

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

«31»

мая

2023 г.



**Программа
дополнительного образования
«Высшая математика. Математический анализ»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Высшая математика. Математический анализ» является совершенствование компетенций слушателей в области высшей математики.

1.2. Курс ориентирован на слушателей, начинающих изучение высшей математики или знакомых с ней поверхностно и желающих разобраться глубже.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 14 недель (7-8 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- основные понятия математического анализа: предел и его различные применения (сумма ряда, предел последовательности, производная, интеграл), непрерывность, функциональные последовательности и ряды (в частности, степенные),

уметь:

- строить графики функций

- решать задачи математического анализа.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Мотивирующие примеры: как далеко видно с горы, приближенные вычисления, последовательность вложенных треугольников.
2. Примеры сходящихся и расходящихся рядов. Полнота множества вещественных чисел. Признаки сходимости рядов: интегральный, Даламбера и Коши.
3. Последовательности, интуитивное представление о сходимости. Сходимость без указания предела (фундаментальные последовательности). Предел последовательности, его связь с суммой ряда. Примеры пределов последовательностей. Рекуррентные последовательности.
4. Общее понятие предела, основанное на системе окрестностей. Использование пределов в математическом анализе: производная, задание и вычисление вещественных чисел, интеграл, асимптотика.

5. Многочлены и их графики. Корни многочлена и теорема Безу. Локальные экстремумы и производная. Старшие производные.
6. Экспонента: введение. Возникновение экспоненты и числа e в различных задачах.
7. Экспонента: алгебраический подход. Теорема о промежуточном значении и неизменность знака экспоненты. Построение экспоненты "по непрерывности".
8. Степенные ряды. Экспонента как степенной ряд. Число e – основание степени в экспоненте. "Замечательный предел" для числа e и экспоненты. Продолжение экспоненты на комплексную плоскость. Раскрытие скобок в произведении рядов. Абсолютная сходимость ряда и перестановка слагаемых. Условно сходящиеся ряды.
9. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость функциональных последовательностей. Мажорируемая сходимость. Радиус сходимости степенного ряда.
10. Комплексная экспонента. Комплексные тригонометрические функции.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Введение, мотивирующие примеры	6,6	1,1	5,5
2	Суммирование рядов	10	2	8
3	Предел последовательности	10,4	2,4	8
4	Использование пределов, общие понятия	6	1	5
5	Использование пределов, частные случаи	8,4	1,8	6,6
6	Многочлены и производная	9,4	2	7,4
7	Экспонента: введение	6,6	1,2	5,4
8	Экспонента: алгебраический подход	8,7	1,9	6,8
9	Степенные ряды и комплексная экспонента, начало	10,3	2,3	8
10	Степенные ряды и комплексная экспонента, продолжение	8,4	1,8	6,6
11	Функциональные последовательности	6	1	5
12	Функциональные ряды	7,4	1,4	6

13	Степенные ряды и комплексная экспонента, окончание	7,8	1,6	6,2
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	22,5	85,5

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Введение, мотивирующие примеры	Как далеко видно с горы	0,4	1
	Погрешность при вычислении массы Земли	0,4	1
	Последовательность вписанных треугольников и окружностей	0,3	0,5
	Контрольные задачи 1		3
2. Суммирование рядов	Сходимость рядов, сумма геометрической прогрессии	0,2	0,5
	Расходимость рядов, гармонический ряд	0,3	0,8
	Полнота множества вещественных чисел	0,4	1
	Сходимость ряда $\frac{1}{n^2}$	0,4	1
	Можно ли разбивать и перегруппировывать слагаемые ряда	0,1	0,2
	Интегральный признак сходимости	0,4	1
	Признаки сходимости Даламбера и Коши	0,2	0,5
	Контрольные задачи 2		3
3. Предел последовательности	Последовательности, интуитивное представление о сходимости	0,2	0,4
	Сходимость без указания предела (фундаментальные последовательности)	0,4	0,9
	Предел последовательности, его связь с суммой ряда	0,3	0,6
	Предел последовательности: примеры	0,1	0,2
	Число перестановок n элементов	0,1	0,2
	Бином Ньютона	0,4	0,9
	Предел последовательности $\frac{1}{n^k}$	0,2	0,4
	Пример вычисления предела	0,1	0,2

