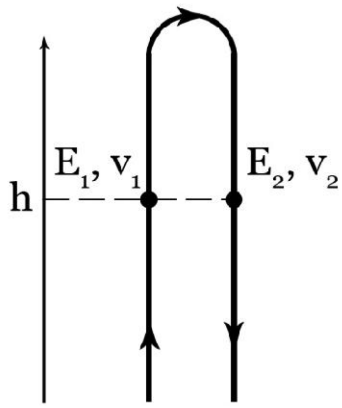
1. Ответ: T1<T2



Рассмотрим, как менялась энергия камня по мере его движения. В воздухе на него действуют две силы: сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Сила тяжести не изменяет его полную энергию, в то время как сила трения уменьшает её. Рассмотрим движение камня в моменты, когда он находится на одной и той же высоте во время подъёма и во время падения. При подъёме камень имеет энергию $E_{кин1} + E_{пот1} = E_1$, при падении $E_{кин2} + E_{пот2} = E_2$, причём $E_1 > E_2$. Но так как высота одна и та же, то $E_{пот1} = E_{пот2}$. Значит, $E_{кин1} > E_{кин2}$. Следовательно, $v_1 > v_2$, причём это неравенство верно для любой высоты h. Очевидно поэтому, что средняя скорость во время подъёма больше, чем средняя скорость при падении. А значит, время подъёма меньше времени падения.

2. Ответ: $Q_2 = \frac{4}{5} Q_1$

Поскольку изначально система находится в нормальных условиях, и объёмы сосудов равны, то количество вещества в левом сосуде $\nu_{Ar} + \nu_{O_2}$ равно количеству вещества в правом ν_{CO_2}, причём, так как в левом сосуде смесь состоит из равных объёмов Ar и O2, то $\nu_{Ar} = \nu_{O_2} = \frac{1}{2}\nu_{CO_2}$. Так как при нагреве поршень остаётся неподвижным, объёмы, занятые газами, остаются постоянными. Значит, мы имеем дело с изохорическим процессом. Молярная теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме равна $\frac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы молекулы. В случае аргона i=3, для кислорода i=5. Хотя в молекуле углекислого газа три атома, количество её степеней свободы тоже равно 5, так как молекула имеет линейное строение. Теплоёмкость газа в левом сосуде равна поэтому

$$C_2 = \nu_{Ar} \cdot \frac{3}{2}R + \nu_{O_2} \cdot \frac{5}{2}R = \frac{1}{2}\nu_{CO_2} \cdot \frac{3}{2}R + \frac{1}{2}\nu_{CO_2} \cdot \frac{5}{2}R = 2R \cdot \nu_{CO_2}.$$

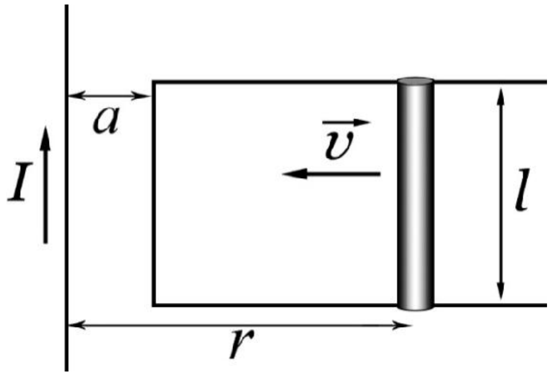
Теплоёмкость газа в правом сосуде равна $C_1 = \frac{5}{2}R \cdot \nu_{CO_2}$

Для неподвижности поршня необходимо, чтобы давления в сосудах были одинаковы. Так как объёмы сосудов и количества вещества газов в них также равны, то равны их температуры. Следовательно, в любой промежуток времени $\Delta T_1 = \Delta T_2$. При этом $\Delta T_1 = \frac{Q_1}{C_1}$, $\Delta T_2 = \frac{Q_2}{C_2}$. Отсюда

$$Q_2 = \Delta T_2 \cdot C_2 = \frac{Q_1}{C_1} \cdot 2R \cdot \nu_{CO_2} = \frac{Q_1}{\frac{5}{2}R \cdot \nu_{CO_2}} \cdot 2R \cdot \nu_{CO_2} = \frac{4}{5}Q_1.$$

<u>Примечание:</u> многие сделали ошибку, написав, что количество степеней свободы молекулы углекислого газа равно 6. В этом случае получается ответ $Q_2 = \frac{2}{3} Q_1$. <u>За это не снимались баллы!!!</u>

3. $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4I^2}{r^3 R} l^2 v a$



Обозначим расстояние от провода до рельс a, расстояние от провода до стержня r. На расстоянии r от провода электрический ток порождает магнитное поле с индукцией $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r}$. Найдём ЭДС индукции, которая возникает при движении стержня.

