УДК 512.542.74

Калинчук С.А.

Московский физико-технический институт

Об упорядоченной системе образующих симметрической группы

Пусть S_X есть симметрическая группа степени $|X|$ на некотором множестве X натуральных чисел. Рассмотрим некоторое упорядоченное множество различных транспозиций $T_1, T_2, \ldots, T_r$, принадлежащих группе S_X, где $r \le C_{|X|}^2$. Обозначим такую систему транспозиций символом Ψ_X, записав её в виде $\Psi_X = T_1\ T_2\ \ldots\ T_r$, а число r — символом $|\Psi_X|$.

Определение. Назовем систему Ψ_X *упорядоченной системой образующих* (УСО) симметрической группы S_X, если любую подстановку $P_X \in S_X$ можно записать в виде

$$P_X = T_1^{\gamma_1} \cdot T_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot T_r^{\gamma_r},$$

где $\gamma_j \in \{0,1\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Отметим, что вектор $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r)$, представляющий подстановку P_X, может оказаться отнюдь не единственным.

Если некоторая система Ψ_X является УСО группы S_X, то необходимо выполнение неравенства $2^{|\Psi_X|} \ge |X|!$, где $2^{|\Psi_X|}$ — максимально возможное число подстановок, представимых через эту систему, а $|X|!$ — число подстановок группы S_X.

Задача. Найти УСО Ψ_X симметрической группы S_X с возможно меньшим числом $|\Psi_X|$, и указать алгоритм её построения при любой $|X|$ степени группы. Подобная задача возникла в связи с разработкой машины синтеза контактных схем [1].

Результат 1. Если система $\Psi_{X_{n-2}}$ является УСО симметрической группы $S_{X_{n-2}}$ на множестве $X_{n-2} = \{3, \ldots, n\}$, то при $n = 2k$, $k \ge 2$, система

$$\Psi_{X_n} = (1,3)(1,4)\ldots(1,2k-1)(1,2k)\ (2,3)(2,5)\ldots(2,2k-3)(2,2k-1)\ (1,2)\ \Psi_{X_{n-2}}$$

является УСО группы S_{X_n} на множестве $X_n = \{1, \ldots, n\}$. Причем, рекуррентное построение Ψ_{X_n} приводит к тому, что $\left|\Psi_{X_n}\right| = \frac{3n^2 - 2n}{8}$.

Результат 2. Если система $\Psi_{X_{n-3}}$ является УСО симметрической группы $S_{X_{n-3}}$ на множестве $X_{n-3} = \{4, \dots, n\}$, то при $n = 2k - 1$, $k \geq 3$, система

$$\Psi_{X_n} = (1,4)(1,5)\dots(1,2k-2)(1,2k-1)\ (2,3)(2,5)\dots(2,2k-3)(2,2k-1)$$
$$(3,4)(3,6)\dots(3,2k-4)(3,2k-2)\ (1,2)(1,3)\ \Psi_{X_{n-3}}$$

является УСО группы S_{X_n} на множестве $X_n = \{1, \dots, n\}$. Причем, рекуррентное построение Ψ_{X_n} приводит к тому, что $\left|\Psi_{X_n}\right| = \frac{3n^2 - 4n + 9}{8}$.

Результат 3. При $n = 2^k$, $k \geq 3$, найден такой алгоритм [2] построения УСО Ψ_{X_n} группы S_{X_n} на множестве $X_n = \{1, \dots, n\}$, что $\left|\Psi_{X_n}\right| = \frac{n}{4} \cdot (\log_2^2 n + \log_2 n - 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лазарев В.Г., Сагалович Ю.Л.* Коммутатор машины синтеза контактных схем // Проблемы передачи информации. — 1959. — вып. 4 — С. 124-132.
2. *Kalinchuk S.A., Sagalovich Yu.L.* The least known length of ordered basis of symmetric group // Eleventh International Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory. — 2008. — P. 134-139.