МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2015 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теоретическая физика**
по направлению подготовки:
010900 «Прикладные математика и физика»
факультет: **ФПФЭ**
кафедра: **теоретической физики**
курс: IV
семестр: 8
Трудоемкость: базовая часть – 3 зач. ед.
вариативная часть – 1 зач. ед.
по выбору студента – 1 зач. ед.

лекции – 32 часа — Экзамен – 8 семестр
практические (семинарские)
занятия – 32 часа — Зачет – нет
лабораторные занятия – нет
Самостоятельная работа – 2 часа в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ — 68

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф. А.А. Пухов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
26 ноября 2015 года

Заведующий кафедрой Ю.М. Белоусов

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

## I. ТЕРМОДИНАМИКА

Замкнутые системы. Термодинамические величины. Температура. Термодинамическое равновесие. Энтропия. Неравновесная энтропия и второй закон термодинамики. Термодинамические тождества и неравенства. Принцип минимальности термодинамических потенциалов. Термодинамические потенциалы в магнитном поле. Термодинамические флуктуации. Принцип Больцмана.

## II. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Макроскопические системы. Средние значения. Эргодическая гипотеза. Статистическая независимость и закон больших чисел. Термодинамический предел. Число состояний, плотность числа состояний. Статистическая энтропия Больцмана. Функция распределения и матрица плотности. Уравнение Лиувилля. Распределение Гиббса (канонический ансамбль). Эквивалентность канонического и микроканонического распределений в термодинамическом пределе. Флуктуация энергии в ансамбле Гиббса. Статистическая сумма. Основная формула статистической физики $F = -T\mathrm{lnZ}$. Информационная энтропия Гиббса. О законе возрастания энтропии как потере информации. Теорема Нернста. Представление чисел заполнения. Вторичное квантование бозе– и ферми-газа. Гамильтонианы идеальных газов в представлении чисел заполнения.

## III. ИДЕАЛЬНЫЕ ФЕРМИ- И БОЗЕ-ГАЗЫ

Больцмановский газ, вычисление его термодинамических величин. Ионизация и диссоциация. Большой канонический ансамбль. Температура вырождения. Идеальный ферми-газ. Химический потенциал, давление и теплоемкость электронов в металле. Парамагнетизм Паули. Диамагнетизм Ландау. Эффект де Гааза–ван Альфена. Идеальный бозе-газ. Бозе-конденсация, теплоемкость, уравнение состояния бозе-газа. Концепция квазичастиц. Фотоны и фононы. Химический потенциал, давление и теплоемкость черного излучения и твердого тела.

## IV. НИЗКОТЕМПЕРАТУРНЫЕ СВОЙСТВА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД

Микроскопическая теория ферромагнетизма в приближении самосогласованного поля. Гамильтониан Гейзенберга. Магноны. Закон

Блоха. Микроскопическая теория сверхтекучести неидеального бозе-газа. Преобразование Боголюбова. Элементарные возбуждения. Критерий сверхтекучести Ландау. Микроскопическая теория сверхпроводимости неидеального ферми-газа. Гамильтониан БКШ. Неустойчивость Купера. Энергетическая щель. Термодинамика сверхпроводника, скачок теплоемкости. Теория Гинзбурга–Ландау. Сверхпроводящий ток. Уравнение Лондонов. Эффект Мейсснера. Сверхпроводники I и II рода. Вихри Абрикосова. Верхнее и нижнее критические магнитные поля. Квантование магнитного потока. Эффект Джозефсона.

## V. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

Условия равновесия фаз. Химическое равновесие. Формула Саха. Фазовые переходы I и II рода. Изменение симметрии фазы. Параметр порядка. Теория фазовых переходов II рода (теория «среднего поля») в применении к ферромагнетику и сверхпроводнику. Флуктуации параметра порядка и корреляционная длина. Флуктуационная теплоемкость. Критерий применимости теории теории «среднего поля». Масштабная инвариантность. Критические индексы.

# Литература


1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. – М.: Физматлит, 2002.
2. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Часть 2. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2012.
4. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2009.
5. *Зайцев Р.О., Михайлова Ю.В.* Метод вторичного квантования для систем многих частиц: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2008.
6. *Горелкин В.Н.* Методы теоретической физики. Часть 2. Статистическая физика и физическая кинетика: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 2010.
7. *Зайцев Р.О.* Введение в современную статистическую физику. – М.: Едиториал УРСС, 2005.
8. *Максимов Л.А., Михеенков А.В, Полищук И.Я.* Лекции по статистической физике: Уч. пос. – М.: МФТИ, 2011.

9. *Садовский М.В.* Лекции по статистической физике. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.
10. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. – М.: Изд. МГУ, 1986.
11. *Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. – М.: Наука, 1977.
12. *Коткин Г.Л.* Лекции по статистической физике. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.
13. *Кубо Р.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1967.
14. *Хуанг К.* Статистическая механика. – М.: Мир, 1966.
15. *Исихара А.* Статистическая физика. – М.: Мир, 1973.
16. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 2. – М.: Едиториал УРСС, 2002.
17. *Кондратьев А.С., Райгородский И.П.* Задачи по термодинамике, статистической физике и кинетической теории. – М.: Физматлит, 2007.
18. *Кондратьев А.С., Романов В.П.* Задачи по статистической физике. – М.: Наука, 1992
19. *Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н.* Задачи по термодинамике и статистической физике. – М.: Высшая школа, 1996.
20. *Беляев С.Т., Бычков Ю.А., Гордюнин С.А. и др.* Теория конденсированного состояния: учеб. пособие. – М.: МФТИ, 1982.
21. *Брандт Н.Б., Кульбачинский В.А.* Квазичастицы в физике конденсированного состояния. – М.: Физматлит, 2005.
22. *Шмидт В.В.* Введение в физику сверхпроводников. – М.: МЦНМО, 2000.

