

ВОПРОСЫ ПО СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ НА ФЛФЭ
А.А. ПУХОВ

А. Экзаменационные задачи

1. Как связаны адиабатическая $(\partial V / \partial P)_S$ и изотермическая $(\partial V / \partial P)_T$ сжимаемости? Теплоемкости C_p и C_v заданы.
2. Вычислите величину магнитокалорического эффекта $(\partial T / \partial \mathcal{H})_S$ при адиабатическом размагничивании парамагнетика с $\chi = A/T$ и теплоемкостью $C_{\mathcal{H}} = BT^3$. Каков знак эффекта?
3. Запишите «первое начало» для дифференциалов энергии E , энтропии S и объема V и разделите эти величины под дифференциалами на полное число частиц N . Считая число частиц также переменным, получите выражения для потенциала Гиббса Φ и химического потенциала μ .
4. Изобарический коэффициент объемного расширения резины отрицателен $(\partial V / \partial T)_p < 0$. Учтя, что $\partial(T, S) = \partial(P, V)$, $(\partial V / \partial P)_T < 0$ и $C_v > 0$, определите знак ее адиабатического коэффициента объемного расширения $(\partial V / \partial T)_S$: быстро растянутый и приложенный к губам резиновый жгут покажется теплым или прохладным (эффект П.Н. Лебедева)?
5. Теплоемкость двухуровневых атомов имеет резкий максимум. Найдите его характерные температуру и ширину, если верхний уровень атомов с энергией ε сильно вырожден $\ln g \gg 1$, а нижний уровень с энергией 0 невырожден.
6. Запишите выражения для свободной энергии F системы с энергетическими уровнями E_n в каноническом ансамбле. Прямым дифференцированием по T покажите, что $(\partial F / \partial T)_V = -S$, то есть $dF = -SdT + \dots$. Воспользуйтесь распределением Гиббса и тем, что $\langle E_n \rangle = E$.
7. Запишите выражения для свободной энергии $F(\lambda)$ системы с энергетическими уровнями $E_n(\lambda)$ в каноническом ансамбле. Прямым дифференцированием по λ покажите, что обобщенная сила $(\partial F / \partial \lambda)_T$ равна $(\partial E / \partial \lambda)_T$. Воспользуйтесь распределением Гиббса и тем, что $\langle E_n \rangle = E$. Выберите в качестве параметра объем $\lambda = V$. Покажите, что обобщенной силой в этом случае будет $(\partial F / \partial V)_T = -P$, то есть $dF = -PdV + \dots$.
8. Вычислите теплоемкость системы невзаимодействующих осцилляторов при $T \ll \hbar\omega$. Воспользуйтесь распределением Гиббса.
9. N атомов идеального больцмановского газа находится в гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$ при температуре T . Найдите концентрацию $n(0)$ в центре ловушки и оцените температуру T_B , ниже которой начнется бозе-конденсация, если атомы - бозоны.
10. Найдите теплоемкость C больцмановского газа, состоящего из n -атомных молекул. Как с ростом температуры изменяется C по мере возбуждения поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы молекул?
11. Найдите степень ионизации $\alpha(T)$ одноатомного больцмановского газа с энергией ионизации I . При какой температуре T_i начинается существенная ионизация?
12. Вычислите температуру бозе-конденсации T_B идеального ультрарелятивистского газа. Воспользуйтесь условием на полное число частиц N в пространстве импульсов.
13. Вычислите температурную зависимость теплоемкости C_v идеального ультрарелятивистского бозе-газа при $T < T_B$.
14. Найдите энергию Ферми ε_F идеального ультрарелятивистского ферми-газа. Вычислите его химпотенциал μ и энергию E в вырожденном состоянии ($T \ll \varepsilon_F$) с точностью $\sim (T / \varepsilon_F)^2$

включительно. Воспользуйтесь разложением $\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon - \mu)/T + 1} = \int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) + \dots$

Вычислите теплоемкость газа C_V и выясните, при какой температуре $C_V / N \sim 1$.

