех расположенных в этой же ветке ниже и т.д.

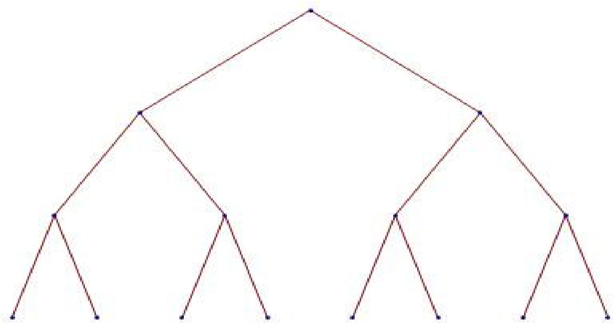

Рис. 2. Однородное дерево с равными степенями

Теорема 2. Сумма всех попарных расстояний в однородном дереве высоты k со одинаковыми степенями вершин на одинаковых уровнях

$$p(k) = \sum_{h=1}^{k} \prod_{v=0}^{h-1} r_v \sum_{w=1}^{k-h} \Big(\sum_{j=1}^{k-h+w+1} j \prod_{i=0}^{j-1} r_{h-w-1-i} + 2(r_{h-w} - 1) + w \Big) + \sum_{j=1}^{k-h} j \prod_{i=0}^{j-1} r_{h-i} \Big).$$

Доказательство. Для произвольной вершины посчитаем сумму расстояний до всех расположенных в этой же ветке ниже

$$H(h) = \sum_{j=1}^{k-h} j \prod_{i=0}^{j-1} r_{h-i},$$

где h - высота рассматриваемой вершины в дереве, k - высота дерева, r_j -норма управляемости на высоте *j,* и включим в эту сумму расстояния до вершин расположенных выше, а также в других ветках

$$f(h) = \sum_{j=1}^{k-h} (H(h-j-1) + 2(r_{h-j} - 1) + j) + H(h)$$

и просуммируем по всем вершинам дерева

$$p(h) = \sum_{h=1}^{k} \prod_{i=0}^{h-1} r_i f(h).$$

Тогда окончательно получаем для суммы всех попарных расстояний в однородном дереве

$$p(h) = \sum_{h=1}^{k} \prod_{v=0}^{h-1} r_v \sum_{w=1}^{k-h} \Big(\sum_{j=1}^{k-h+w+1} j \prod_{i=0}^{j-1} r_{h-w-1-i} + 2(r_{h-w} - 1) + w \Big) + \sum_{j=1}^{k-h} j \prod_{i=0}^{j-1} r_{h-i} \Big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воронин А.А., Губко М. А., Мишин С.П., Новиков Д.А.* Математические модели организаций: Учебное пособие. – М.: ЛЕНАНД, 2008.
2. *Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А.* Теория графов в управлении организационными системами. – М.: Синтег, 2001.