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОНЯТИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## I. Основы термодинамики

Термодинамические потенциалы

$$\begin{aligned}
dE &= TdS - PdV + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},\\
dW &= TdS + VdP + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},\\
dF &= -SdT - PdV + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},\\
d\Phi &= -SdT + VdP + \mu dN - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},\\
d\Omega &= -SdT - PdV - Nd\mu - \mathcal{M}d\mathcal{H} - \mathcal{P}d\mathcal{E},
\end{aligned}$$

$$C_{V;P} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V;P}, \ \Phi = \mu N, \quad \Omega = -PV.$$

Термодинамические неравенства

$$C_V > 0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, \quad \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial \mathcal{H}}\right)_T > 0.$$

Флуктуации, принцип Больцмана

$$w(\chi) \sim \exp\left\{S_{\text{п}}(\chi) - S_{\text{п}}(\overline{\chi})\right\} = e^{-\Delta\Omega/T},$$

$$w \sim \exp\left\{-\frac{1}{2T}(\Delta S\Delta T - \Delta P\Delta V + \Delta\mu\Delta N)\right\},$$

$$\overline{\Delta T^2} = \frac{T^2}{C_V}, \quad \overline{\Delta V^2} = -T\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \overline{\Delta N^2} = -\frac{TN^2}{V^2}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

Термодинамические соотношения

$$\partial(TS) = \partial(PV), \quad \partial(E\chi) = T\partial(S\chi) - P\partial(V\chi),$$

$$\partial(SV) = \frac{C_V}{T}\partial(TV), \quad \partial(SP) = \frac{C_P}{T}\partial(TP).$$

## II. Равновесие фаз и фазовые переходы

Равновесие двух подсистем. Фазовое равновесие.

$$T_1 = T_2, \quad P_1 = P_2, \quad \mu_1 = \mu_2.$$

Химическое равновесие, формула Саха

$$\sum_i \nu_i\mu_i = 0, \quad \frac{C_a}{C_iC_e} = n\frac{g_a}{g_eg_i}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{3/2} e^{J/T}.$$

Уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}, \quad P \approx AT^{s_1}.$$

Теория «среднего поля» фазовых переходов II рода

$$\Omega = \Omega_0 + \int d^{\mathcal{D}}\mathbf{r}\left[\alpha\eta^2 + \frac{b}{2}\eta^4 + c(\nabla\eta)^2 - \eta h\right], \ \alpha = a(T - T_c), \quad a, b, c > 0,$$

$$\eta_0^2 = \begin{cases} -\alpha/b, & T < T_c, \\ 0, & T > T_c. \end{cases} \quad \Delta C = \frac{a^2}{b}T_c.$$

Флуктуации параметра порядка, восприимчивость

$$\overline{\Delta\eta^2} = T_c \chi \xi^{-3}(T), \quad \chi = \begin{cases} V/(2\alpha), & T > T_c \\ -V/(4\alpha), & T < T_c. \end{cases}$$

Корреляционный радиус флуктуаций $\xi(T) = (c/\alpha)^{1/2} \sim |T - T_c|^{-1/2}$.
Флуктуационная теплоемкость $\Delta C_{\text{ф}} \sim |T - T_c|^{-1/2}$.
Критерий применимости теории «среднего поля», число Леванюка

$$T_c b^2/ac^3 \ll 1.$$

## III. Основные соотношения

Энтропия Больцмана и Гиббса

$$S = \ln \Delta\Gamma = -\sum_n \rho_n \ln \rho_n.$$

Распределение Гиббса по состояниям и по энергиям

$$\rho_n = \rho(E_n) = e^{\frac{F - E_n}{T}}, \quad w(E) = \rho(E) \frac{\partial \Gamma}{\partial E}.$$

Статистическая сумма

$$F = -T \ln Z, \quad Z = \sum_n e^{-E_n/T}.$$

Схема вычислений

$$(E_n, \hat{H}) \to Z \to F(T, V, N) \to (S, P, \mu).$$

Распределение с переменным числом частиц

$$\rho_{nN} = e^{\frac{\Omega + \mu N - E_{nN}}{T}}, \quad \Omega = -T \ln \Xi, \quad \Xi = \sum_{n,N} e^{\frac{\mu N - E_{nN}}{T}}.$$

## IV. Матрица плотности

$$\langle n \mid \hat{\rho} \mid m \rangle = \sum_\alpha c(n, \alpha, t) c^*(m, \alpha, t), \quad \mid \psi \rangle = \sum_{n,\alpha} c(n, \alpha, t) \mid n \rangle \mid \alpha \rangle.$$

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{n,m} \langle m \mid \hat{A} \mid n \rangle \langle n \mid \hat{\rho} \mid m \rangle = \operatorname{Sp} \hat{A} \hat{\rho},$$

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^+, \quad \operatorname{Sp} \hat{\rho} = 1, \quad \langle n \mid \hat{\rho} \mid n \rangle = \rho_n > 0.$$

Для чистого состояния $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.
Уравнение Лиувилля–фон Неймана, равновесная матрица плотности

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \left[\hat{H}, \hat{\rho}\right], \qquad \hat{\rho}_0 = \exp\left(\frac{\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}\right).$$

