ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ

Спасибо тебе, Господи, что ты создал все
нужное нетрудным, а все трудное – ненужным.
Григорий Саввич Сковорода, 1772

I. Динамические системы. Фазовая плоскость

$$\dot{x} = f(x, y),$$
$$\dot{y} = g(x, y).$$

Неподвижная (особая) точка

$$f(x_0, y_0) = 0,$$
$$g(x_0, y_0) = 0.$$

Матрица Якоби

$$J = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Инкремент отклонения от неподвижной точки

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}J}{2} \pm \sqrt{\frac{\mathrm{tr}J^2}{4} - \det J}.$$

Классификация особых точек:

$$\mathrm{Re}\lambda = 0, \quad \text{центр, бифуркация рождения цикла},$$
$$\mathrm{Re}\lambda < 0, \quad \text{устойчивый фокус},$$
$$\mathrm{Re}\lambda > 0, \quad \text{неустойчивый фокус},$$
$$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0, \quad \text{устойчивый узел},$$
$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0, \quad \text{неустойчивый узел},$$
$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0, \quad \text{седло}.$$

Изменение фазового объема $\Delta V = \Delta x \Delta y$. Локальная диссипация. Теорема Лиувилля

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{d(\Delta V)/dt}{\Delta V} = \mathrm{tr}J.$$

II. Нелинейный осциллятор

$$m\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0 \,.$$

Первый интеграл, период колебаний $(\gamma = 0)$:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E, \quad T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \,.$$

Вариация периода δT при возмущении потенциала $\delta U(x)$:

$$\delta T = -\sqrt{2m}\,\frac{\partial}{\partial E}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\delta U(x)dx}{\sqrt{E - U(x)}} = -\frac{\partial}{\partial E} T\langle \delta U \rangle \,.$$

Высшие поправки к δT по $\delta U(x)$:

$$\delta T = \sqrt{2m}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\partial^n}{\partial E^n}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{\delta U^n(x)dx}{\sqrt{E - U(x)}} \,.$$

III. Математический маятник. Неизохронность

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \,.$$

Период колебаний при $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \frac{x_0^2}{16}\right) \quad \text{при} \quad x_0 \ll 1 \,,$$

$$T = \frac{4}{\omega_0}\ln\frac{8}{\pi - x_0} \quad \text{при} \quad \pi - x_0 \ll 1 \,.$$

Движение по сепаратрисе

$$x(t) = -\pi + 4\operatorname{arctg} e^{-\omega_0 (t - t_0)} \,,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{\operatorname{ch}^2 \omega_0 (t - t_0)} \,.$$

IV. Линейный осциллятор. Резонанс

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \,.$$

Свободные затухающие колебания $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $f(t) = 0$:

$$x(t)=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_1}\right)^2}\,e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t+\varphi),\quad \mathrm{tg}\varphi=-\frac{v_0+\gamma x_0}{\omega_1 x_0}\,.$$

Добротность, частота

$$Q=\frac{\omega_1}{2\gamma},\quad Q\approx\frac{\omega_0}{2\gamma}\left(1-\frac{\gamma^2}{2\omega_0^2}\right),\quad \omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\,.$$

Спектр затухающих колебаний при $Q\gg 1$. Лоренцевская линия

$$|X(\omega)|^2\propto\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\,.$$

Нормальные колебания. Произвольная внешняя сила

$$a=x+\frac{\gamma+i\omega_1}{\omega_0^2}\dot{x},\quad a^*=x+\frac{\gamma-i\omega_1}{\omega_0^2}\dot{x}\,,$$

$$\frac{da}{dt}=-(\gamma+i\omega)a+\frac{\gamma+i\omega_1}{\omega_0^2}f(t)\,.$$

Неподвижный осциллятор $x(0)=\dot{x}(0)=0$. Функция Грина

$$x(t)=\frac{1}{\omega_1}\int_0^t e^{-\gamma(t-t')}\sin\omega_1(t-t')f(t')dt'\,.$$