(*) $$-\varepsilon = \frac{d\Phi}{dt} = B\frac{dS}{dt} + S\frac{dB}{dt},$$

где S – площадь контура, образованного рельсами и стержнем. Так как $S = l\ (r - a)$, $\frac{dS}{dt} = l\ v$. Поскольку поле B зависит от r, а не от времени, заменим $\frac{dB}{dt}$ на $\frac{dB}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$. Получается

$$B\frac{dS}{dt} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r} l\ v, \quad S\frac{dB}{dt} = l\ (r - a)\frac{dB}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

Дифференцируя B и учтя, что $\frac{dr}{dt} = v$, получим

$$S\frac{dB}{dt} = l\ (r - a)\frac{-\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r^2} v$$

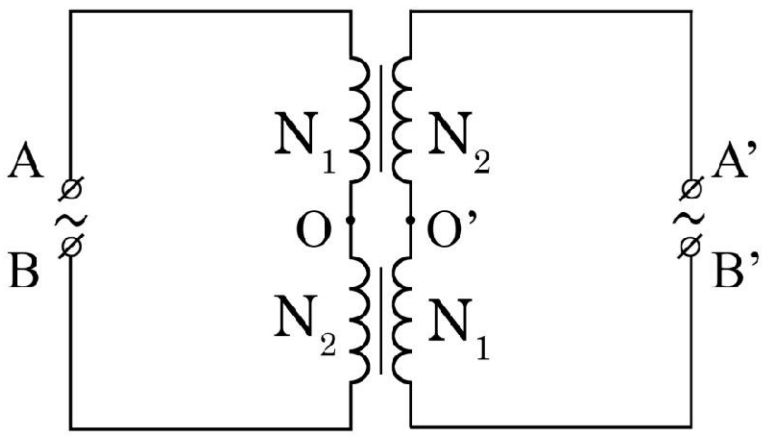
Подставляя полученные соотношения в выражение (*) и упрощая его, приходим к выводу, что

$$|\varepsilon| = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r^2} l\ va$$

Поэтому ток в контуре будет равен $I_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{r^2 R} l\ va$. Сила, действующая на стержень со стороны магнитного поля провода, вычисляется по формуле $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I I_1}{r} l = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{4I^2}{r^3 R} l^2 va$ и направлена против движения стержня. Значит, внешняя сила должна быть сонаправлена движению.

<u>Примечание:</u> никто не решил эту задачу правильно. Только одна участница написала второе слагаемое в формуле (*), но при этом сделала незначительную ошибку в дальнейших выкладках. Она получила полный балл. Тем, кто правильно решил задачу только с учётом первого слагаемого, ставилось 7 баллов.

4. Ответ: $\frac{2k}{1+k^2}U_{вх}$



Решение:

Обозначим $\frac{N_2}{N_1} = k$. По формуле трансформатора отношение напряжений на обмотках равно отношению числа витков. Поэтому для участков цепи OA и O'A' имеем

$$\frac{U_{OA}}{U_{O'A'}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{k},$$

для участков OB и O’B’

$$\frac{U_{OB}}{U_{O'B'}} = \frac{N_2}{N_1} = k.$$

Учтём импеданс обмоток. Так как трансформаторы включены последовательно, а импеданс катушки вычисляется по формуле $Z = \omega L$, то

$$\frac{U_{OA}}{U_{OB}} = \frac{Z_{OA}}{Z_{OB}} = \frac{\omega L_{OA}}{\omega L_{OB}} = \frac{{N_1}^2}{{N_2}^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Следовательно,

$$U_{OA} = \frac{1}{1+k^2}U_{вх}, \qquad U_{OB} = \frac{k^2}{1+k^2}U_{вх}$$

Найдём, наконец, выходное напряжение.

