

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

«31»

мая 2023 г.

Программа

дополнительного образования

«Высшая математика. Линейная алгебра и элементы топологии»

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Высшая математика. Линейная алгебра и элементы топологии» является изучение основных понятий и методов линейной алгебры и топологии, необходимых для понимания и решения задач в различных областях науки и техники.

1.2. Курс ориентирован на слушателей, начинающих изучение высшей математики или знакомых с нею поверхностно и желающих разобраться глубже.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 17 недель (6-7 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- основные понятия и задачи линейной алгебры: линейное пространство, базис и размерность, линейные операторы, матрицы, решение систем линейных уравнений, построение жордановой нормальной формы, исследование квадратичных форм
- принцип сжимающих отображений
- понятие компактности
- теорему Брауэра
- основные инструменты линейной алгебры, анализа и смежных дисциплин

уметь:

- решать задачи линейной алгебры: решение систем линейных уравнений, построение жордановой нормальной формы, исследование квадратичных форм.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Многочлены и линейная алгебра. Интерполяционный многочлен Лагранжа. Базисы и размерность пространства многочленов. Множественность решений системы линейных уравнений. Размерность линейного пространства.
2. Линейные операторы: определение и задание с помощью матрицы. Композиция линейных операторов. Экспонента от линейного оператора. Норма линейного оператора и сходимость ряда экспоненты.

3. Многомерный анализ и линейная алгебра. Примеры: задача о теплопроводности, задача о маятнике. Линеаризация систем дифференциальных уравнений.
4. Матрицы и системы линейных уравнений. Перемножение и обращение матриц. Невырожденность и определитель. Алгебраические дополнения и вычисление обратной матрицы. Матрица линейного оператора в новом базисе. Приложение: кубические интерполяционные сплайны.
5. Анатомия линейного оператора: диагонализация и жорданова нормальная форма. Экспонента от матрицы и линейные динамические системы.
6. Квадратичные формы и их матричная запись. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Ранг квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Приведение к каноническому виду ортогональным преобразованием.
7. Метрические пространства. Принцип сжимающих отображений. Его приложение к теории дифференциальных уравнений (доказательство существования и единственности решения).
8. Компактность на прямой и в многомерном пространстве. Непрерывный образ компакта.
9. Векторные поля и их приложения: основная теорема алгебры и теорема Брауэра.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Многочлены и линейная алгебра	7,2	2,1	5,1
2	Линейные операторы и матрицы	6,6	1,3	5,3
3	Многомерный анализ и линейная алгебра	8	2	6
4	Матрицы и определители	7,4	1,7	5,7
5	Матрицы и системы линейных уравнений	6,8	1,4	5,4
6	Невырожденность и определитель	6,8	1,4	5,4
7	Системы линейных уравнений в n-мерном пространстве	7	1,5	5,5

8	Анатомия линейного оператора	7,6	1,8	5,8
9	Жорданова нормальная форма и экспонента от матрицы	7,4	1,7	5,7
10	Экспонента от матрицы и динамические системы	6,8	1,4	5,4
11	Квадратичные формы	7,4	1,7	5,7
12	Закон инерции и критерий Сильвестра	7,2	1,6	5,6
13	Метрические пространства, сжимающие отображения	7	1,5	5,5
14	Компактность	4,6	0,7	3,9
15	Векторные поля и теорема Брауэра	6,2	1,6	4,6
16	Комбинаторное доказательство теорема Брауэра	2	1	1
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	25,4	82,6

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Многочлены и линейная алгебра	Интерполяционный многочлен Лагранжа	0,3	0,3
	Единственность интерполяционного многочлена	0,3	0,3
	Базис и размерность пространства многочленов	0,2	0,2
	Различные базисы в пространстве многочленов	0,3	0,3
	Множественность решений, если неизвестных больше, чем уравнений	0,4	0,4
	Множественность решений: доказательство с помощью алгоритма Гаусса	0,3	0,3
	Размерность линейного пространства	0,3	0,3
	Контрольные задачи 1		3