	последовательности		
	Сходимость рекуррентной последовательности	0,3	0,6
	"Хаотическое" поведение рекуррентной последовательности	0,3	0,6
	Контрольные задачи 3		3
4. Использование пределов, общие понятия	Предел - основное понятие математического анализа	0,5	1
	Общее определение предела	0,2	0,4
	Использование предела в разделах математического анализа	0,3	0,6
	Контрольные задачи 4		3
5. Использование пределов, частные случаи	Интеграл как предел	0,3	0,6
	Использование предела для задания вещественных чисел	0,2	0,4
	Пределы: прочее	0,2	0,4
	Приближение числа цепными дробями, начало	0,3	0,6
	Приближение числа цепными дробями, окончание	0,5	1
	Правило Лопиталя	0,3	0,6
	Контрольные задачи 5		3
6. Многочлены и производная	Многочлены и их графики	0,2	0,5
	Корни многочлена и теорема Безу	0,3	0,7
	Локальные экстремумы и производная	0,4	0,9
	Старшие производные	0,3	0,7
	Поиск нулей, экстремумов и точек перегиба	0,3	0,6
	Локальные и глобальные экстремумы	0,3	0,6
	Построение графика функции	0,2	0,4
	Контрольные задачи 6		3
7. Экспонента: введение	Экспонента и задача про пьяницу	0,4	0,8
	Доказательство в задаче про пьяницу и определение числа e	0,3	0,6
	Многочлены, ряды и элементарные функции	0,2	0,4
	Доля перестановок без неподвижных точек	0,3	0,6
	Контрольные задачи 7		3
8. Экспонента: алгебраический подход	Экспонента: алгебраический подход, постановка задачи	0,2	0,4
	Теорема о промежуточном значении и неизменность знака экспоненты	0,4	0,8
	Экспонента: алгебраический подход,	0,4	0,8

	завершение доказательства		
	Экспонента: построение "по непрерывности"	0,4	0,8
	График экспоненты	0,2	0,4
	Уравнение демографического взрыва	0,3	0,6
	Контрольные задачи 8		3
9. Степенные ряды и комплексная экспонента, начало	Чем занимается математический анализ	0,4	0,9
	Степенные ряды	0,3	0,7
	Экспонента как степенной ряд	0,4	0,9
	Число e – основание степени в экспоненте	0,4	0,9
	Число e – предел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	0,4	0,8
	Функция e^x – предел $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$	0,3	0,6
	Экспоненциальный рост банковского вклада	0,1	0,2
	Контрольные задачи 9		3
10. Степенные ряды и комплексная экспонента, продолжение	Продолжение экспоненты на комплексную плоскость	0,4	0,8
	Сходимость степенного ряда экспоненты на комплексной плоскости	0,2	0,4
	Раскрытие скобок в произведении рядов	0,3	0,6
	Абсолютная сходимость ряда и перестановка слагаемых	0,3	0,6
	Изменение суммы ряда Лейбница при перестановке слагаемых	0,3	0,6
	Движение по спирали	0,3	0,6
	Контрольные задачи 10		3
11. Функциональные последовательности	Функциональные последовательности и ряды	0,3	0,6
	Равномерная сходимость функциональных последовательностей	0,3	0,6
	Равномерная сходимость функциональных последовательностей	0,4	0,8
	Контрольные задачи 11		3
12. Функциональные ряды	Мажорируемая сходимость	0,3	0,6
	Радиус сходимости степенного ряда	0,3	0,6
	Равномерная сходимость функциональных рядов	0,4	0,9
	Еще примеры на равномерную сходимость	0,4	0,9
	Контрольные задачи 12		3
13. Степенные ряды и	Комплексная экспонента: характеристические свойства	0,3	0,6

комплексная экспонента, окончание	Комплексная экспонента: эквивалентность задания с помощью ряда и "замечательного предела"	0,4	0,8
	Комплексная экспонента: вспомогательное утверждение о "замечательном пределе"	0,3	0,6
	Комплексная экспонента: вычисление $\exp(i)$	0,3	0,6
	Комплексные тригонометрические функции	0,3	0,6
	Контрольные задачи 13		3
Экзамен		1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Введение, мотивирующие примеры	Лекции Как далеко видно с горы Практические занятия Погрешность при вычислении массы Земли Последовательность вписанных треугольников и окружностей Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
2	Суммирование рядов	Лекции Сходимость рядов, сумма геометрической прогрессии Расходимость рядов, гармонический ряд Полнота множества вещественных чисел Сходимость ряда $\frac{1}{n^2}$ Практические занятия Можно ли разбивать и перегруппировывать слагаемые ряда Интегральный признак сходимости Признаки сходимости Даламбера и Коши Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
3	Предел последовательности	Лекции Последовательности, интуитивное представление о сходимости Сходимость без указания предела (фундаментальные последовательности)

