Аналитическая геометрия

27 ноября 2015 г.

Глава 1.

Кривые и поверхности

Понятие алгебраической кривой и алгебраической поверхности Моном от двух переменных $M(x,y) =^{def} x^m y^n,\ m,n \geq 0$ Тогда многочленом от двух переменных над множеством действительных чисел будет называться линейная комбинация мономов. Аналогично вводится многочлен от трех переменных.

$$Deg\ x^m y^n = m + n$$
$$Deg\ P = max_{i=0}^{n}\, Deg\ M_i$$

Где M_i моном, из которого состоит многочлен.

Утв. Степень $P(x,y)$ не зависит от выбора ДСК.

Док-во Как известно, операция замены координат задается следующей системой:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y'a_{13}z' + a \\ y = a_{21}x' + a_{22}y'a_{23}z' + b \\ z = a_{31}x' + a_{32}y'a_{33}z' + c \end{cases}$$

При подстановке в исходный многочлен $M(x,y) = 0$ видно, что степень многочлена не увеличится, поскольку бОльшей степени неоткуда взяться. Проделав обратный переход, получим, что степень многочлена не изменилась.

Опр Алгебраической кривой (поверхностью) называется множество всех точек, которые удовлетворяют уравнению в некоторой ДСК $M(x,y) = 0$ $(M(x,y,z))$.

Порядком кривой по определению полагается равным степени многочлена, который представляет эту кривую (поверхность).

Предложение Пусть l_1 и l_2 алгебраические кривые, а f_1 и f_2 соотвествующие им уравнения. Тогда

$$l_1 \cup l_2 := f_1^2 + f_2^2$$
$$l_1 \cap l_2 := f_1 \cdot f_2$$

Теорема Алгебраическая кривая первого порядка:

- Прямая в V^2
- Плоскость в V^3

Док-во Пусть в некоторой ДСК дано

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Поскольку это уравнение первого порядка, то хотя бы один из коэффициентов не равен нулю. Без ограничения общности положим $C \neq 0$. Зададим следующую замену ДСК:

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = \frac{-A}{C}x' - \frac{B}{C}y' - \frac{D}{C} - \frac{z'}{C} \end{cases}$$

Таким образом мы сделали замену координат с матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{A}{C} & -\frac{B}{C} & -\frac{1}{c} \end{pmatrix}$$

Нужно ещё убедиться, что в столбцах стоят координаты базисных векторов, если $e_1\ e_2\ e_3$ базисные. Такой заменой координат мы добились того, что

$$z' = Ax + By + Cz + D$$

Поэтому уравнение $Ax+By+Cz+D = 0$ эквивалентно $z' = 0$. Это плоскость. Осталось показать, что каждая плоскость это поверхность первого порядка. Действитель, выберем ДСК так, чтобы $\vec{e_1}, \vec{e_2} \subset \alpha \quad \vec{e_1} \nparallel \vec{e_2}$, $\vec{e_3} = [vece_1, \vec{e_2}]$. Тогда уравнение описывающее плоскость будет задаваться так : $z = 0$ Аналогичное доказательство для плоскости.

Теорема о сечении алгебраической кривой

- Пусть n алгебраическая кривая в V^2, а l прямая, такая что $l \not\subset n$. Тогда количество точек пересечения не превосходит порядок кривой.
- Пусть σ алгебраическая поверхность в V^3, а α плоскость, тогда $\alpha \cap \sigma$ — алгебраическая кривая порядка не выше $deg\,\alpha$.

Док-во

- Выберем ДСК, в которой уравненение прямой будет $y' = 0$. Точки пересечения есть решение системы уравнений:

$$\begin{cases} y' = 0 \\ F(x', y') = 0 \end{cases}$$

Подставив первое уравнение во второе, получим многочлен от одной переменной, который либо тождественный нуль, либо имеет не более $degF$ корней. Первый случай не подходит, так иначе $l \subset n$, потому выполняется второй случай, из которого следует док-во теоремы.