15. Найдите энергию Ферми ε_F идеального нерелятивистского ферми-газа. Вычислите его химпотенциал μ и энергию E в вырожденном состоянии ($T \ll \varepsilon_F$) с точностью $\sim (T / \varepsilon_F)^2$ включительно. Воспользуйтесь разложением $\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\exp(\varepsilon - \mu)/T + 1} = \int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) + \dots$ и вычислите теплоемкость газа C_V , выясните, при какой температуре $C_V / N \sim 1$.
16. При какой температуре химпотенциал μ идеального нерелятивистского ферми-газа обращается в ноль?
17. При какой температуре химпотенциал μ идеального ультрарелятивистского ферми-газа обращается в ноль?
18. Вычислите температуру T_B конденсации N атомов идеального бозе-газа, находящегося в трехмерной гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$. Какова точность Вашего расчета?
19. Вычислите энергию ε_F Ферми N атомов идеального ферми-газа, находящегося в трехмерной гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$. Какова точность Вашего расчета?
20. При какой размерности задачи $D = 1, 2, 3$ возможна бозе-конденсация $N \gg 1$ атомов в гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2 / 2$? Кратности вырождения n -го уровня D -мерного осциллятора равны $g_{1D} = 1$, $g_{2D} = n + 1$ и $g_{3D} = (n + 1)(n + 2) / 2$ соответственно.
21. Нарисуйте изотерму, изобару и изохору идеального бозе-газа. Укажите характерные величины и асимптотики.
22. Нарисуйте изотерму, изобару и изохору идеального ферми-газа. Укажите характерные величины и асимптотики.
23. Вычислите зависимость давления P от плотности $\rho = mN / V$ вырожденных ($T \ll \varepsilon_F$) нерелятивистского и ультрарелятивистского ферми-газов.
24. При какой плотности ρ идеальный вырожденный ($T \ll \varepsilon_F$) ферми-газ становится ультрарелятивистским?
25. Получите выражение для равновесной плотности фотонов N / V реликтового излучения ($T = 3K$) и вычислите ее. Воспользуйтесь тем, что сумма обратных кубов $\zeta(3) = 1.2$, а $\hbar \approx 10^{-27}$ эрг \cdot с (1).
26. Получите выражение для постоянной Стефана-Больцмана σ и вычислите ее значение, учитывая, что температура измеряется в градусах K . Воспользуйтесь тем, что сумма обратных четвертых степеней $\zeta(4) = \pi^4 / 90$, а $\hbar \approx 10^{-27}$ эрг \cdot с.
27. Вычислите парамагнитную $\chi_{пара}(T)$ и диамагнитную $\chi_{диа}(T)$ восприимчивость невыврожденного ($T \gg \varepsilon_F$) электронного газа (закон Кюри).
28. Вычислите магнитную восприимчивость $\chi_{ферро}(T)$ ферромагнетика с температурой Кюри T_c в теории «среднего поля» (закон Кюри-Вейсса).
29. Вычислите температуру Кюри T_c ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении «среднего поля». Считайте, что обменное взаимодействие J существенно только с z ближайшими соседями.
30. Вычислите теплоемкость $C_V(T)$ и намагниченность $\mathcal{M}(T)$ магнонов при низких температурах $T \ll T_c$. Используйте спектр магнонов $\omega_{\mathbf{k}} = \hbar \mathbf{k}^2 / 2m_*$.
31. Запишите выражение для распределения $n_B(\mathbf{p})$ газа бозе-квазичастиц со спектром $\varepsilon(\mathbf{p})$ в системе отсчета, в которой газ квазичастиц движется «как целое» со скоростью \mathbf{v} . Исходя из требования конечности и положительности $n_B(\mathbf{p})$, сформулируйте критерий «способности» движущегося газа квазичастиц находиться в равновесии с термостатом. Что произойдет, если это условие нарушится? Как это условие связано с критериями Маха и Вавилова-Черенкова?