Отклик на гармоническую силу. Резонанс

$$f(t)=f\cos\omega t,\quad x(t)=a\cos(\omega t+\varphi)=a(\omega)\sin\omega t+b(\omega)\cos\omega t\,,$$

$$a=\frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}},\quad \mathrm{tg}\varphi=\frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\,.$$

Амплитуды поглощения и дисперсии

$$a(\omega)=\frac{2\gamma\omega f}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2},\quad b(\omega)=\frac{(\omega_0^2-\omega^2)f}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\,.$$

Пик резонанса. Отклик при высокой добротности $Q\gg 1$:

$$\omega_2=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2},\quad |a(\omega)|^2\propto\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2}\,.$$

V. Осциллятор Дуффинга. Сдвиг частоты. Ангармонизм

Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x+\beta x^3=0\,.$$

Зависимость частоты от амплитуды ($\gamma = 0$):

$$\omega = \omega_0 + \frac{3}{8}\frac{\beta a^2}{\omega_0} + \ldots$$

Асимптотическое решение ($\gamma = 0$):

$$x(t) = a\sin\omega t - \frac{\beta a^3}{32}\sin 3\omega t + \ldots$$

VI. Нелинейный резонанс осциллятора Дуффинга

Осциллятор Дуффинга под действием гармонической силы

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f\cos\omega t .$$

Уравнение резонансной кривой $a = a(\omega)$:

$$\left(\frac{\gamma a}{2}\right)^2 + a^2\left(\omega - \omega_0 - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right)^2 = \frac{f^2}{4\omega_0^2} .$$

Частотный сдвиг пика резонанса

$$\omega_2 - \omega_0 = \frac{3\beta f^2}{8\gamma^2\omega_0^3} .$$

VII. Осциллятор Матье. Параметрический резонанс

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2(1 + \varepsilon\cos\omega t)x = 0 .$$

Правильное нулевое приближение вблизи первого резонанса ($\omega \approx 2\omega_0$):

$$x(t) = a(t)\cos\frac{\omega t}{2} + b(t)\sin\frac{\omega t}{2} .$$

Область неустойчивости вблизи первого резонанса

$$\delta^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)^2 .$$

Пороговое значение амплитуды модуляции

$$\varepsilon_{min} = \frac{4\gamma}{\omega_0} = \frac{2}{Q} .$$

VIII. Адиабатический инвариант осциллятора

Уравнение Хилла

$$\ddot{x} + \omega_0^2(t)x = 0 .$$

Медленное изменение частоты $\dot{\omega}_0 / \omega_0^2 \ll 1$:

$$\oint p dx = E(t) / \omega(t) = \text{const} .$$

IX. Осциллятор Капицы. Движение в быстро осциллирующем поле

$$m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x} = f(x)\cos\omega t ,$$

$$U_{\text{эфф}}(x) = U(x) + \frac{f^2(x)}{4m\omega^2} .$$

Устойчивость инвертированного маятника

$$\frac{a}{l}\frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2} .$$

X. Осциллятор Ван-дер-Поля. Автоколебания

Уравнения Ван-дер-Поля и Рэлея

$$\ddot{x} + (x^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0 ,$$

$$\ddot{x} + (\dot{x}^2 - \lambda)\dot{x} + x = 0 .$$

Эквивалентны с точностью до замены $x / \sqrt{3} \to \dot{x}$.
Радиус предельного цикла при квазигармонических ($\lambda \ll 1$) автоколебаниях

$$a = 2\sqrt{\lambda}, \qquad a = 2\sqrt{\lambda / 3} .$$

Период релаксационных ($\lambda \gg 1$) колебаний одинаков

$$T = \lambda(3 - 2\ln 2) .$$

XI. Синхронизация. Язык Арнольда

Уравнение Адлера, $\Delta = (\omega^2 - 1) / \lambda\omega$:

$$\dot{\varphi} = -\Delta + \varepsilon \sin\varphi .$$

Язык Арнольда, область синхронизации

$$-\varepsilon < \Delta < \varepsilon .$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВОЛН

I. Волновое уравнение

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ .$$

Решение д'Аламбера при $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\phi(x-ct) + \phi(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)dy \ .$$