## V. Представление чисел заполнения

Вторичное квантование бозонов

$$\langle \ldots, n_p - 1, \ldots | \hat{a}_p | \ldots, n_p, \ldots \rangle = \\ = \langle \ldots, n_p, \ldots | \hat{a}_p^+ | \ldots, n_p - 1, \ldots \rangle = \sqrt{n_p},$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+] = 0, \quad [\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+] = \delta_{pp'}.$$

Вторичное квантование фермионов

$$\langle \ldots, 0_p, \ldots | \hat{a}_p | \ldots, 1_p, \ldots \rangle = \langle \ldots, 1_p, \ldots | \hat{a}_p^+ | \ldots, 0_p, \ldots \rangle = \pm 1,$$

$$\{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}\} = \{\hat{a}_p^+, \hat{a}_{p'}^+\} = 0, \quad \{\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}^+\} = \delta_{pp'}.$$

Координатное представление

$$\hat{\psi}(x) = \sum_p \psi_p(x) \hat{a}_p, \quad \hat{\psi}^+(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \psi_p^*(x),$$

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} = 0, \quad \{\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^+(x')\} = 0, \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')\} = \delta(x - x'),$$

$$\hat{N} = \int dx \hat{\psi}^+(x') \hat{\psi}(x) = \sum_p \hat{a}_p^+ \hat{a}_p.$$

$$\hat{T} = \int dx \hat{\psi}^+(x) \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{\psi}(x) = \sum_p \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p,$$

$$\hat{U} = \int dx \hat{\psi}^+(x) U(x) \hat{\psi}(x) = \sum_{p\,p'} U_{pp'} \hat{a}_p^+ \hat{a}_{p'},$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 \hat{\psi}^+(x_1) \hat{\psi}^+(x_2) V(x_1 - x_2) \hat{\psi}(x_2) \hat{\psi}(x_1) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{p_1 + p_2 = p_1' + p_2'} V_{p_2' p_1' p_2 p_1} \hat{a}_{p_1'}^+ \hat{a}_{p_2'}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}.$$

## VI. Идеальные газы

Больцмановский газ

$$F = -NT \ln \frac{ez_1}{N}, \quad z_1 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}(2\pi mT)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T},$$

$$\mu = -T \ln \left\{ \frac{V}{N} \left( \frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_k e^{-\varepsilon_k/T} \right\} \sim -T \ln T.$$

Ферми-газ

$$p = (\mathbf{p}, \sigma), \quad p_i = \frac{2\pi\hbar}{L} n_i, \quad V = L^3, \quad \sigma = \pm 1,$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p},\,\sigma} \varepsilon_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}, \quad \varepsilon_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m},$$

$$\sum_{\mathbf{p},\,\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma} = 2 \int \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} n(\varepsilon_{\mathbf{p}}) = V \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) n(\varepsilon),$$

плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = \frac{2^{1/2} m^{3/2} \varepsilon^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3},\ \nu(\varepsilon_F) = \nu_F = \frac{3}{2\varepsilon_F} \frac{N}{V},$$

$$\Omega = -T \sum_k \ln \left( 1 + e^{(\mu - \varepsilon_k)/T} \right),$$

$$\langle \hat{a}^+_{\mathbf{p}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \rangle = \overline{n}_p = \left( 1 + e^{(\varepsilon_p - \mu)/T} \right)^{-1}, \quad PV = \frac{2}{3} E,$$

$N = \sum_p \overline{n}_p$ — уравнение, задающее $\mu = \mu(T)$; при $T = 0$

$$\mu = \varepsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}, \quad N = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad E = \frac{3}{5} \varepsilon_F N.$$

Условие вырождения $T \ll \varepsilon_F$, теплоемкость $C_V \sim NT/\varepsilon_F$.
Магнетон Бора $\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} \approx 10^{-20}$ эрг/Гс.
Парамагнетизм Паули

$$\chi_P = \frac{3}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu_B^2, \quad \text{при} \quad T \ll \varepsilon_F; \qquad \chi_P = \frac{\mu_B^2 N}{T}, \quad \text{при} \quad T \gg \varepsilon_F.$$

Диамагнетизм Ландау

$$\chi_L = -\frac{1}{2} \frac{N}{\varepsilon_F} \mu_B^2, \quad \text{при} \quad T \ll \varepsilon_F; \qquad \chi_L = -\frac{1}{3} \frac{N}{T} \mu_B^2, \quad \text{при} \quad T \gg \varepsilon_F.$$

Бозе-газ

$$\Omega = T \sum_k \ln\left(1 - e^{(\mu-\varepsilon_k)/T}\right),$$

$$\langle \hat a^+_{\mathbf p} \hat a_{\mathbf p}\rangle = \overline{n}_p = \left(\mathrm{e}^{(\varepsilon_p-\mu)/T} - 1\right)^{-1}, \qquad \mu < 0.$$

Бозе-конденсация

$$N_0 = N\left(1 - \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\right), \quad T_B \sim \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}, \quad C_V \sim N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}.$$

Фононы

$$\hat H = \sum_{\mathbf k\lambda} \hbar\omega_{\mathbf k\lambda}\left(\hat b^+_{\mathbf k\lambda}\hat b_{\mathbf k\lambda} + \frac{1}{2}\right), \quad \overline{n}_{\mathbf k\lambda} = \langle b^+_{\mathbf k\lambda}\hat b_{\mathbf k\lambda}\rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega_{\mathbf k\lambda}/T} - 1}, \quad \mu = 0,$$

$$\omega^2_{\mathbf k\lambda} = c^2_\lambda \mathbf k^2, \quad c_{1,2} = c_t, \quad c_3 = c_l, \quad \sum_{\mathbf k\lambda} 1 = \int_0^{\omega_D} g(\omega)d\omega = 3N.$$