$$U_{A'B'} = U_{A'O'} + U_{O'B'} = kU_{OA} + \frac{U_{OB}}{k} = k\frac{1}{1+k^2}U_{вх} + \frac{1}{k}\cdot\frac{k^2}{1+k^2}U_{вх} = \frac{2k}{1+k^2}U_{вх}.$$

<u>*Примечание:*</u> *многие сделали ошибку из-за того, что считали, что индуктивность катушки пропорциональна N, а не* N^2*. За это снимались баллы. Многие также рассматривали случай, когда вторичные обмотки включены в противоположных направлениях. Тогда получается*

$$U_{A'B'} = U_{A'O'} - U_{O'B'} = kU_{OA} - \frac{U_{OB}}{k} = k\frac{1}{1+k^2}U_{вх} - \frac{1}{k}\cdot\frac{k^2}{1+k^2}U_{вх} = 0.$$

Однако изначально предполагалось, что катушки включены всё-таки в одном направлении, что и изображено на рисунке. За рассмотрение другого случая не начислялись и не снимались баллы.

5. Ответ: $x_1 = 2\cos\frac{5}{18}\pi, x_2 = 2\cos\frac{7}{18}\pi, x_3 = 2\cos\frac{17}{18}\pi$

Можно было делать замену двумя способами, оба приводят к одному и тому же ответу.

<u>1 способ</u>	<u>2 способ</u>
$x = 2\sin\alpha$	$x = 2\cos\beta$
$8\sin\alpha^3 - 6\sin\alpha + \sqrt{3} = 0$	$8\cos\beta^3 - 6\cos\beta + \sqrt{3} = 0$
$4\sin\alpha^3 - 3\sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$	$4\cos\beta^3 - 3\cos\beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
$\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 3\beta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
$3\alpha = \pi k + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{3}$	$3\beta = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$
$\alpha = \frac{3k + (-1)^k}{9}\pi$	$\beta = \frac{\pm 5 + 12n}{18}\pi$
$x = 2\sin\frac{3k + (-1)^k}{9}\pi$	$x = 2\cos\frac{\pm 5+12n}{18}\pi$,

где $k,\ n \in Z$ Оба эти ответа совпадают, что можно легко понять, изобразив соответствующие углы на тригонометрическом круге. Докажем, что мы нашли не один корень уравнения, а все три. Это будет проще сделать, используя ответ, полученный вторым способом.

Заметим, что, поскольку косинус – чётная функция, $\cos\frac{+5+12n_1}{18}\pi = \cos\frac{-5+12n_2}{18}\pi$ при $n_1=-n_2$. Значит, достаточно рассмотреть, например, только ответы вида $\cos\frac{5+12n_1}{18}\pi$. В свою очередь, $\frac{5+12n_1}{18}\pi$ – это множество углов

$$\varphi \in \left\{\varphi_1 \middle| \varphi_1 = \frac{5\pi}{18} + 2\pi k_1, k_1 \in Z\right\} \cup \left\{\varphi_2 \middle| \varphi_2 = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} + 2\pi k_2, k_2 \in Z\right\}$$
$$\cup \left\{\varphi_3 \middle| \varphi_3 = \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} + 2\pi k_3, k_3 \in Z\right\}$$

Каждое из множеств φ_1, φ_2, φ_3, очевидно, изображается на тригонометрическом круге одной точкой, причём косинусы этих углов не совпадают. Следовательно, наш ответ $x = 2\cos\frac{\pm 5+12n}{18}\pi$ содержит ровно три различных числа. По основной теореме алгебры уравнение третьей степени не может иметь более трёх корней. Следовательно, мы нашли все решения уравнения.

6. Ответ: $2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

Необходимо рассмотреть шесть различных случаев.

1) $x = 2\pi n$

$[\sin x] = 0$

$[\cos x] = 1$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = 0$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = 2011$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] < [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

2) $2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$[\sin x] = 0$

$[\cos x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = 0$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

3) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$[\sin x] = 1$

$[\cos x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = 2011$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] > [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

4) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leq \pi + 2\pi n$

$[\sin x] = 0$

$[\cos x] = -1$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = 0$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = -1$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] > [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

5) $\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

$[\sin x] = -1$

$[\cos x] = -1$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = -1$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = -1$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

6) $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n \leq x < 2\pi + 2\pi n$

$[\sin x] = -1$

$[\cos x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] = -1$

$[\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x] = 0$

$[\sin x] + [\sin^2 x] + \cdots + [\sin^{2011} x] < [\cos x] + [\cos^2 x] + \cdots + [\cos^{2011} x]$

Подытоживая, получаем, что исходному неравенству удовлетворяет x: $2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$

<u>Примечание:</u> большинство ошибок было сделано из-за того, что был неправильно понят термин «целая часть числа». Напоминаем, целая часть числа – это округление числа до ближайшего целого <u>в меньшую сторону</u>. А это значит, что, например, $[-0{,}375] = -1$*, а вовсе не* 0.

