

**ВОПРОСЫ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ НА ФЛФЭ**  
**А.А. ПУХОВ**

**А. Экзаменационные задачи**

1. Вычислите величину магнитокалорического эффекта  $(\partial T / \partial \mathcal{H})_S$  при адиабатическом размагничивании парамагнетика с магнитной восприимчивостью  $\chi = A/T$  и теплоемкостью  $C_{\mathcal{H}} = BT^3$ . Каков знак эффекта?
2. Запишите «первое начало» для дифференциалов энергии  $E$ , энтропии  $S$  и объема  $V$  и разделите эти величины под дифференциалами на полное число частиц  $N$ . Считая число частиц также переменным, получите выражения для потенциала Гиббса  $\Phi$  и химического потенциала  $\mu$ .
3. Изобарический коэффициент объемного расширения резины отрицателен  $(\partial V / \partial T)_P < 0$ . Определите знак ее адиабатического коэффициента объемного расширения  $(\partial V / \partial T)_S$ . Быстро растянутый и приложенный к губам резиновый жгут покажется теплым или прохладным (эффект П.Н. Лебедева)?
4. Теплоемкость газа двухуровневых атомов имеет резкий максимум. Найдите его характерные температуру и ширину, если верхний уровень атомов с энергией  $\varepsilon$  сильно вырожден  $\ln g \gg 1$ , а нижний уровень с энергией 0 невырожден.
5. Запишите выражения для свободной энергии  $F$  системы с энергетическими уровнями  $E_n$  в каноническом ансамбле. Прямым дифференцированием по  $T$  покажите, что  $(\partial F / \partial T)_V = -S$ , то есть  $dF = -SdT + \dots$ . Воспользуйтесь распределением Гиббса и тем, что  $\langle E_n \rangle = E$ .
6. Запишите выражения для свободной энергии  $F(\lambda)$  системы с энергетическими уровнями  $E_n(\lambda)$  в каноническом ансамбле. Прямым дифференцированием по  $\lambda$  покажите, что обобщенная сила  $(\partial F / \partial \lambda)_T$  равна  $(\partial E / \partial \lambda)_T$ . Воспользуйтесь распределением Гиббса и тем, что  $\langle E_n \rangle = E$ . Выберите в качестве параметра объем  $\lambda = V$ . Покажите, что обобщенной силой в этом случае будет  $(\partial F / \partial V)_T = -P$ , то есть  $dF = -PdV + \dots$ .
7. Вычислите теплоемкость системы невзаимодействующих осцилляторов при  $T \ll \hbar\omega$ . Воспользуйтесь распределением Гиббса.
8.  $N$  атомов идеального больцмановского газа находится в гармонической ловушке  $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$  при температуре  $T$ . Найдите концентрацию  $n(0)$  в центре ловушки и оцените температуру  $T_B$ , ниже которой начнется бозе-конденсация, если атомы - бозоны.
9. Найдите теплоемкость  $C(T)$  больцмановского газа, состоящего из  $n$ -атомных молекул. Как с ростом температуры изменяется  $C(T)$  по мере возбуждения поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекул? Чему равна  $C(\infty)$  без учета ионизации и диссоциации?
10. Найдите степень ионизации  $\alpha(T)$  одноатомного больцмановского газа с энергией ионизации  $I$ . При какой температуре  $T_I$  начинается существенная ионизация?
11. Вычислите температуру бозе-конденсации  $T_B$  идеального ультрарелятивистского газа. Воспользуйтесь условием на полное число частиц  $N$  в пространстве импульсов.
12. Вычислите температурную зависимость теплоемкости  $C_V$  идеального ультрарелятивистского бозе-газа при  $T < T_B$ .
13. Найдите энергию Ферми  $\varepsilon_F$  идеального ультрарелятивистского ферми-газа. Вычислите его химпотенциал  $\mu$  и энергию  $E$  в вырожденном состоянии ( $T \ll \varepsilon_F$ ) с точностью  $\sim (T / \varepsilon_F)^2$

включительно. Воспользуйтесь разложением  $\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon - \mu)/T + 1} = \int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) + \dots$

Вычислите теплоемкость газа  $C_V$  и выясните, при какой температуре  $C_V / N \sim 1$ .