II. Цепочка связанных осцилляторов

Закон дисперсии

$$\omega(k)^2 = \frac{4\kappa}{m}\sin^2(ka) + \omega_0^2 \ .$$

Уравнение Клейна–Гордона

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 u = 0 \ .$$

Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0 \ .$$

III. Вариационный принцип

1D-действие

$$S = \int dt \int dx \mathcal{L}(u, u_t, u_x, ...) \ .$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xt}} ... = 0 \ .$$

Нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \ .$$

IV. Резонаторы

Вариационный принцип Рэлея

$$(\omega / c)^2 = \min \frac{\int (\nabla u)^2 \, ds}{\int u^2 ds}.$$

Частоты круглой мембраны

$$\omega_{mn} = c\mu_{mn} / a, \quad J_n(\mu_{mn}) = 0.$$

V. Волноводы

Закон дисперсии

$$\omega = \sqrt{\omega_c^2 - k_x^2}.$$

Критическая частота. Масса фотона

$$\omega_c = m\pi c / a, \quad m_\text{ф} \approx \hbar / ca.$$

VI. Акустика и звук

Интенсивность звука

$$I = \frac{1}{2}\rho_0 a^2 \omega^2 c = \frac{p'^2}{2\rho_0 c}.$$

Закон Вебера–Фехнера

$$\Delta I / I \approx 10\%.$$

Громкость звука

$$\Gamma = 10 \lg(I / I_0) \partial\text{Б}, \quad I_0 = 10^{-12}\,\text{Вт/м}^2.$$

Вариация давления в звуковой волне

$$p' = \rho_0 c \omega a.$$

Адиабатический звук

$$c^2 = (\partial P / \partial \rho)_S.$$

Условие адиабатичности

$$\lambda c > \chi.$$

Акустический импеданс $z = \rho c$. Коэффициенты отражения и прохождения

$$R = \left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2, \quad T = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}.$$

VII. Эффект Доплера

Эффект Доплера в акустике и теории эфира

$$\frac{\omega_{\text{пр}}}{\omega_{\text{ист}}} = \frac{1+\mathbf{kv}_{\text{пр}}/ck}{1-\mathbf{kv}_{\text{ист}}/ck}, \quad \omega = ck\ .$$

Гравитационное красное смещение

$$\Delta\nu/\nu = \Delta\phi/c^2\,.$$

Релятивистский эффект Доплера и аберрация света

$$\omega = \frac{\omega' + vk\cos\theta'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad k\cos\theta = \frac{k'\cos\theta' + v\omega'/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,.$$

VIII. Конус Маха

Конус Маха, излучение Вавилова–Черенкова

$$\sin\theta = v/c\,.$$

Критерий сверхтекучести

$$v < \min_k \frac{\omega(k)}{k}\,.$$

IX. Волновой пакет

$$u(x,t) = \int v(k) e^{-i\omega(k)t+ikx}\frac{dk}{2\pi}\,.$$

Фазовая и групповая скорости. Время жизни волнового пакета

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}; \quad \tau \approx \left(\Delta k^2 \frac{d^2\omega}{dk^2}\right)^{-1}.$$

X. Температурные волны

$$T(x,t) = T_0\cos(\omega t - \sqrt{2\omega/\chi}\,x)\,.$$

Тепловой скин-эффект

$$\delta = \sqrt{2\chi/\omega}\,.$$

XI. Тепловая ударная волна

$$c(u)u_t = (k(u)u_x)_x + f(u)\,.$$

Режимы с обострением, нелинейное горение

$$\int_0^{u_0} \frac{k(u)du}{\sqrt{-U(u)}} < \infty, \quad \int_{u_0}^{\infty} \frac{c(u)du}{f(u)} < \infty, \quad U(u) = \int_0^u f(u)du \,.$$

XII. Бесстолкновительная среда

Уравнение Хопфа

$$u_t + uu_{xx} = 0 \,.$$

Общее решение задачи Коши $u(x,0) = u_0(x)$:

$$u(x,t) = u_0(x - u(x,t)t) \,.$$

Время образования ударных волн

$$\tau = (\max_x |\partial u_0 / \partial x|)^{-1} \,.$$

XIII. Гидродинамика

Уравнения 1D гидродинамики в эйлеровых переменных

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0,$$

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} .$$

Уравнения 1D-гидродинамики в лагранжевых переменных

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\rho_0 = \rho\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} .$$

