Задача 5:

Достаточно взять 1007 билетов. Докажем это.

купим 1007 лотерейных билетов и заполним ячейки в них следующим образом. в первом билете заполним ячейки числами от 1 до 2012 в порядке возрастания. чтобы заполнить ячейки второго билета, разобьём их на два множества: в первом 1005 ячеек, во втором - 1007, и в каждом множестве циклически переставим числа. все остальные билеты заполним аналогичным образом. то есть, если в первом билете мы написали в ячейках числа 1, 2, 3, ... ,1005, 1006, ..., 2011, 2012, то во втором билете будут написаны числа 1005, 1, ..., 1004, 2012, 1006, ..., 2011, в третьем 1004, 1005, 1, ..., 1003, 2011, 2012, 1006, ..., 2010 и так далее.
попытаемся найти такую последовательность чисел, чтобы мы проиграли. на первом месте побывало каждое из 1005 чисел, значит, надо взять любое из 1007 чисел второго множества. на втором месте опять же побывали все числа первого множества, следовательно, нужно взять любое из оставшихся 1006 чисел второго множества, и так далее. после заполнения ячеек первого множества окажется, что из второго множества осталось два числа, а все остальные каким-то образом распределены по первым 1005 ячейкам. и эти два числа нельзя никуда записать, потому что не осталось свободных ячеек первого множества, а в каждой из 1007 ячеек второго множества оба числа уже побывали. значит, наши 1007 билетов всегда выигрывают.

Предположим мы взяли 1006 билетов (аналогично рассуждаем для меньшего числа билетов). В этом случае у каждого числа будет 1006 ячеек, где оно не побывало. Ясно, что эти 1006 ячеек не могут совпадать для 1007 и более чисел (потому что за 1006 ходов 1007 чисел не могут побывать (то есть аналогично не побывать) на одних и тех же местах). Следовательно, мы всегда можем переставить числа в ячейки, где они ещё не были.

Задача 6:

Любое написанное на доске число мы можем представить в виде :

10A+B   (B — последняя цифра этого числа,

A — число, составленное из остальных разрядов числа, расположенных в том же порядке).

Это число преобразуется следующим образом:

10A+B→A+2B.

Вычтем полученное число A+2B из исходного, умноженного на 2:

(20A+2B)-(2B+A)=19A. (1)

Пусть 10A+B=19^{2012}. То есть 10A+B (и 20A+2B) делятся на 19. Это означает, что число A+2B также делится на 19, так как в равенстве (1) правая часть делится на 19 и одно из слагаемых с левой стороны тоже делиться на 19, и это число не может быть равно 15^{1964}, так как в разложении его не простые множители нет числа 19.

Задача 7:

Пусть в обозначениях рисунка BE=DF=x, AB=1,AF=1-x.Тогда AE=$\sqrt{1+x^2}$. Если FG перпендикулярен AE, то ΔAFG подобен ΔABE, откуда FG=AB$\frac{AF}{AE}=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}$. Однако FG есть диаметр окружности, вписанной в ромб. Диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник ABE равен AB+BE-AE=1+x-$\sqrt{1+\mathrm{x}^2}$.

Приравнивая полученные выражения для радиуса окружностей, имеем

$$\frac{1-\mathrm{x}}{\sqrt{1+\mathrm{x}^2}}=1+\mathrm{x}-\sqrt{1+\mathrm{x}^2},$$

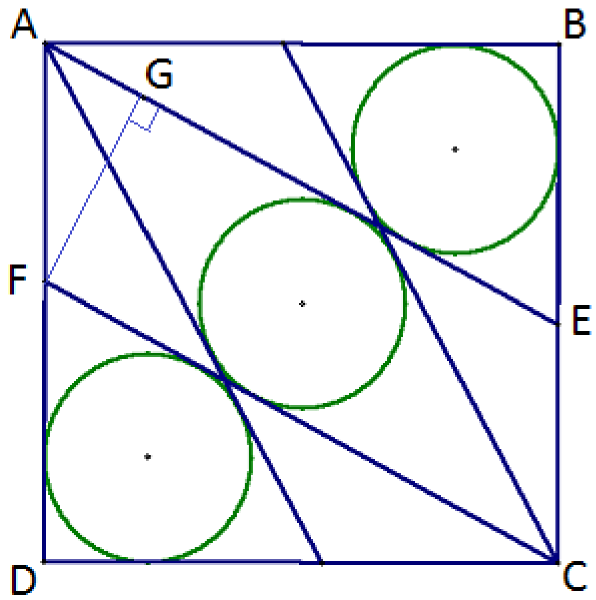
$$4x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = 0,$$

$$x=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt[3]{16\sqrt{2}+13} - \sqrt[3]{16\sqrt{2}-13}\right).$$

Решение кубического уравнения получено с помощью формулы Кардано. Радиус окружностей ищется по любой из формул

$r=\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}=1+x-\sqrt{1+x^2}$.

Приближённо $x\approx0,5407$, $r\approx0,404$.



Задача 8:

В каждом из тупоугольных треугольников, имеем $d=2(p—y)\text{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$p—y=\frac{a+x+2y}{2} - y = \frac{a+x}{2}$, значит $d=(a+x)\text{tg}\frac{\alpha}{2}$. С другой стороны, в малом правильном треугольнике $d=\frac{x}{\sqrt{3}}$. Из равенства диаметров этих кругов имеем $\text{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{x}{\sqrt{3}(a+x)}$.

По теореме синусов:

$$\frac{a}{sin\,120^0}=\frac{x+y}{\sin(60^0+\alpha)}=\frac{y}{sin\alpha},$$

Откуда y=$\frac{2a}{\sqrt{3}}sin\alpha$, x=$\frac{2a}{\sqrt{3}}(\sin(60^0-\alpha)-sin\alpha)=2\mathrm{a}\sin(30^0-\alpha)$. Подставляя это значение x в выражение для tg$\frac{\alpha}{2}$, получаем (квадратное) уравнение относительно tg$\frac{\alpha}{2}$, решение которого tg$\frac{\alpha}{2}$=$\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}{5}$. После несложных (но немного утомительных) вычислений, имеем d=$\frac{x}{\sqrt{3}}$=$\frac{2\mathrm{a}\sin(30^0-\alpha)}{\sqrt{3}}$=$\frac{a(7\sqrt{21}-27)}{2\sqrt{3}(16-\sqrt{21})}$.