Плотность состояний, температура Дебая

$$g(\omega) = \frac{3\omega^2}{2\pi^2\overline{c}^3}, \qquad \Theta_D = \hbar\omega_D = \hbar\overline{c}k_D, \qquad 3\overline{c}^{-3} = 2c_t^{-3} + c_l^{-3}.$$

Теплоемкость решетки, законы Дебая и Дюлонга-Пти

$$C_V = \begin{cases} \dfrac{12N\pi^4}{5}\left(\dfrac{T}{\Theta_D}\right)^3, & T \ll \Theta_D, \\ 3N, & T > \Theta_D. \end{cases}$$

Среднеквадратичное отклонение атома от положения равновесия

$$\langle \mathbf u^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\begin{cases} 1/\Theta_D + \mathrm{const}\frac{T^2}{\Theta_D^3}, & T \ll \Theta_D\,, \\ T/\Theta_D^2, & T \geq \Theta_D\,. \end{cases}$$

Критерий плавления Линдемана

$$\langle \mathbf u^2\rangle \approx 0{,}1\,(V/N)^{1/3}.$$

## VII. Микроскопическая теория ферромагнетизма

Гамильтониан Гейзенберга

$$\hat H = -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{R_1}\neq\mathbf{R_2}} J(\mathbf{R_1} - \mathbf{R_2})\hat{\mathbf S}_{\mathbf{R_1}}\hat{\mathbf S}_{\mathbf{R_2}} - 2\mu_B \mathbf B \sum_{\mathbf R}\hat{\mathbf S}_{\mathbf R},$$

$$T_c = \frac{1}{3}S(S+1)zJ, \quad J_{\mathbf q} = \sum_{\mathbf R} J(\mathbf R)e^{-\mathbf{qR}}, \quad J_0 = zJ.$$

Спектр и масса магнонов

$$\hbar\omega(q) = 2\mu_B B + (J_0 - J_{\mathbf{q}})S, \quad m^* = \frac{\hbar^2}{2JSa^2}.$$

Закон Блоха для спиновых волн

$$C(T) \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}, \quad [\mathcal{M}(0) - \mathcal{M}(T)] \sim \left(\frac{T}{J_0}\right)^{3/2}.$$

## VIII. Микроскопическая теория сверхтекучести

Гамильтониан неидеального бозе-газа при $T = 0$

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu\right) \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{a}^+_{\mathbf{p}} \hat{a}^+_{\mathbf{p}'} \hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}'}.$$

Преобразования Боголюбова

$$\hat{a}^+_0 \approx \hat{a}_0 \approx \sqrt{N_0}, \quad \hat{a}^+_{\mathbf{p}} = u_p \hat{b}^+_{\mathbf{p}} + v_p \hat{b}_{-\mathbf{p}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}} = u_p \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_p \hat{b}^+_{-\mathbf{p}},$$

где $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц со спектром возбуждений

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} - g\frac{N}{V}\right)^2 - \left(g\frac{N}{V}\right)^2} \approx cp \quad \text{при} \quad p \to 0,$$

$g$ — фурье-образ парного потенциала при $q \ll \hbar/a$.
Скорость боголюбовского звука

$$c = \sqrt{\frac{gN}{mV}}.$$

Критерий сверхтекучести Ландау

$$v < v_c = \min \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{p}}}{p}.$$

## IX. Микроскопическая теория сверхпроводимости

Гамильтониан неидеального ферми-газа БКШ

$$\hat{H} - \mu\hat{N} = \sum_{\mathbf{p},\sigma} \xi_p \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} \hat{a}^+_{\mathbf{p},\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \hat{a}^+_{\mathbf{p}\uparrow} \hat{a}^+_{-\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{p}'\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{p}'\uparrow}.$$

Преобразования Боголюбова

$$\hat{a}^+_{\mathbf{p},\sigma} = u_p \hat{\alpha}^+_{\mathbf{p},\sigma} + \sigma v_p \hat{\alpha}_{-\mathbf{p},-\sigma}, \qquad \hat{a}_{\mathbf{p},\sigma} = u_p \hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma} + \sigma v_p \hat{\alpha}^+_{-\mathbf{p},-\sigma},$$

где $\hat{\alpha}^+_{\mathbf{p},\sigma}$ и $\hat{\alpha}_{\mathbf{p},\sigma}$ — операторы рождения и уничтожения квазичастиц с энергетическим спектром

$$\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}, \quad \xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu = v_F(|\mathbf{p}| - p_F),$$

$g$ — константа взаимодействия электронов вблизи поверхности Ферми $|\xi_p| < \hbar\omega_D$. При $T = 0$

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\nu_F}\right),$$

при $T \simeq T_c$

$$\Delta = \left[\frac{8\pi^2 T_c(T_c - T)}{7\zeta(3)}\right]^{1/2},$$

где $\pi T_c = \gamma\Delta_0$, $\nu_F = \frac{m p_F}{2\pi^2\hbar^2}$, $\gamma \approx 1.78$ — постоянная Эйлера.