XIV. Солитоны

Уравнение Кортевега–де Фриза, солитон

$$u_t + uu_{xx} + \beta u_{xxx} = 0 \,,$$

$$u(x,t) = 3v\,\mathrm{sech}^2\sqrt{\frac{v}{4\beta}}(x - vt)\,.$$

Уравнение синус-Гордона, кинк и антикинк

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \omega_0^2 \sin u = 0\,,$$

$$u(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\exp\left(\pm\frac{\omega_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}(x - vt)\right).$$

XV. Уравнение «реакция–диффузия»

$$u_t = u_{xx} + f(u,\beta)\,.$$

Градиентный вид

$$u_t = -\delta F / \delta u, \quad F[u] = \int [u_x^2 / 2 - U(u)]dx, \quad U(u) = \int_{u_1}^{u} f(u,\beta)du\,.$$

Вариационный принцип

$$dF / dt < 0\,.$$

Уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова

$$f(u,\beta) = u(1 - u)\,.$$

Уравнение Зельдовича–Франк-Каменецкого

$$f(u,\beta) = u(u - \beta)(u - 1)\,.$$

Скорость кинка, теорема равных площадей

$$v(\beta) = \frac{1 - 2\beta}{\sqrt{2}}, \quad \int_{u_1}^{u_3} f(u,\beta_p)du = 0\,.$$

Устойчивость кинка и домена. Уравнение в вариациях

$$\delta u(x,t) = \delta u(x)\exp(\lambda t) \text{ при } v = 0\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + v(x)\right)\delta u = \lambda\delta u, \quad v(x) = \frac{\partial f}{\partial u}[u_{\mathrm{k,d}}(x)]\,.$$

НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Важно не то, что строго,
а то, что верно.
А. Н. Колмогоров

Полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(x)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-x^2t^2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}},$$

$$K(x)\approx\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\text{ при } x\to 0,\quad K(x)\approx\ln\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\text{ при } x\to 1.$$

Ряд и интеграл Фурье

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}X_n e^{-i2\pi nt/T},\quad X_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}x(t)e^{i2\pi nt/T}dt,$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi},\quad X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{i\omega t}dt.$$

Интеграл Фурье в действительной форме

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}a(\omega)\sin(\omega t)d\omega+\int_{-\infty}^{+\infty}b(\omega)\cos(\omega t)d\omega,$$

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}x(t)\sin(\omega t)dt,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\cos(\omega t)dt.$$

Теоремы Планшереля и Парсеваля

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|X_n|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Формула Сохоцкого

$$\frac{1}{z-i0}=\mathcal{P}\frac{1}{z}+i\pi\delta(z).$$

3D-преобразование Фурье

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int e^{-i(\omega t-\mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{k},\omega)\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4},$$

$$\varphi(\mathbf{k},\omega)=\int e^{i(\omega t-\mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}dt,$$

$$2\pi\delta(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx .$$

Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0 .$$

Корни функции Бесселя $J_n(\mu_{n,m}) = 0$:

$$\mu_{0,1} = 2,4 ,\ \mu_{0,2} = 5,5 ,\ \mu_{1,1} = 3,8 ,$$

$$\mu_{1,2} = 7,0 ,\ \mu_{2,1} = 5,1 ,\ \mu_{2,2} = 8,4 .$$

Тригонометрия

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x) ,$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3) ,$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x) ,$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3) ,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n} dx = \int_0^{2\pi} \cos^{2n} dx = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} 2\pi ,$$

$$\mathrm{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) ,$$

$$2\mathrm{arctg}\ e^{\pm x} = \pm \arcsin \mathrm{th}\, x .$$

2D-формула Грина

$$\int (u\nabla^2 v + \nabla u \nabla v) dS = \oint u \nabla v d\mathbf{n} .$$