2. Линейные операторы и матрицы	Линейные операторы: определение и задание с помощью матрицы	0,4	0,4
	Линейные операторы: композиция (произведение)	0,3	0,3
	Экспонента от линейного оператора как сумма ряда	0,4	0,4
	Норма оператора и сходимость ряда экспоненты	0,2	0,2
	Контрольные задачи 2		4
3. Многомерный анализ и линейная алгебра	Использование линейной алгебры в анализе функций многих переменных	0,4	0,4
	Пример: задача о теплопроводности	0,3	0,3
	Задача о теплопроводности (окончание)	0,3	0,3
	Задача о маятнике	0,4	0,4
	Линеаризация систем дифференциальных уравнений	0,3	0,3
	Решение задачи о маятнике	0,3	0,3
	Контрольные задачи 3		4
4. Матрицы и определители	Основные задачи, связанные с матрицами	0,3	0,3
	Определитель 2×2	0,4	0,4
	Решение систем линейных уравнений 2×2	0,3	0,3
	Определитель 3×3	0,3	0,3
	Определитель 3×3 , окончание	0,4	0,4
	Контрольные задачи 4		4
5. Матрицы и системы линейных уравнений	Системы линейных уравнений 3×3	0,3	0,3
	Компланарность	0,4	0,4
	Вырожденность и обратимость	0,3	0,3
	Перемножение и обращение матриц	0,4	0,4
	Контрольные задачи 5		4
6. Невырожденность и определитель	Невырожденность в n -мерном пространстве	0,4	0,4
	Определитель $n \times n$	0,4	0,4
	Вычисление числителя и знаменателя цепной дроби, начало	0,4	0,4
	Вычисление числителя и знаменателя цепной дроби, окончание	0,2	0,2
	Контрольные задачи 6		4
7. Системы линейных уравнений в n -мерном пространстве	Алгебраические дополнения	0,4	0,4
	Вычисление обратной матрицы	0,2	0,2
	Матрица оператора в новом базисе	0,2	0,2
	Кубические интерполяционные сплайны, начало	0,3	0,3
	Кубические интерполяционные сплайны,	0,4	0,4

	окончание		
	Контрольные задачи 7		4
8. Анатомия линейного оператора	Как вычислить экспоненту от матрицы	0,3	0,3
	Анатомия линейного оператора: диагонализация	0,4	0,4
	Анатомия линейного оператора: продолжение	0,4	0,4
	Прямая сумма инвариантных подпространств	0,3	0,3
	Прямая сумма инвариантных подпространств, продолжение	0,4	0,4
	Контрольные задачи 8		4
9. Жорданова нормальная форма и экспонента от матрицы	Жорданова нормальная форма	0,4	0,4
	Экспонента от матрицы	0,3	0,3
	Приведение к ЖНФ оператора дифференцирования в пространстве многочленов	0,4	0,4
	Оператор дифференцирования в пространстве тригонометрических функций	0,4	0,4
	Вычисление экспоненты от жордановой клетки	0,2	0,2
	Контрольные задачи 9		4
10. Экспонента от матрицы и динамические системы	Экспонента от линейного оператора как сумма ряда	0,4	0,4
	Норма оператора и сходимости ряда экспоненты	0,2	0,2
	Исследование двумерной динамической системы, начало	0,5	0,5
	Исследование двумерной динамической системы, окончание	0,3	0,3
	Контрольные задачи 10		4
11. Квадратичные формы	Максимизация, квадратичные формы и их матричная запись	0,3	0,3
	Приведение квадратичной формы к каноническому виду	0,3	0,3
	Билинейные формы, ранг квадратичной формы	0,4	0,4
	Спектральные свойства симметричных матриц	0,3	0,3
	Доказательство ортогональности векторов	0,1	0,1
	Приведение к каноническому виду ортогональным преобразованием	0,3	0,3
	Контрольные задачи 11		4

