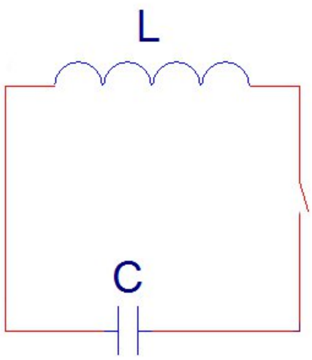
Задача A1

$$
\begin{array}{rcl|}
U_1 & = & 1\ \mathbf{В} \\
U_2 & = & 0.5\ \mathbf{В} \\
L & = & 100\ \mathbf{мкГн} \\
C & = & 1000\ \mathbf{пФ} \\
\hline
I & - & ?
\end{array}
$$



До замыкания ключа вся энергия была запасена в конденсаторе. Так как конденсатор и катушка идеальные, то после замыкания ключа по закону сохранения энергии:

$$\frac{CU_1^2}{2} = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU_2^2}{2}$$

$$I = \sqrt{\frac{C(U_1^2 - U_2^2)}{L}} = \sqrt{\frac{100 \cdot 10^{-12}}{100 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{3}{4}} = 8.66 \cdot 10^{-4} A$$

В этой задаче некоторые пытались писать уравнение колебаний:

$$U_c = U_0 sin(wt) \tag{1}$$

$$Q = CU_0 sin(wt) = Q_0 sin(wt)$$

$$I = \dot{Q} \Rightarrow I = CU_0 w cos(wt)$$

С учетом $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$I = \frac{CU_0}{\sqrt{LC}} cos(wt) = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}} cos(wt)$$

Найдем t из (1)

$$0.5 = 1 * sin(wt) \Rightarrow sin(wt) = \frac{1}{2} \Rightarrow wt = \frac{\pi}{6} \Rightarrow cos(wt) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

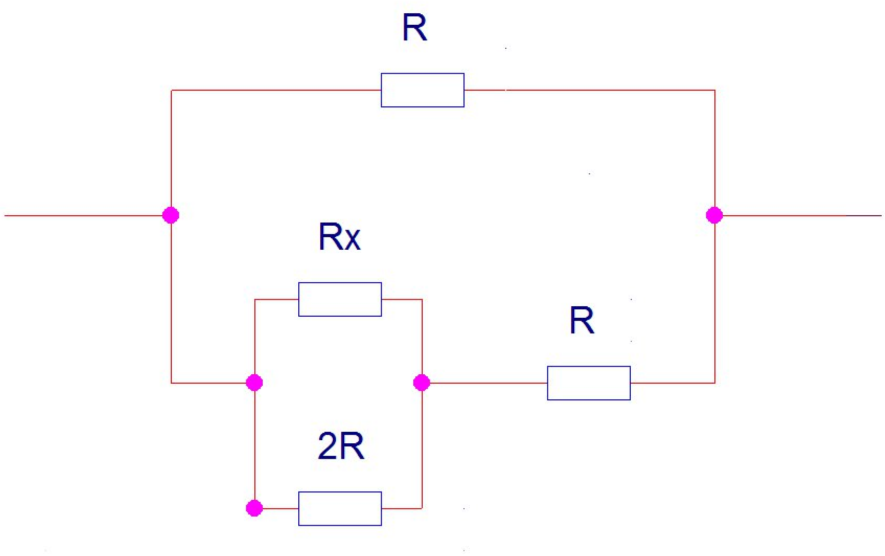
Тогда

$$I = \sqrt{C} L U_0 cos(wt) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10^{-6} = 8.66 \cdot 10^{-4} A$$

Однако, этот способ сложнее. К тому же уравнение колебаний и формула Томсона выводятся из закона сохранения энергии.

Задача А2

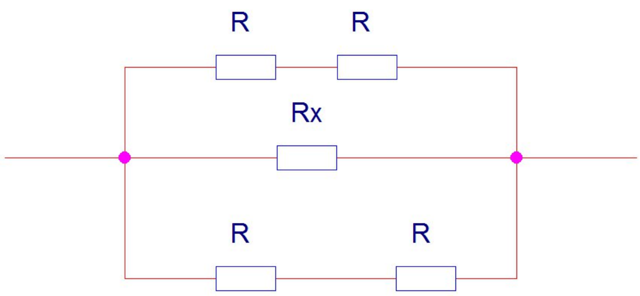
Для рассчета сопротивления между точками A и B нарисуем эквивалентную схему:



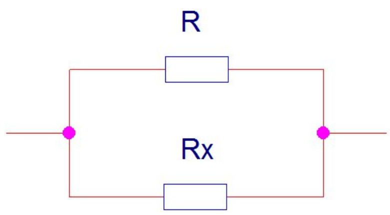
Используем формулы расчета сопротивления для последовательно и параллельно соединенных резисторов :

$$R_{AB} = \frac{R(R + \frac{2RR_x}{2R+R_x})}{2R + \frac{2RR_x}{2R+R_x}} = \frac{2R^2 + 3RR_X}{4R + 4R_x}$$

Для сопротивления между A и C эквивалентная схема:



$\Rightarrow$



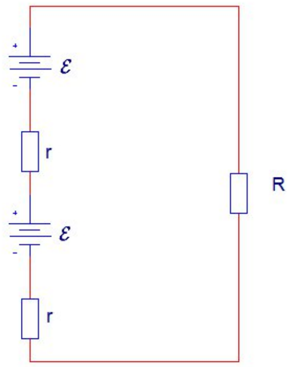
Используем формулу расчета сопротивления для параллельно соединенных резисторов :

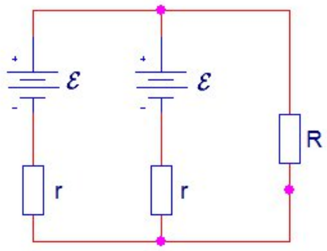
$$R_{AC} = \frac{R_x R}{R_x + R}$$

Приравняв R_{AB} и R_{AC}, найдем $R_x = 2R$

Задача А3

U_1	$=$	4 **В**
U_2	$=$	3.2 **В**
R	$=$	50**Ом**
E	$-$	?
r	$-$	?





Заменим неидеальный источник ЭДС идеальным с ЭДС $\mathcal{E}$ и последовательно включенным сопротивлением r.

При последовательном включении

$$I = \frac{2\mathcal{E}}{2r + R}$$

$$U_1 = IR$$

$$U_1 = \frac{2\mathcal{E}R}{2r + R} \tag{2}$$

При параллельном включении

$$I = I_1 + I_2$$

В силу симметрии

$$I_1 = I_2$$

Запишем 2 правило Кирхгофа для контура 1-2-3-4

$$\mathcal{E} = I_1 r + IR = \frac{I}{2} r + IR = \frac{U_2}{2R} r + U_2$$

$$U_2 = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{2R} + 1} = \frac{2\mathcal{E}R}{r + 2R} \tag{3}$$

Из (2) и (3) получаем ответ:

$$\mathcal{E} = 4 \text{ **В**} \qquad r = 25 \text{ **Ом**}$$

Задача А4

$$U = at$$

$$U = IR + U_c$$

Так как резисторы соединены последовательно, ток через них в любой момент времени одинаков. Поэтому IR величина постоянная, то есть $U - U_c = const$. Продифференцируем это соотношение по времени:

$$a - \frac{dU_c}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dU_c}{dt} = a$$

С другой стороны

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{CdU}{dt} = ac$$

В момент замыкания ключа напряжение на конденсаторе 0, так как скачком оно не меняется. А значит

$$U = IR$$

$$a\tau = aCR$$

$$\tau = CR$$

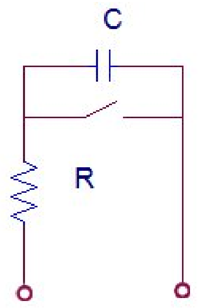
Задача A5

Пусть среднее напряжение на конденсаторе U_c. Тогда на протяжении времени dT конденсатор заряжается током $I_+ = \frac{U_0 - U_c}{R}$ и приобретает заряд $\Delta q_+ = \frac{U_0 - U_c}{R} dT$. Также на протяжении всего периода конденсатор разряжается через подключенный параллельно ему резистор током $I_- = \frac{U_c}{R}$ и теряет заряд $\Delta q_- = \frac{U_c}{R} T$. Так как установившийся на конденсаторе заряд практически постоянен, $\Delta q_- = \Delta q_+$. Откуда получаем ответ:

$$U_c = \frac{U_0 dT}{T + dT}$$

Задача А6

В приведенной схеме транзистор играет роль ключа, который замыкается, когда напряжение на конденсаторе достигает 100 В. После этого конденсатор мгновенно разряжается потому, что его выводы оказываются замкнуты накоротко, и ток разрядки устремляется к бесконечности. После этого наш "ключ"снова размыкается.