14. Найдите энергию Ферми  $\varepsilon_F$  идеального нерелятивистского ферми-газа. Вычислите его химпотенциал  $\mu$  и энергию  $E$  в вырожденном состоянии ( $T \ll \varepsilon_F$ ) с точностью  $\sim (T / \varepsilon_F)^2$  включительно. Воспользуйтесь разложением  $\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon - \mu)/T + 1} = \int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) + \dots$  и вычислите теплоемкость газа  $C_V$ , выясните, при какой температуре  $C_V / N \sim 1$ .
15. При какой температуре химпотенциал  $\mu$  идеального нерелятивистского ферми-газа обращается в ноль?
16. При какой температуре химпотенциал  $\mu$  идеального ультрарелятивистского ферми-газа обращается в ноль?
17. Вычислите температуру  $T_B$  конденсации  $N$  атомов идеального бозе-газа, находящегося в трехмерной гармонической ловушке  $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$ . Какова точность Вашего расчета?
18. Вычислите энергию  $\varepsilon_F$  Ферми  $N$  атомов идеального ферми-газа, находящегося в трехмерной гармонической ловушке  $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$ . Какова точность Вашего расчета?
19. При какой размерности задачи  $D = 1, 2, 3$  возможна бозе-конденсация  $N \gg 1$  атомов в гармонической ловушке  $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$ ? Кратности вырождения  $n$ -го уровня  $D$ -мерного осциллятора равны  $g_{1D} = 1$ ,  $g_{2D} = n + 1$  и  $g_{3D} = (n + 1)(n + 2) / 2$  соответственно.
20. Нарисуйте изотерму, изобару и изохору идеального бозе-газа. Укажите характерные величины и асимптотики.
21. Нарисуйте изотерму, изобару и изохору идеального ферми-газа. Укажите характерные величины и асимптотики.
22. Вычислите зависимость давления  $P$  от плотности  $\rho = mN / V$  вырожденных ( $T \ll \varepsilon_F$ ) нерелятивистского и ультрарелятивистского ферми-газов. Нарисуйте график  $P(\rho)$ .
23. При какой плотности  $\rho$  идеальный вырожденный ( $T \ll \varepsilon_F$ ) ферми-газ становится ультрарелятивистским?
24. Получите выражение для равновесной плотности фотонов  $N / V$  реликтового излучения ( $T = 3K$ ) и вычислите ее. Воспользуйтесь тем, что сумма обратных кубов  $\zeta(3) = 1.2$ , а  $\hbar \approx 10^{-27}$  эрг·с,  $k_B \approx 1,4 \cdot 10^{-16}$  эрг / град.
25. Получите выражение для постоянной Стефана-Больцмана  $\sigma$  и вычислите ее значение, учитывая, что температура измеряется в градусах  $K$ . Воспользуйтесь тем, что сумма обратных четвертых степеней  $\zeta(4) = \pi^4 / 90$ , а  $\hbar \approx 10^{-27}$  эрг·с,  $k_B \approx 1,4 \cdot 10^{-16}$  эрг / град.
26. Вычислите парамагнитную  $\chi_{пара}(T)$  и диамагнитную  $\chi_{диа}(T)$  восприимчивость невыврожденного ( $T \gg \varepsilon_F$ ) электронного газа (закон Кюри).
27. Вычислите магнитную восприимчивость  $\chi_{ферро}(T)$  ферромагнетика с температурой Кюри  $T_c$  в теории «среднего поля» (закон Кюри-Вейсса).
28. Вычислите температуру Кюри  $T_c$  ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении «среднего поля». Считайте, что обменное взаимодействие  $J$  существенно только с  $z$  ближайшими соседями.
29. Вычислите теплоемкость  $C_V(T)$  и намагниченность  $\mathcal{M}(T)$  магненов при низких температурах  $T \ll T_c$ . Используйте спектр магненов  $\omega_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}^2 / 2m_*$ .
30. Запишите выражение для распределения  $n_{\mathbf{b}}(\mathbf{p})$  газа бозе-квазичастиц со спектром  $\varepsilon(\mathbf{p})$  в системе отсчета, в которой газ квазичастиц движется «как целое» со скоростью  $\mathbf{v}$ . Исходя из требования конечности и положительности  $n_{\mathbf{b}}(\mathbf{p})$ , сформулируйте критерий «способности» движущегося газа квазичастиц находиться в равновесии с термостатом. Что произойдет, если это условие нарушится? Как это условие связано с критериями Маха и Вавилова-Черенкова?