7. Ответ: $R = \frac{ab}{a-b}$

Обозначим точку пересечения отрезка AM и окружности K. Рассмотрим треугольники AKO и ABM.

1) Угол ∠A – общий

2) $\angle AMB = 2\angle AMD = 2 * \frac{1}{2}\overset{\frown}{KD} = \overset{\frown}{KD}$, так как $\angle KMD$ – вписанный угол, опирающийся на дугу $\overset{\frown}{KD}$.

В то же время, ∠KOA – центральный угол, опирающийся на дугу $\overset{\frown}{KD}$, значит, $\angle AMB = \angle KOA$.

Следовательно, $\Delta AKO \sim \Delta ABM$ (по первому признаку).

Из подобия треугольников следует, что $\frac{KO}{BM}=\frac{AO}{AM}$. Но $KO=R$, $AO=R+a$, где R – радиус окружности. Следовательно, $R=(R+a)\cdot\frac{BM}{AM}$.

Но $\frac{BM}{AM}=\frac{b}{a}$ (по теореме о биссектрисе внутреннего угла треугольника). Подставляя это соотношение в предыдущее равенство, получаем уравнение $R=(R+a)\cdot\frac{b}{a}$, решая которое находим ответ: $R=\frac{ab}{a-b}$.

8. Предположим, что мы уже выполнили все необходимые построения и восстановили треугольник ABC, а также треугольник $A_1B_1C_1$ Проведём анализ.

Проведём через точку B_2 прямую, параллельную B_1C_1. Пусть она пересекла отрезки A_1B_1 и C_2A_2 соответственно в точках D и E. По обобщённой теореме Фалеса $\frac{B_1D}{DA_1}=\frac{C_1B_2}{B_2A_1}=\frac{1}{3}$, значит, $B_1D=\frac{1}{4}B_1A_1$. Но из условий задачи следует, что $\frac{B_1C_2}{B_1A_1}=\frac{3}{4}$. Значит, $B_1D=\frac{1}{3}B_1C_2$. Отсюда делаем вывод, что, по обобщённой теореме Фалеса, $A_2E=\frac{1}{3}A_2C_2$. Поэтому ясно, что прямую, содержащую сторону B_1C_1, можно восстановить следующим способом.

С помощью циркуля и линейки поделим сторону A_2C_2 на 3 равных части, а затем отметим точку E так, чтобы было $\frac{A_2E}{EC_2}=\frac{1}{2}$. После этого через вершину A_2 проведём прямую, параллельную B_2E. Она и будет искомой прямой, содержащей сторону B_1C_1.

Дальнейшие построения выполняем аналогичным образом. Сначала на сторонах C_2B_2 и B_2A_2 отмечаем соответственно точки F и G так, чтобы было $\frac{C_2F}{FB_2}=\frac{B_2G}{GA_2}=\frac{1}{2}$, затем через вершины C_2 и B_2 проводим прямые, параллельные соответственно A_2F и C_2G. эти прямые попарно пересекаются, причём точками пересечения, очевидно, являются вершины треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично можно доказать, что для того, чтобы восстановить исходный треугольник ABC, необходимо

1) Отметить точки K, L, M – середины сторон A_1C_1, C_1B_1 и B_1A_1 соответственно

2) Провести через вершины A_1, B_1 и C_1 прямые, параллельные соответственно отрезкам A_1L, B_1K и C_1M

3) Отметить вершины треугольника ABC – точки пересечения полученных прямых.

Проведём исследование задачи.

Каждое из описанных построений может быть выполнено единственным образом, следовательно, задача имеет не более одного решения.

Задача не имеет решений только в том случае, если построенные прямые не пересекаются. Но это невозможно, так как они параллельны соответственно трём попарно пересекающимся отрезкам в треугольнике. Значит, задача всегда разрешима, и притом единственным образом.