32. Вычислите гидродинамическую скорость звука $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ в слабонеидеальном вырожденном бозе-газе. Сравните ее с фазовой скоростью элементарных возбуждений конденсата $c = \sqrt{U_0 N / mV}$. Считайте, что при $T = 0$ в нулевом приближении по константе взаимодействия $U_0 \ll T_B V / N$ все частицы $N = N_0$ находятся в конденсате.
33. Элементарные возбуждения системы являются бозонами и имеют «спектр со щелью» $\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta + (p - p_0)^2 / 2m$, $\Delta \ll p_0^2 / 2m$. Оцените низкотемпературный $T \ll \Delta$ вклад этих квази-частиц в теплоемкость $C(T)$ и их равновесное число $N(T)$.
34. Элементарные возбуждения системы являются фермионами и имеют «спектр со щелью» $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2}$, $\Delta \ll p_F^2 / 2m$. Оцените низкотемпературный $T \ll \Delta$ вклад этих квази-частиц в теплоемкость $C(T)$ и их равновесное число $N(T)$.
35. Найдите зависимость критического тока сверхпроводника (тока распаривания) $j_c(T)$ от температуры T вблизи точки перехода T_c . Воспользуйтесь критерием сверхтекучести куперовских пар.
36. Вычислите температуру сверхпроводящего перехода T_c в модели БКШ. Константа связи λ , частота Дебая ω_D .
37. Вычислите величину энергетической щели сверхпроводника $\Delta(0)$ при нулевой температуре $T = 0$ в модели БКШ. Константа связи λ , частота Дебая ω_D .
38. Оцените теплоемкость сверхпроводника $C(T)$ при низких температурах $T \ll \Delta(0)$ в модели БКШ.
39. Вычислите величину магнитного поля $B(0)$ в центре абрикосовского вихря. Воспользуйтесь выражением для плотности сверхпроводящего тока j_s .
40. Вычислите теплоемкость слабонеидеального $U_0 \ll T_B V / N$ бозе-газа $C(T)$ при низких температурах $T \ll U_0 N / V \ll T_B$. Прокомментируйте условия на температуру и константу связи.
41. Вычислите величину магнитного потока Φ через абрикосовский вихрь. Получите выражение для кванта магнитного потока Φ_0 и вычислите его значение. Воспользуйтесь выражением для плотности сверхпроводящего тока j_s .
42. Получите критерий применимости теории Гинзбурга-Ландау. Выразите число Gi для сверхпроводника через температуру перехода T_c и энергию Ферми ε_F .

В. Экзаменационные вопросы

1. Принцип энтропии и основной термодинамический якобиан.
2. Принцип возрастания энтропии и минимальности термодинамических потенциалов F и Ω .
3. Принцип возрастания энтропии и условия термодинамического равновесия. Равновесие во внешнем поле.
4. Принцип возрастания энтропии и термодинамическая устойчивость вещества. Термодинамические неравенства.
5. Термодинамические потенциалы в магнитном поле. «Теорема о малых добавках».
6. Термодинамические потенциалы при переменном числе частиц. Химический потенциал μ , потенциал Гиббса Φ .
7. Условия равновесия фаз. Фазовые переходы первого и второго рода.
8. Эргодическая гипотеза. Метод ансамблей Гиббса.
9. Теорема Лиувилля. Микроканоническое распределение.
10. Число состояний, статистический вес и статистическая энтропия Больцмана.
11. Статистическая энтропия Гиббса. Ее экстремальность для распределения Гиббса.
12. Каноническое распределение Гиббса. Статистическая сумма Z и свободная энергия F . Распределение макроскопической системы по состояниям $\rho(E)$ и по энергии $w(E)$.
13. Большое каноническое распределение. Омега-потенциал. Флуктуация числа частиц $\overline{\Delta N^2}$ и энергии $\overline{\Delta E^2}$.