12. Закон инерции и критерий Сильвестра	Закон инерции квадратичных форм	0,3	0,3
	Закон инерции. доказательство	0,2	0,2
	Критерий Сильвестра	0,4	0,4
	Критерий Сильвестра. окончание	0,4	0,4
	Исследование критической точки на максимум	0,3	0,3
	Контрольные задачи 12		4
13. Метрические пространства, сжимающие отображения	Принцип сжимающих отображений	0,4	0,4
	Метрические пространства	0,4	0,4
	Доказательство принципа сжимающих отображений	0,3	0,3
	Существование и единственность решения дифференциальных уравнений	0,2	0,2
	Пример множественности решений	0,2	0,2
	Контрольные задачи 13		4
14. Компактность	Компактность: мотивирующие идеи	0,2	0,2
	Компактность: определение	0,2	0,2
	Компакт в n-мерном пространстве	0,2	0,2
	Непрерывный образ компакта - компакт	0,1	0,1
	Контрольные задачи 14		3,2
15. Векторные поля и теорема Брауэра	Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство	0,2	0,2
	Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство, окончание	0,2	0,2
	Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство, обсуждение	0,2	0,2
	Теорема Брауэра: формулировка	0,4	0,4
	Гомеоморфизм выпуклых компактов одинаковой размерности	0,4	0,4
	Теорема Брауэра: топологическое доказательство	0,2	0,2
	Контрольные задачи 15		3
16. Комбинаторное доказательство теорема Брауэра	Теорема Брауэра: комбинаторное доказательство	0,3	0,3
	Лемма Куратовского - Кнастера - Мазуркевича	0,1	0,1
	Лемма Куратовского - Кнастера - Мазуркевича, доказательство	0,5	0,5
	Заключительные слова. Чем можно заниматься дальше.	0,1	0,1
Экзамен		1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Многочлены и линейная алгебра	Лекция Интерполяционный многочлен Лагранжа Единственность интерполяционного многочлена Базис и размерность пространства многочленов Различные базисы в пространстве многочленов Множественность решений, если неизвестных больше, чем уравнений Множественность решений: доказательство с помощью алгоритма Гаусса Размерность линейного пространства Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
2	Линейные операторы и матрицы	Лекция Линейные операторы: определение и задание с помощью матрицы Линейные операторы: композиция (произведение) Экспонента от линейного оператора как сумма ряда Норма оператора и сходимость ряда экспоненты Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
3	Многомерный анализ и линейная алгебра	Лекция Использование линейной алгебры в анализе функций многих переменных Практические занятия Пример: задача о теплопроводности Задача о маятнике Линеаризация систем дифференциальных уравнений Решение задачи о маятнике Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
4	Матрицы и определители	Лекция Основные задачи, связанные с матрицами Определитель 2×2 Решение систем линейных уравнений 2×2 Определитель 3×3 Определитель 3×3, окончание Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции,

		изучение дополнительных материалов, тестирование
5	Матрицы и системы линейных уравнений	Лекция Системы линейных уравнений 3×3 Компланарность Вырожденность и обратимость Перемножение и обращение матриц Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
6	Невырожденность и определитель	Лекция Невырожденность в n-мерном пространстве Определитель $n \times n$ Практические занятия Вычисление числителя и знаменателя цепной дроби, начало Вычисление числителя и знаменателя цепной дроби, окончание Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
7	Системы линейных уравнений в n -мерном пространстве	Лекция Алгебраические дополнения Вычисление обратной матрицы Матрица оператора в новом базисе Практические занятия Кубические интерполяционные сплайны, начало Кубические интерполяционные сплайны, окончание Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
8	Анатомия линейного оператора	Лекция Как вычислить экспоненту от матрицы Анатомия линейного оператора: диагонализация Анатомия линейного оператора: продолжение Прямая сумма инвариантных подпространств Прямая сумма инвариантных подпространств, продолжение Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
9	Жорданова нормальная форма и экспонента от матрицы	Лекция Жорданова нормальная форма Экспонента от матрицы Практические занятия Приведение к ЖНФ оператора дифференцирования в пространстве многочленов