		Предел последовательности, его связь с суммой ряда Предел последовательности: примеры Число перестановок n элементов Бином Ньютона Предел последовательности $n^{\frac{1}{n}}$ Практические занятия Пример вычисления предела последовательности Сходимость рекуррентной последовательности "Хаотическое" поведение рекуррентной последовательности Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
4	Использование пределов, общие понятия	Лекции Предел – основное понятие математического анализа Общее определение предела Использование предела в разделах математического анализа Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
5	Использование пределов, частные случаи	Лекции Интеграл как предел Использование предела для задания вещественных чисел Пределы: прочее Практические занятия Приближение числа цепными дробями, начало Приближение числа цепными дробями, окончание Правило Лопиталя Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
6	Многочлены и производная	Лекции Многочлены и их графики Корни многочлена и теорема Безу Локальные экстремумы и производная Старшие производные Практические занятия Поиск нулей, экстремумов и точек перегиба Локальные и глобальные экстремумы Построение графика функции Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
7	Экспонента: введение	Лекции Экспонента и задача про пьяницу

		Доказательство в задаче про пьяницу и определение числа e Многочлены, ряды и элементарные функции Практические занятия Доля перестановок без неподвижных точек Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
8	Экспонента: алгебраический подход	Лекции Экспонента: алгебраический подход, постановка задачи Теорема о промежуточном значении и неизменность знака экспоненты Экспонента: алгебраический подход, завершение доказательства Экспонента: построение "по непрерывности" Практические занятия График экспоненты Уравнение демографического взрыва Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
9	Степенные ряды и комплексная экспонента, начало	Лекции Чем занимается математический анализ Степенные ряды Экспонента как степенной ряд Число e – основание степени в экспоненте Число e – предел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ Функция e^x – предел $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ Практические занятия Экспоненциальный рост банковского вклада Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
10	Степенные ряды и комплексная экспонента, продолжение	Лекции Продолжение экспоненты на комплексную плоскость Сходимость степенного ряда экспоненты на комплексной плоскости Раскрытие скобок в произведении рядов Абсолютная сходимость ряда и перестановка слагаемых Изменение суммы ряда Лейбница при перестановке слагаемых Практические занятия Движение по спирали Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.

11	Функциональные последовательности	Лекции Функциональные последовательности и ряды Равномерная сходимость функциональных последовательностей Практические занятия Равномерная сходимость функциональных последовательностей Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
12	Функциональные ряды	Лекции Мажорируемая сходимость Радиус сходимости степенного ряда Практические занятия Равномерная сходимость функциональных рядов Еще примеры на равномерную сходимость Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
13	Степенные ряды и комплексная экспонента, окончание	Лекции Комплексная экспонента: характеристические свойства Комплексная экспонента: эквивалентность задания с помощью ряда и "замечательного предела" Комплексная экспонента: вспомогательное утверждение о "замечательном пределе" Комплексная экспонента: вычисление $\exp(i)$ Комплексные тригонометрические функции Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование.
	Экзамен	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Задача 1. Величина x измерена с относительной погрешностью $\pm 2\%$, величина y — с относительной погрешностью $\pm 3\%$.

- Какую точность можно гарантировать для произведения $xу$? Введите ответ в процентах от величины $xу$, округлив до одного процента в ближайшую сторону.
- Ответьте на аналогичный вопрос для величины $\frac{x}{y}$.

Задача 2. Чему равна сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 0.6^n$?

Задача 3. Пусть $a_n = (-1)^n + (-2)^{-n}$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

- а) Расходится
- б) Имеет два различных предела
- с) Ограничена
- д) Имеет наибольший элемент

Задача 4. Используя интегральные суммы, вычислите предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Указание $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$

4.3. Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Дымарский Я.М. «Лекции по математическому анализу. Часть 1» М.: МФТИ, 2020.
2. Бесов О.В. «Лекции по математическому анализу.» М.: Физматлит, 2016.
3. Иванов Г.Е. «Лекции по математическому анализу. Часть 1» М.: МФТИ, 2017.
4. Петрович А. Ю. «Лекции по математическому анализу. Часть 1» М.: МФТИ, 2017
5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. «Сборник задач по математическому анализу. Том 1. Предел, непрерывность, дифференцируемость.» 2-е изд., перераб. М.: Физматлит, 2019.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/> -- сайт кафедры высшей математики МФТИ, на котором есть указанные выше учебники
2. <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/exams/exams.php> -- варианты экзаменационных контрольных МФТИ прошлых лет с ответами по математическим дисциплинам
3. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
4. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
5. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
6. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
7. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Введение, мотивирующие примеры	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Суммирование рядов	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Предел последовательности	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Использование пределов, общие понятия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Использование пределов, частные случаи	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Многочлены и производная	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экспонента: введение	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

Экспонента: алгебраический подход	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Степенные ряды и комплексная экспонента, начало	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Степенные ряды и комплексная экспонента, продолжение	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Функциональные последовательности	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Функциональные ряды	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Степенные ряды и комплексная экспонента, окончание	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экзамен	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

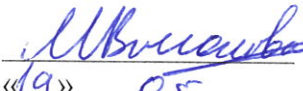
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

«19»  05 Ж. И. Зубцова
2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

«19»  05 М. В. Выголова
2023 г.