## X. Теория сверхпроводимости Гинзбурга–Ландау

Функционал Гинзбурга–Ландау

$$\Omega_s = \Omega_n + \int \left\{ \alpha|\psi|^2 + \frac{b}{2}|\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{4m}\left|\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)\psi\right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right\} dV,$$

$$\alpha = a(T - T_c), \quad a > 0, \quad b > 0, \quad |T - T_c| \ll T_c,$$

$$|\psi_0|^2 = \frac{n_s}{2} = -\frac{\alpha}{b} \quad \text{при} \quad T < T_c.$$

Уравнения Гинзбурга–Ландау

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2 \psi + a\psi + b\psi^3 = 0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_s, \quad \mathbf{j}_s = \frac{e\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{2e^2}{mc}|\psi|^2\mathbf{A}.$$

Плотность сверхпроводящего тока

$$\psi = |\psi|e^{i\varphi}, \quad \mathbf{j}_s = \frac{c|\psi/\psi_0|^2}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\varphi - \mathbf{A}\right).$$

Квантование потока

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2.$$

Глубина проникновения, длина когерентности

$$\lambda^2 = \frac{mc^2 b}{8\pi e^2 |a|}, \quad \xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m|a|}, \quad \xi, \lambda \backsim (T_c - T)^{-1/2}.$$

Критические магнитные поля

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln\frac{\lambda}{\xi}, \quad H_c = \frac{1}{2^{3/2}\pi}\frac{\Phi_0}{\lambda\xi}, \quad H_{c2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\Phi_0}{\xi^2}.$$

Критерий применимости теории $(T_c/\varepsilon_F)^4 \ll 1$.

# ФОРМУЛЫ, ИЗВЕСТНЫЕ ИЗ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ КУРСОВ

Якобианы

$$\frac{\partial(AB)}{\partial(xy)} = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)_x - \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)_y, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial(Ay)}{\partial(xy)},$$

$$\partial(AB) = -\partial(BA), \quad \partial(AB)\partial(CD) = \partial(CD)\partial(AB),$$

$$\partial(AB)\partial(CD) = \partial(AC)\partial(BD) - \partial(AD)\partial(BC).$$

Факториал

$$N! = \int_0^\infty x^N e^{-x}\,dx, \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \left(\frac{3}{2}\right)! = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Формула Стирлинга

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{12N} + \ldots\right).$$

Объем и поверхность $N$-мерной сферы единичного радиуса

$$V_N = \frac{\pi^{N/2}}{(N/2)!}, \quad S_N = NV_N.$$

Бозе- и ферми-интегралы

$$\int_0^\infty \frac{x^{n-1}\,dx}{e^x \mp 1} = (n-1)!\zeta(n)\begin{cases}1,\\ 1 - 2^{1-n}.\end{cases}$$

Дзета-функция Римана

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1{,}20, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(3/2) = 2{,}61, \quad \zeta(5/2) = 1{,}34.$$

Формула суммирования Эйлера–Маклорена для медленно меняющихся функций

$$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} F(x)dx + \frac{1}{24}F'(0).$$

Формула Сохоцкого

$$\frac{1}{z - i0} = \mathcal{P}\frac{1}{z} + i\pi\delta(z).$$

Преобразование Фурье

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int e^{-i(\omega t - \mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{k}, \omega)\frac{d\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^4},$$

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}\varphi(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}dt.$$

Шпуры

$$\mathrm{Sp}\,\hat{A} = \sum_n A_{nn}, \quad \mathrm{Sp}\,\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \mathrm{Sp}\,\hat{B}\hat{C}\hat{A} = \mathrm{Sp}\,\hat{C}\hat{A}\hat{B},$$

$$\mathrm{Sp}\,\hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] = \mathrm{Sp}\,\hat{C}[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{Sp}\,\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

Теорема Гельмана–Фейнмана

$$\left\langle n \right| \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \left| n \right\rangle = \frac{\partial E_n}{\partial \lambda}, \quad \left\langle\!\!\left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}\right)_{T,V,\mu}.$$

Эффект Зеемана в слабом магнитном поле

$$E_m = -\mu_B g_J M,\ M \text{ — проекция полного момента } J \text{ на ось } z,$$

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \text{ — фактор Ланде.}$$

Уровни Ландау в однородном магнитном поле и кратность их вырождения

$$E_n = 2\mu_B B\left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad \Delta g = \frac{e}{c}\frac{BL_xL_yL_z}{(2\pi\hbar)^2}\Delta p_z.$$

# ЗАДАЧИ

## Первое задание

1. $^{c}$**Двухуровневые атомы.** Определить энтропию $S$ и температуру $T$ газа $N$ невзаимодействующих двухуровневых атомов (разность энергий уровней $\varepsilon$) при заданной энергии $E$. Показать, что $T$ может быть отрицательной. Что произойдет, если две такие одинаковые системы с $T_1 < 0$ и $T_2 > 0$ привести в тепловой контакт? Вычислить температурную зависимость теплоемкости газа $C(T)$. Найти характерные температуру $T_*$ и ширину $\Delta T_*$ пика теплоемкости (аномалия Шоттки) в случае сильного вырождения верхнего уровня $\ln g \gg 1$. (2)

2. **Осцилляторы.** Определить энтропию $S$ и температуру $T$ газа $N$ невзаимодействующих осцилляторов (разность энергий уровней $\hbar\omega$) с энергией $E$. Обсудить отличие температурного поведения теплоемкости системы $C(T)$ от предыдущей задачи. Сравнить низкотемпературное ($T \ll \hbar\omega$) поведение $C(T)$ с предыдущей задачей. (1)

3. $^{c}$**Парамагнитный газ.** Газ атомов с моментом $J$, спином $S$ и орбитальным моментом $L$ помещен в слабое магнитное поле $B$, температура и расщепление в магнитном поле малы по сравнению с интервалом тонкой структуры. Найти свободную энергию, вычислить $\chi$ и исследовать случаи расщепления в магнитном поле $\gg T$ и расщепления в магнитном поле $\ll T$. (1)