		Оператор дифференцирования в пространстве тригонометрических функций Вычисление экспоненты от жордановой клетки Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
10	Экспонента от матрицы и динамические системы	Лекция Экспонента от линейного оператора как сумма ряда Норма оператора и сходимость ряда экспоненты Практические занятия Исследование двумерной динамической системы, начало Исследование двумерной динамической системы, окончание Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
11	Квадратичные формы	Лекция Максимизация, квадратичные формы и их матричная запись Приведение квадратичной формы к каноническому виду Билинейные формы, ранг квадратичной формы Практические занятия Спектральные свойства симметричных матриц Доказательство ортогональности векторов Приведение к каноническому виду ортогональным преобразованием Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
12	Закон инерции и критерий Сильвестра	Лекция Закон инерции квадратичных форм Закон инерции, доказательство Критерий Сильвестра Критерий Сильвестра, окончание Практические занятия Исследование критической точки на максимум Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
13	Метрические пространства, сжимающие отображения	Лекция Принцип сжимающих отображений Практические занятия Метрические пространства Доказательство принципа сжимающих отображений

		Существование и единственность решения дифференциальных уравнений Пример множественности решений Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
14	Компактность	Лекция Компактность: мотивирующие идеи Компактность: определение Компакт в n-мерном пространстве Непрерывный образ компакта - компакт Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
15	Векторные поля и теорема Брауэра	Лекция Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство, окончание Основная теорема алгебры: геометрическое доказательство, обсуждение Теорема Брауэра: формулировка Гомеоморфизм выпуклых компактов одинаковой размерности Теорема Брауэра: топологическое доказательство Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
16	Комбинаторное доказательство теорема Брауэра	Лекция Теорема Брауэра: комбинаторное доказательство Лемма Куратовского - Кнастера - Мазуркевича Лемма Куратовского - Кнастера - Мазуркевича, доказательство Заключительные слова. Чем можно заниматься дальше. Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование
	Экзамен	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию.

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Задача 1. Вычислите коэффициенты многочлена третьей степени $f(x)$, для которого $f(0) = 0, f(1) = 3, f(2) = 0, f(3) = 3$.

Задача 2. Являются ли описанные ниже преобразования плоскости линейными операторами?

Если ответ "нет", то введите во всех полях 0. Если ответ "да", то введите четыре числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, образующие матрицу данного линейного оператора в стандартном базисе, состоящем из векторов $(1, 0)^T$ и $(0, 1)^T$ (здесь и далее x^T означает транспонированную матрицу или вектор x , например, $(1, 0)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Задача 3. Найдите температуру точек x, y, z в простой модели теплопроводности, рассмотренной на лекции, если температура внешних узлов сетки $a = 0, b = 20, c = 80$.

Задача 4. При каком значении $\lambda \in \mathbb{R}$ столбцы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 12 & -\lambda & -4 \\ -1 & 6 & -\lambda \end{pmatrix}$$

являются линейно зависимыми?

4.3. Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Гилберт С., Найман Дж., Пейдж К. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 2017.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 17-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2020. – 448 с.
3. Рудин В. Принципы математического анализа. М.: МЦНМО, 2015
4. Муравьев В. Элементы топологии. М.: Наука, 2014.
5. Хартшорн Р. Алгебраическая топология. М.: Мир, 2016.
6. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 2016.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
2. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
3. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
4. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.
5. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

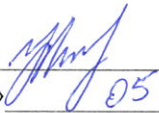
Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Многочлены и линейная алгебра	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Линейные операторы и матрицы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Многомерный анализ и линейная алгебра	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Матрицы и определители	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Матрицы и системы линейных уравнений	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Невырожденность и определитель	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Системы линейных уравнений в n -мерном пространстве	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Анатомия линейного	Установленное количество	Самостоятельное

оператора	выполненных заданий	выполнение заданий, тестирование
Жорданова нормальная форма и экспонента от матрицы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экспонента от матрицы и динамические системы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Квадратичные формы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Закон инерции и критерий Сильвестра	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Метрические пространства, сжимающие отображения	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Компактность	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Векторные поля и теорема Брауэра	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Комбинаторное доказательство теорема Брауэра	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экзамен	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

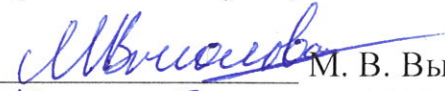
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

«19»  05 Ж. И. Зубцова
2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

«19»  05 М. В. Выголова
2023 г.