- Аналогично выберем ДСК, в которой уравнение плоскости σ будет $z' = 0$ $\alpha \ \to F(x, y, z) = 0 \ degF = D$.

$$\begin{cases} z' = 0 \\ F(x', y', z') = 0 \end{cases} \iff F(x', y', 0) = 0$$

	Эллипс	Гипербола	Парабола
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a \geq b > 0$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > 0$ $b > 0$	$y^2 = 2px$ $p > 0$
Симметрия	OX, OY	OX, OY	OX
Термин	a — большая полуось, b — малая	$y = \pm\frac{b}{a}$ – асимптоты. a, b — действительная и мнимая полуоси	
Выпуклость	при $y > 0$ $\uparrow$, при $y < 0$ $\downarrow$	аналогично	аналогично
Фокус	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ $F_1(c; 0),\ F_2(-c, 0)$	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $F_1(c; 0),\ F_2(-c, 0)$	$c = \frac{p}{2}$ $F(c, 0)$
Эксцентриситет	$\epsilon = \frac{c}{a} \quad \epsilon < 1$	$\epsilon = \frac{c}{a} \quad \epsilon > 1$	$\epsilon = 1$
Директриса	d1: $x = \frac{a}{\epsilon}$ d2: $x = \frac{-a}{\epsilon}$	d1: $x = \frac{a}{\epsilon}$ d2: $x = \frac{-a}{\epsilon}$	d: $x = c$
Касательная в точке (x_0, y_0)	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$y = p(x + x_0)$

Кривые второго порядка: эллипс, гипербола, парабола Эллипсом, гиперболой и параболой называются кривые, которые в некоторой ПДСК задаются уравнением 1, 2, 3 соответственно(см. таблицу). Уравнения называются каноничными, а связанная с ними ПДСК — каноничной.

Лемма 1. *Пусть l есть эллипс*

$$M \in l \Leftrightarrow F_1 = a - \epsilon \cdot x \Leftrightarrow MF_2 = a + \epsilon \cdot x$$

Необходимость.

$$F_1 = a - \epsilon \cdot x \Leftrightarrow x \leq \frac{a}{\epsilon}$$
$$MF_1^2 = a^2 + 2x\epsilon + x^2\epsilon^2$$
$$MF_1^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$\text{При} \quad a\epsilon = c$$
$$x^2(1 - \epsilon^2 = y^2 - a^2 - c^2$$
$$x^2\frac{b^2}{a^2} + y^2 = b^2$$

Принадлежит эллипсу по определению. □

Достаточность.

$$MF_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$
$$MF_1^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} = (a - \epsilon x)^2$$
$$MF_1 = a + \epsilon x$$

$\square$

Теорема 1 (Свойство фокусов эллипса и гиперболы)**.** $F_1F_2 = 2c$

- *$a > c$ фикс.*

  Эллипс с фокусами в F_1 и F_2 — ГМТ точек, сумма расстояний до двух фокусов равна $2a$ Эллипс $= \{M \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$

- *$0 < a < c$ фикс.*

  Парабола с фокусами в F_1 и F_2 — ГМТ точек, разность расстояний до двух фокусов равна $2a$

  Парабола $= \{M \mid (MF_1 - MF_2)^2 = 4a^2\}$

Для эллипса. Введем ПДСК в которой $F_1\,(-c, 0)$ и $F_2:\ (c, 0)$ и возьмем в качестве $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

$$M \in \text{ эллипсу} \Leftrightarrow \begin{cases} MF_2 = a + \epsilon \cdot x \\ MF_1 = a - \epsilon \cdot x \end{cases} \Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a$$

Наоборот, пусть
$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$xc + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$\square$

Теорема 2 (Директальные свойства)**.** *Пусть $\epsilon > 0$ и d — прямая, фикс. Тогда ГМТ $M:\ \frac{MF}{\rho(M,d)} = \epsilon$*

$$\begin{cases} \epsilon < 1 & \textit{Эллипс} \\ \epsilon > 1 & \textit{Гипербола} \\ \epsilon = 1 & \textit{Парабола} \end{cases}$$

В случае эллипса берутся соотв. фокус и директриса.