4. **Адиабатическое размагничивание.** Вычислить величину магнитокалорического эффекта $(\partial T/\partial \mathcal{H})_S$ для парамагнетика с магнитной восприимчивостью $\chi = A/T$ и теплоемкостью $C_{\mathcal{H}} = B\,T^3$. Каков знак эффекта? Предсказать величину охлаждения $\Delta T$ парамагнетика при адиабатическом размагничивании от $\mathcal{H}_0$ до нуля при $T \to 0$. Оценить предельную температуру, до которой можно охладить электронные, ядерные спины. (1)

5. $^{c}$**Ионизация a $\rightleftarrows$ i + e.** Найти температурную зависимость степени ионизации $\alpha\,(T)$ одноатомного идеального больцмановского газа (формула Саха) с энергией ионизации $I$. Определить характерную температуру $T_I$, выше которой газ существенно ионизирован. Учитывая, что температура вырождения газа $T_{\text{выр}} = \hbar^2\,(N/V)^{2/3}/m$ крайне мала $\ln I/T_{\text{выр}} \gg 1$, определить соотношение между $T_I$ и $I$. (2)

6. ᶜ**Статистическая физика резины.** Макромолекула резины состоит из $N \gg 1$ звеньев длины $a$, которые могут свободно располагаться вдоль или против линии молекулы. Вычислить энтропию $S\,(x)$ макромолекулы с длиной $0 < x < Na$. При заданной температуре $T$ длина молекулы $x$ поддерживается силой натяжения $f$. Поскольку звенья поворачиваются свободно, внутренняя энергия молекулы $E(x)$ не зависит от $x$, и $f$ определяется только энтропийной частью свободной энергии $F(x)$. Найти зависимость $f$ от $x$, в линейном приближении $x \ll Na$ получить закон Гука для молекулы. Объяснить высокую эластичность резины при $N \to \infty$ и эффект Гуха–Джоуля: при нагревании резинового жгута, на который подвешен грузик, он будет подниматься или опускаться? (2)

7. **Изохоры, изобары, изотермы.** Построить изохоры, изобары, изотермы и нарисовать температурную зависимость химического потенциала для идеальных бозе- и ферми-газов. (3)

8. **2D бозе- и ферми-газы.** Вычислить теплоемкость двумерного вырожденного идеального бозе-газа (ферми-газа). (2)

9. **Комикс теплоемкостей.** Сравнить низкотемпературное поведение теплоемкостей идеальных бозе- и ферми-газов, черного излучения и твердого тела, парамагнетика и ферромагнетика, неидеального бозе-газа и, наконец, сверхпроводника. (2)

10. ᶜ**Парамагнетизм Паули.** Найти спиновую магнитную восприимчивость вырожденного электронного газа при $\mu_B B \ll \varepsilon_F$. Найти поправку к этой формуле для низких температур $T \ll \varepsilon_F$. (1)

11. ᶜ**Диамагнетизм Ландау.** Вычислить диамагнитную восприимчивость газа свободных электронов в классическом $T \gg \varepsilon_F$ и квантовом $\varepsilon_F \gg T \gg \mu_B B$ пределах. (1)

12. ᶜ**Эффект де Гааза–ван Альфена.** Рассмотреть осцилляции магнитного момента двумерного вырожденного электронного газа в квантующем магнитном поле $\varepsilon_F \gg \mu_B B > T$. Объяснить связь периода осцилляций с площадью сечения поверхности Ферми. (2)

13. ᶜ**Представление Мацубары.** Используя операторы рождения и уничтожения в представлении

$$\hat{a}(\tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{a} e^{-\tau \hat{H}}, \quad \hat{a}^{+}(\tau) = e^{\tau \hat{H}} \hat{a}^{+} e^{-\tau \hat{H}},$$

где $\hat{H} = \sum\limits_{\mathbf{p},\sigma}(\varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu)\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}$, мнимое время $\tau = 1/T$, найти ферми- и бозе-распределения

$$n_{\mathbf{p}\sigma} = \left\langle \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma} \right\rangle = \frac{\mathrm{Sp}\left(e^{-\tau\hat{H}}\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}\sigma}\hat{a}_{\mathbf{p}\sigma}\right)}{\mathrm{Sp}\left(e^{-\tau\hat{H}}\right)}. \quad (1)$$

### Второе задание

14. **Фактор Дебая–Уоллера.** Используя представление оператора смещения гармонического осциллятора $\hat{\mathrm{x}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}^{+} + \hat{a})$, получить для равновесного случая $\langle \hat{a}^{+}\hat{a} \rangle = (e^{\frac{\hbar\omega}{T}} - 1)^{-1}$ формулу

$$\langle e^{ik\hat{\mathrm{x}}} \rangle = \exp\left(-\frac{k^2\hbar}{4m\omega}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\right).$$

Показать, что при $T = 0$ она переходит в выражение $\langle 0|e^{ikx}|0\rangle$ для амплитуды эффекта Мессбауэра. (2)

15. $^{c}$**Флуктуации.** Используя принцип Больцмана, найти флуктуации $\overline{\Delta E^2}$, $\overline{\Delta N^2}$, $\overline{\Delta S^2}$, $\overline{\Delta P^2}$, $\overline{\Delta S\Delta P}$, $\overline{\Delta V\Delta P}$, $\overline{\Delta S\Delta T}$, $\overline{\Delta T^2}$, $\overline{\Delta V^2}$, $\overline{\Delta T\Delta V}$, $\overline{\Delta T\Delta P}$, $\overline{\Delta S\Delta V}$. (2)