Следовательно, для оценки периода колебаний нам надо найти время зарядки конденсатора до 100 В. Схема, изображенная на рисунке 1, называется интегрирующей цепью. Формулу для изменения напряжения на конденсаторе при подаче на вход постоянного напряжения можно считать известной $U_c = U_0(1 - e^{-t/\tau})$, где $\tau = RC$ - постоянная времени цепи. Вывод этой формулы приведен в конце решения.

$$\frac{U_0 - U_C}{U_0} = e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$t = -RC\ln(\frac{U_0 - U_C}{U_0}) = -10 \cdot 10^6 \cdot 100 \cdot 10^{-12} \cdot \ln\frac{9}{10} \approx 1.0536 \cdot 10^{-4} \text{ с}$$

Другой способ решения:
Примем, что 100 **В** $\ll$ 1000 **В**. Поэтому экспоненту, по которой заряжается конденсатор на участке $0 - 100$ **В** можно с хорошей точностью приблизить линейной функцией. Тогда можно принять, что ток через конденсатор в процессе зарядки постоянен

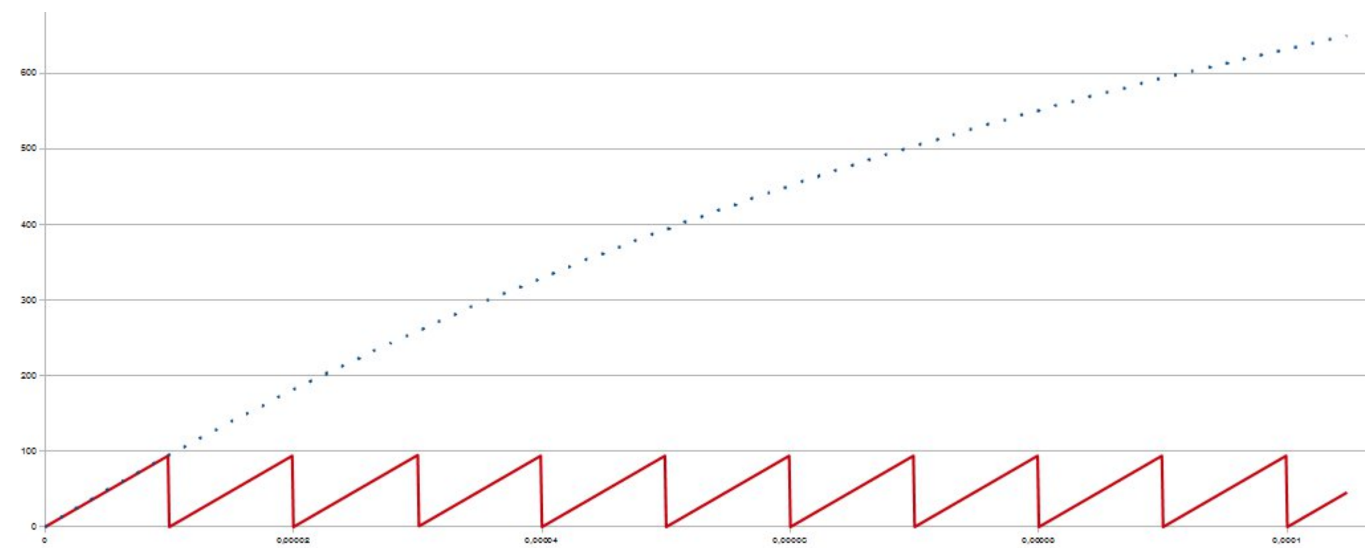
$$I_{CP} = \frac{U_{CP}}{R} = \frac{U_0 + U_0 - U_C}{2R} = \frac{2U_0 - U_C}{2R}$$

$$I_{CP} = \frac{Q}{t} = \frac{U_C \cdot C}{t}$$

$$U_C \cdot C = \frac{2U_0 - U_C}{2R}t$$

$$t = \frac{2RCU_C}{2U_0 - U_C} \approx 1.0526 \cdot 10^{-4} \text{ с}$$

График зарядки конденсатора (пунктиром показана ситуация в отсутствие транзистора):



Вывод формулы заряда на конденсаторе в интегрирующей цепочке.

$$U_0 = IR + U_C$$

$$I = \frac{CdU_C}{dt}$$

$$U_0 = \frac{RCdU_C}{dt} + U_C$$

$$U_0 - U_c = \frac{RCdU_C}{dt}$$

С учетом того, что $dU_c = -d(U_0 - U_C)$

$$\int \frac{dt}{RC} = -\int \frac{d(U_0 - U_C)}{U_0 - U_C}$$

$$\frac{t}{RC} = -\ln(U_0 - U_C) + A$$

где A - некоторая константа

$$A - \frac{t}{RC} = \ln(U_0 - U_C)$$

A найдем из начальных условий: при $t = 0$ $U_C = 0$. Тогда $A = lnU_0$

$$U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 - U_C$$

$$U_C = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$