31. Вычислите гидродинамическую скорость звука  $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$  в слабонеидеальном вырожденном бозе-газе. Сравните ее с фазовой скоростью элементарных возбуждений конденсата  $c = \sqrt{U_0 N / mV}$ . Считайте, что при  $T = 0$  в нулевом приближении по константе взаимодействия  $U_0 \ll T_B V / N$  все частицы  $N = N_0$  находятся в конденсате.
32. Элементарные возбуждения системы являются бозонами и имеют «спектр со щелью»  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta + (p - p_0)^2 / 2m$ ,  $\Delta \ll p_0^2 / 2m$ . Оцените низкотемпературный  $T \ll \Delta$  вклад этих квази-частиц в теплоемкость  $C(T)$  и их равновесное число  $N(T)$ .
33. Элементарные возбуждения системы являются фермионами и имеют «спектр со щелью»  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2}$ ,  $\Delta \ll p_F^2 / 2m$ . Оцените низкотемпературный  $T \ll \Delta$  вклад этих квази-частиц в теплоемкость  $C(T)$  и их равновесное число  $N(T)$ .
34. Найдите зависимость критического тока сверхпроводника (тока распаривания)  $j_c(T)$  от температуры  $T$  вблизи точки перехода  $T_c$ . Воспользуйтесь критерием сверхтекучести куперовских пар.
35. Вычислите температуру сверхпроводящего перехода  $T_c$  в модели БКШ. Константа связи  $\lambda$ , частота Дебая  $\omega_D$ , плотность состояний на уровне Ферми  $g_F$ .
36. Вычислите величину энергетической щели сверхпроводника  $\Delta(0)$  при нулевой температуре  $T = 0$  в модели БКШ. Константа связи  $\lambda$ , частота Дебая  $\omega_D$ , плотность состояний на уровне Ферми  $g_F$ .
37. Оцените теплоемкость сверхпроводника  $C(T)$  при низких температурах  $T \ll \Delta(0)$  в модели БКШ.
38. Вычислите величину магнитного поля  $B(0)$  в центре абрикосовского вихря. Воспользуйтесь выражением для плотности сверхпроводящего тока  $j_s$ .
39. Вычислите теплоемкость слабонеидеального  $U_0 \ll T_B V / N$  бозе-газа  $C(T)$  при низких температурах  $T \ll U_0 N / V \ll T_B$ . Прокомментируйте условия на температуру и константу взаимодействия.
40. Вычислите величину магнитного потока  $\Phi$  через абрикосовский вихрь. Получите выражение для кванта магнитного потока  $\Phi_0$  и вычислите его значение. Воспользуйтесь выражением для плотности сверхпроводящего тока  $j_s$ .
41. Получите критерий применимости теории Гинзбурга-Ландау. Выразите число  $Gi$  для сверхпроводника через температуру перехода  $T_c$  и энергию Ферми  $\varepsilon_F$ .

### ***В. Экзаменационные вопросы***

1. Принцип энтропии и основной термодинамический якобиан.
2. Принцип возрастания энтропии и минимальности термодинамических потенциалов  $F$  и  $\Omega$ .
3. Принцип возрастания энтропии и условия термодинамического равновесия. Равновесие во внешнем поле.
4. Принцип возрастания энтропии и термодинамическая устойчивость вещества. Термодинамические неравенства.
5. Термодинамические потенциалы в магнитном поле. «Теорема о малых добавках».
6. Термодинамические потенциалы при переменном числе частиц. Химический потенциал  $\mu$ , потенциал Гиббса  $\Phi$ .
7. Условия равновесия фаз. Фазовые переходы первого и второго рода.
8. Метод ансамблей Гиббса. Эргодическая гипотеза.
9. Теорема Лиувилля. Микроканоническое распределение.
10. Число состояний, статистический вес и статистическая энтропия Больцмана.
11. Статистическая энтропия Гиббса. Ее экстремальность для распределения Гиббса.
12. Каноническое распределение Гиббса. Статистическая сумма  $Z$  и свободная энергия  $F$ . Распределение макроскопической системы по состояниям  $\rho(E)$  и по энергии  $w(E)$ .