16. $^{c}$**Гармоническая ловушка.** Найти температуру конденсации $T_B$ (энергию Ферми $\varepsilon_F$) идеального бозе-газа (ферми-газа), находящегося в гармонической ловушке $U(\mathbf{r}) = m\omega^2 r^2/2$. Вычислить теплоемкость газа и долю конденсатных частиц при $T < T_B$. Какова точность Вашего расчета? (2)

17. **Модель Изинга.** Система $N$ изинговых спинов $\sigma_i = \pm 1$ образует кольцо $\sigma_{N+1} = \sigma_N$ с гамильтонианом

$$H = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \mu_B g B\sum_{i=1}^{N}\sigma_i.$$

Показать, что при $B = 0$ точным выражением для свободной энергии системы является формула $F = NT\ln\left(2\operatorname{ch}\frac{J}{T}\right)$. Найти теплоемкость и магнитную восприимчивость при $N \gg 1$. Объяснить причину отсутствия фазового перехода. (3)

18. $^{c}$**Модель Гейзенберга.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга в приближении самосогласованного поля определить температуру Кюри $T_c$, температурную зависимость магнитной восприимчивости $\chi$ и спонтанной намагниченности $\mathbf{M}$ вблизи $T_c$. (1)

19. **Закон Блоха.** Для ферромагнетика в модели Гейзенберга при $T \ll T_c$ определить спектр возбуждений (магнонов) и найти температурную зависимость намагниченности и теплоемкости спиновых волн. (2)

20. **Фотоны и фононы.** Найти равновесную плотность и теплоемкость акустических фононов в кристалле при температурах выше $T \gg \Theta_D$ и ниже $T \ll \Theta_D$ дебаевской. Сравнить с равновесной плотностью и теплоемкостью фотонов. (1)

21. **Боголюбовский звук.** Показать, что фазовая скорость элементарных возбуждений конденсата неидеального бозе-газа равна гидродинамической скорости звука в нем. (2)

22. $^{\text{c}}$**«Истощение» конденсата.** Найти распределение частиц по импульсам и полное число надконденсатных частиц в неидеальном бозе-газе при низких температурах. (1)

23. $^{\text{c}}$**Модель БКШ.** Определить скачок теплоемкости при $T = T_c$ и плотность сверхпроводящих электронов $n_s(T)$ в предельных случаях $T \ll T_c$ и $T \lesssim T_c$. (2)

24. $^{\text{c}}$**Эффект Мейсснера. Квантование потока.** Из функционала Гинзбурга–Ландау получить выражение для плотности сверхпроводящего тока в магнитном поле, уравнение Лондонов и условие квантования магнитного потока в сверхпроводящем кольце. (3)

25. $^{\text{c}}$**Абрикосовский вихрь.** Используя уравнения Гинзбурга–Ландау, найти верхнее $H_{c2}$ и нижнее $H_{c1}$ критические магнитные поля для сверхпроводника II рода. Сравнить с термодинамическим критическим магнитным полем $H_c$. (1)

26. $^{\text{c}}$**Флуктуационная теплоемкость.** Определить корреляционный радиус флуктуации параметра порядка в нулевом внешнем поле вблизи точки фазового перехода II рода. Найти флуктуационную поправку к теплоемкости при $T \simeq T_c$ в теории Гинзбурга–Ландау. (2)

## ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

27. **Биномиальное распределение.** $N$ молекул идеального больцмановского газа находятся в объеме $V$. Определить вероятность

того, что в объеме $v < V$ находится $n$ молекул. Найти $\overline{n}$ и $\overline{\Delta n^2}$. Рассмотреть приближения $v \ll V$, $\overline{n} = \mathrm{const}$ (распределение Пуассона) и $v \ll V$, $\overline{n} \gg 1$ (распределение Гаусса). (2)

28. **Ближайший сосед.** В однородном газе с плотностью молекул $n$ найти среднее расстояние до ближайшей молекулы и его относительную флуктуацию. (1)

29. **Многомерная сфера.** $N$ молекул идеального больцмановского газа находятся в объеме $V$. Найти число состояний (фазовый интеграл) и получить уравнение состояния (Менделеева–Клапейрона) и теплоемкость газа (закон равнораспределения). (1)

30. **Термодинамический предел.** На примере системы, состоящей из $N$ молекул идеального больцмановского газа, показать, что каноническое распределение Гиббса по энергиям в пределе $N \gg 1$ переходит в микроканоническое распределение. (1)

31. **Диссоциация $\mathbf{a_2 \rightleftarrows 2a}$.** Определить температурную зависимость степени диссоциации $\alpha\,(T)$ двухатомного идеального газа с энергией диссоциации $D$ при столь высоких температурах $T \gg T_{\text{выр}}$, $T \gg T_{\text{вр}}, T_{\text{кол}}$, когда теплоемкость газа можно считать постоянной. Найти характерную температуру $T_D$, выше которой газ существенно диссоциирован. Учитывая, что $T_{\text{выр}}{=}\hbar^2\,(N/V)^{2/3}/m \approx 10^{-2}\,\text{К}$, $T_{\text{вр}} = \hbar^2/2J \approx 10\,\text{К}$, $T_{\text{кол}} = \hbar\omega \approx 10^3\,\text{К}$, а $D \approx 10^4\,\text{К}$, определить соотношение между $T_D$ и $D$. (2)

32. **Изотерма Ленгмюра.** Идеальный газ находится в контакте с поверхностью, содержащей узлы, которые могут адсорбировать отдельные атомы газа. Показать, что доля поверхностных узлов $f$, занятых атомами, определяется уравнением $f = P/(P_0 + P)$, где $P$ — давление газа, $P_0$ — константа, зависящая от температуры, но не от давления. (2)