14. Равнораспределение энергии по степеням свободы больцмановского газа.
15. Химический потенциал больцмановского газа $\mu(T)$.
16. Условие равновесия химической реакции.
17. Ионизация. Формула Саха.
18. Неравновесная энтропия и Ω -потенциал идеальных бозе- и ферми-газа. Распределения Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака.
19. Зависимость химического потенциала идеального ферми- и бозе-газа от температуры.
20. Идеальный ферми-газ. Уравнение состояния и основные термодинамические величины.
21. Идеальный бозе-газ. Уравнение состояния и основные термодинамические величины.
22. Теплоемкость фононов и фотонов при низких температурах.
23. Теплоемкость электронов металла при низких температурах $T \ll \varepsilon_F$.
24. Теорема Бора – ван Леевен и ее физический смысл.
25. Парамагнетизм Паули.
26. Диамагнетизм Ландау.
27. Эффект де Гааза – ван Альфена (на примере двумерного электронного газа).
28. Спиновые волны в модели Гейзенберга. Теплоемкость $C(T)$ и намагниченность $M(T)$ магнетонов.
29. Теория фазовых переходов II рода (теория «среднего поля») в применении к ферромагнетику. Намагниченность $M(T)$, восприимчивость $\chi(T)$ и скачок теплоемкости $\Delta C(T_c)$.
30. Ферромагнитный переход в модели Гейзенберга в приближении «среднего поля». Температура Кюри T_c .
31. Принцип Больцмана для вероятности термодинамической флуктуации макроскопической системы. Флуктуации основных термодинамических величин.
32. Флуктуации параметра порядка. Критерий применимости теории «среднего поля». Число Леванюка Gi .
33. Гамильтониан взаимодействующих бозе- и ферми- частиц в представлении вторичного квантования.
34. Скорость боголюбовского звука в слабонеидеальном $U_0 \ll T_B V / N$ бозе-газе при нулевой температуре $T = 0$.
35. Критерий Ландау сверхтекучести. Устойчивость газа квазичастиц, движущегося как целое, по отношению к рождению новых квазичастиц. Связь с критериями Маха и Вавилова-Черенкова.
36. Микроскопическая теория сверхтекучести Боголюбова. Преобразования Боголюбова. Спектр возбуждений $\varepsilon(p)$.
37. Неустойчивость Купера в сверхпроводниках (уравнение Шредингера для куперовской пары). Энергия куперовской пары -2Δ .
38. Микроскопическая теория сверхпроводимости БКШ. Преобразования Боголюбова. Спектр возбуждений $\varepsilon(p)$.
39. Микроскопическая теория сверхпроводимости. Уравнение для щели $\Delta(T)$ в модели БКШ.
40. Функционал Гинзбурга – Ландау. Уравнение для комплексного параметра порядка $\psi(\mathbf{r})$. Размер куперовской пары.
41. Функционал Гинзбурга – Ландау. Уравнение для векторного потенциала $\mathcal{A}(\mathbf{r})$.
42. Уравнение Гинзбурга – Ландау для векторного потенциала $\mathcal{A}(\mathbf{r})$. Эффект Мейсснера. Спонтанное нарушение симметрии.
43. Длина когерентности $\xi(T)$ и лондоновская глубина проникновения магнитного поля $\lambda(T)$. Спонтанное нарушение симметрии.
44. Плотность сверхпроводящего тока j_s . Квантование магнитного потока Φ .
45. Вихрь Абрикосова. Верхнее \mathcal{H}_{c2} и нижнее \mathcal{H}_{c1} критические магнитные поля в сверхпроводниках II рода.

С. «ПРИНЦИП ПРОСТОТЫ»

Поскольку наша кафедра является лучшей из кафедр теоретической физики, экзаменационная оценка описывается вариационным принципом.

0. Допущенные к экзамену лектором (≥ 3 баллов «за семестр»), семинаристом (ДЗ 1 и 2) и деканатом получают билеты. Оценка выставляется исходя из «принципа простоты»:
 1. – Практически ничего - «неудовлетворительно» 0-2 проставляется в ведомость.
 2. Экзаменационная задача - «удовлетворительно» 3-4.
 3. + Экзаменационный вопрос - «хорошо» 5-7.
 4. + Экзаменационный вопрос - «отлично» 8-10.
5. Затем усредненная мнением экзаменатора оценка проставляется в ведомость. Она не может быть больше среднего арифметического баллов «за экзамен» и баллов «за семестр». А меньше – может.