13. Большое каноническое распределение. Омега-потенциал. Флуктуация числа частиц  $\overline{\Delta N^2}$  и энергии  $\overline{\Delta E^2}$ .
14. Равнораспределение энергии по степеням свободы больцмановского газа.
15. Химический потенциал больцмановского газа  $\mu(T)$ . Больцмановский газ во внешнем поле  $U(\mathbf{r})$ .
16. Условие равновесия химической реакции.
17. Ионизация. Формула Саха.
18. Неравновесная энтропия и  $\Omega$ -потенциал идеальных бозе- и ферми-газа. Распределения Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.
19. Зависимость химического потенциала идеального ферми- и бозе-газа от температуры.
20. Идеальный ферми-газ. Уравнение состояния и основные термодинамические величины.
21. Идеальный бозе-газ. Уравнение состояния и основные термодинамические величины.
22. Теплоемкость фононов и фотонов при низких температурах.
23. Теплоемкость электронов металла при низких температурах  $T \ll \varepsilon_F$ .
24. Теорема Бора – ван Леевен и ее физический смысл.
25. Парамагнетизм Паули.
26. Диамагнетизм Ландау.
27. Эффект де Гааза – ван Альфена (на примере двумерного электронного газа).
28. Спиновые волны в модели Гейзенберга. Теплоемкость  $C(T)$  и намагниченность  $M(T)$  магнетонов.
29. Теория фазовых переходов II рода (теория «среднего поля») в применении к ферромагнетику. Намагниченность  $M(T)$ , восприимчивость  $\chi(T)$  и скачок теплоемкости  $\Delta C(T_c)$ .
30. Ферромагнитный переход в модели Гейзенберга в приближении «среднего поля». Температура Кюри  $T_c$ .
31. Принцип Больцмана для вероятности термодинамической флуктуации макроскопической системы. Флуктуации основных термодинамических величин.
32. Флуктуации параметра порядка. Критерий применимости теории «среднего поля». Число Леванюка  $Gi$ .
33. Гамильтониан взаимодействующих бозе- и ферми- частиц в представлении вторичного квантования.
34. Скорость боголюбовского звука в слабонеидеальном  $U_0 \ll T_B V / N$  бозе-газе при нулевой температуре  $T = 0$ .
35. Критерий Ландау сверхтекучести. Устойчивость газа квазичастиц, движущегося как целое, по отношению к рождению новых квазичастиц. Связь с критериями Маха и Вавилова-Черенкова.
36. Микроскопическая теория сверхтекучести Боголюбова. Преобразования Боголюбова. Спектр возбуждений  $\varepsilon(p)$ .
37. Неустойчивость Купера в сверхпроводниках (уравнение Шредингера для куперовской пары). Энергия куперовской пары  $-2\Delta$ .
38. Микроскопическая теория сверхпроводимости БКШ. Преобразования Боголюбова. Спектр возбуждений  $\varepsilon(p)$ .
39. Микроскопическая теория сверхпроводимости. Уравнение для щели  $\Delta(T)$  в модели БКШ.
40. Функционал Гинзбурга – Ландау. Уравнение для комплексного параметра порядка  $\psi(\mathbf{r})$ . Размер куперовской пары.
41. Функционал Гинзбурга – Ландау. Уравнение для векторного потенциала  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ .
42. Уравнение Гинзбурга – Ландау для векторного потенциала  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ . Эффект Мейсснера. Спонтанное нарушение симметрии.
43. Длина когерентности  $\xi(T)$  и лондоновская глубина проникновения магнитного поля  $\lambda(T)$ . Спонтанное нарушение симметрии.
44. Плотность сверхпроводящего тока  $j_s$ . Квантование магнитного потока  $\Phi$ .
45. Вихрь Абрикосова. Верхнее  $\mathcal{H}_{c2}$  и нижнее  $\mathcal{H}_{c1}$  критические магнитные поля в сверхпроводниках II рода.

### ***С. «ПРИНЦИП ПРОСТОТЫ»***

Поскольку наша кафедра является лучшей из кафедр теоретической физики, экзаменационная оценка описывается вариационным принципом.

0. Допущенные к экзамену лектором (ДЗ 1 и 2, **обязательно  $\geq 3$**  баллов «за семестр») и деканатом получают билеты. Оценка выставляется исходя из «принципа простоты», а именно, по максимуму Вы можете получить:
  1. – Практически ничего - «неудовлетворительно» 0-2 проставляется в ведомость.
  2. Экзаменационная задача - «удовлетворительно» 3-4.
  3. + Экзаменационный вопрос - «хорошо» 5-7.
  4. + Экзаменационный вопрос - «отлично» 8-10.
5. Затем усредненная мнением экзаменатора оценка проставляется в ведомость. Она не может быть больше, чем **оценка «за семестр» +2**. А меньше – может, хоть до 0.