33. **Орто- и параводород.** Вычислить вращательную теплоемкость чистых орто- и параводорода, а также их термодинамически равновесной смеси. Сравнить с теплоемкостью смеси при заданных концентрациях орто- и параводорода. Как изменится ответ для дейтерия? (1)

34. **Теплоемкость атмосферы.** Найти теплоемкость идеального больцмановского газа без внутренних степеней свободы, помещенного в однородное гравитационное поле в сосуде высоты $h$. Рассмотреть случаи $mgh \ll T$ и $mgh \gg T$. (1)

35. **Термодинамика резины.** Примитивная модель молекулы резины (задача 6), тем не менее, «улавливает» необычную зависимость длины молекулы от температуры: изобарический коэффициент объемного расширения резины отрицателен $(\partial V/\partial T)_P < 0$. Определить знак адиабатического коэффициента объемного расширения $(\partial V/\partial T)_S$. Объяснить эффект П.Н. Лебедева: быстро растянутый и приложенный к губам резиновый жгут покажется теплым или прохладным? (1)

36. **Теорема Бора–ван Леевен.** Доказать, что магнитная восприимчивость системы, подчиняющейся классической механике и классической статистике, строго равна нулю. (1)

37. **Расширение в пустоту.** Вычислить изменение температуры при расширении в пустоту: равновесного черного излучения, вырожденного ферми-газа, вырожденного бозе-газа. Объяснить знак эффекта. Сравнить с результатом для классического больцмановского газа. Показать, что при расширении в пустоту

$$C_E - C_V = -T\, C_V\, (\partial P/\partial T)_V \,/\, (\partial E/\partial V)_T\,. \text{ (2)}$$

38. **Закон Майера.** Вычислить $C_P - C_V$ в переменных $V, T$ и $P, T$. Определить $C_P - C_V$ для больцмановского газа, газа Ван-дер-Ваальса, ферми- и бозе-газа и черного излучения. (1)

39. **Предел Чандрасекара.** Вычислить давление вырожденного релятивистского электронного газа. Используя полученное выражение, оценить максимальную массу «белого карлика», состоящего из нейтральной плазмы ядер гелия $\mathrm{He}^{+2}$ и электронов $e^-$. (3)

40. **Сила Казимира.** Вычислить силу притяжения $f(T)$ двух идеально проводящих параллельных пластин, обусловленную вакуумными флуктуациями электромагнитного поля между ними при $T = 0$. Показать, что флуктуации имеют планковское распределение с температурой $T_c = \pi\hbar c/a$, где $a$ – расстояние между пластинами. Найти $f(T)$ при $T \ll T_c$ и при $T \gg T_c$. (2)

41. **Неустойчивость Купера.** Найти энергию связи $2\Delta$ двух электронов куперовской пары над заполненной ферми-сферой. Обсудить аналитичность ответа по константе связи $g$. (2)

42. **Эффект Джозефсона.** Вычислить бездиссипативный туннельный ток $j_s$ между двумя сверхпроводниками, разделенными тонким диэлектрическим слоем. Найти частоту джозефсоновской генерации $\omega$ при напряжении на контакте $V$. (2)

43. **Бозе-конденсация газа с внутренними степенями свободы.** $N$ двухуровневых атомов идеального бозе-газа находятся в объёме $V$. Энергии уровней атомов 0 и $\varepsilon$. Найти температуру бозе-конденсации газа $T_B(\varepsilon)$ в предельных случаях $\varepsilon \ll T_B(0)$ и $\varepsilon \gg T_B(0)$. Чему равно отношение $T_B(\infty)/T_B(0)$? (1)

44. **Скорость звука в вырожденном электронном газе.** $N$ электронов вырожденного $T \ll \varepsilon_F$ электронного газа занимают объём $V$. Найти отношение числа квазичастиц этого газа к числу частиц. Вычислить скорость звука $c$ в этом газе. В каком соотношении $c$ находится со скоростью Ферми $v_F$? (2)

45. **Сверхтекучий вихрь.** Найти циркуляцию скорости $\Gamma$ вокруг вихря в сверхтекучей жидкости и его линейное натяжение. Вычислить силу взаимодействия $F(a)$ между такими вихрями, расположенными на расстоянии $a$ друг от друга. (2)

46. **Вариационный принцип Боголюбова.** Доказать, что $F[H_0 + V] \leq F[H_0] + \langle V \rangle_{H_0}$. Использовать свойство выпуклости экспоненты (неравенство Фейнмана) $\langle e^F \rangle \geq e^{\langle F \rangle}$. (1)

47. **Температура ядра и испарение нейтронов.** Простой моделью ядра является представление о идеальных и вырожденных нуклонах $N \approx 100$, заключенных в сферу радиуса $R \approx 10^{-12}$см. Вычислите температуру $T$ и энтропию $S$ ядра с энергией возбуждения $E \approx 10 MeV$. Проверьте вырожденность газа нуклонов $T \ll \epsilon_F$. Полагая энергию выхода нейтрона $e \approx 10 MeV$, оцените энергию возбуждения ядра $E_e$, выше которой начинается существенное испарение нейтронов. (2)

Срок сдачи **задач 1—13**: 08.03–13.03 2016 г.
**1-я контрольная работа** – первая половина марта
Срок сдачи **задач 14—26**: 03.05–08.05 2016 г.
**2-я контрольная работа** – первая половина мая

Подписано в печать 11.01.2015. Формат 60x84$^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,25. Тираж 90 экз. Заказ № 1.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9