

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

«31»

мая

2023 г.



**Программа
дополнительного образования
«Введение в теорию вероятностей»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Введение в теорию вероятностей» является познакомить слушателей с основами теории вероятностей и научить применять ее простейшие утверждения к нетривиальным комбинаторным задачам.

1.2. Курс доступен широкому кругу слушателей. Для освоения материала будет достаточно знания математики на хорошем школьном уровне, базовых знаний комбинаторики и самых основных определений теории графов.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 14 недель (7-8 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен: знать:

- понятие классической вероятности,
- вероятностные схемы (схема Бернулли, геометрическая вероятность, общая схема – аксиоматика Колмогорова,
- основные понятия теории вероятностей (случайное событие, случайная величина, математическое ожидание, дисперсия, вероятностное пространство),

уметь:

- применять предельные теоремы (закон больших чисел, предельную теорему Пуассона и предельную теорему Муавра-Лапласа),
- использовать вероятностную технику для решения некоторых комбинаторных задач.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Классическое определение вероятности.
2. Условные вероятности, формула полной вероятности и формула Байеса.
3. Независимость событий.
4. Схема Бернулли.
5. Вероятностный метод: задача о раскраске.
6. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.
7. Неравенство Маркова и неравенство Чебышева.
8. Применение неравенств Маркова и Чебышева.
9. Независимость случайных величин.
10. Закон больших чисел.

- 11.Предельные теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.
- 12.Геометрическое определение вероятности. Задача о встрече.
- 13.Колмогоровское определение вероятностного пространства.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Классическая вероятность	7,4	2,2	5,2
2	Условная вероятность	7,6	2,3	5,3
3	Схема испытаний Бернулли	8,4	2,7	5,7
4	Случайные величины	6,4	1,7	4,7
5	Математическое ожидание	8,6	2,8	5,8
6	Применение схемы Бернулли к задаче о раскраске	8,4	2,7	5,7
7	Независимые случайные величины и закон больших чисел	7,8	2,4	5,4
8	Предельные теоремы	9,2	3,1	6,1
9	Геометрическая вероятность	8	2,5	5,5
10	Колмогоровская аксиоматика	5,6	1,3	4,3
11	Абсолютно непрерывные случайные величины	8	2,5	5,5
12	Утверждения теории вероятностей для произвольных случайных величин	8,6	2,8	5,8
13	Метод моментов	12	4,5	7,5
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	34,5	73,5

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
Классическая вероятность	Случайное событие и вероятность на примере с игральной костью	0,2	0,2
	Классическое определение вероятности	0,1	0,1
	Свойства вероятности	0,2	0,2
	Формулировка задачи	0,2	0,2
	Решение задачи	0,2	0,2
	Задача о книжной полке	0,3	0,3
	Задача о случайном подмножестве	0,2	0,2
	Задача о простом цикле в классической модели	0,4	0,4
	Задача о двух кубиках	0,1	0,1
	Задача о двух случайных числах	0,3	0,3
	Итоговые задания 1		3
Условная вероятность	Определение условной вероятности	0,2	0,2
	Независимость двух и нескольких событий	0,2	0,2
	Формула полной вероятности	0,1	0,1
	Задача с урнами на применение формулы полной вероятности	0,2	0,2
	Формула Байеса	0,1	0,1
	Задача на применение формулы Байеса	0,1	0,1
	Задача о трех случайных числах	0,2	0,2
	Задача о двух студентах на экзамене	0,2	0,2
	Задача про игральные кости	0,2	0,2
	Задача о двух случайных подмножествах	0,3	0,3
	Задача об урнах	0,3	0,3
	Задача об условной вероятности простого цикла	0,2	0,2
	Итоговые задания 2		3
Схема испытаний Бернулли	Схема испытаний Бернулли: множество элементарных исходов и вероятность успеха	0,2	0,2
	Схема испытаний Бернулли: вероятность элементарного исхода	0,1	0,1
	Подсчет вероятности события наступления фиксированного количества успехов	0,1	0,1
	Задача о вероятности пересечения двух случайных множеств	0,2	0,2
	Полиномиальная схема	0,5	0,5
	Задача о двух гардеробах	0,1	0,1

	Задача про частицу на прямой	0,2	0,2
	Задача о пустом пересечении случайных подмножеств	0,2	0,2
	Задача о трех случайных подмножествах	0,6	0,6
	Задача о простом цикле в схеме испытаний Бернулли	0,1	0,1
	Задача о дереве	0,1	0,1
	Задача о пользователе социальной сети	0,3	0,3
	Итоговые задания 3		3
Случайные величины	Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме Бернулли	0,1	0,1
	Конечное вероятностное пространство, свойства вероятности	0,1	0,1
	Определение случайной величины	0,1	0,1
	Случайный граф, число треугольников в случайном графе	0,2	0,2
	Распределение случайной величины	0,1	0,1
	Функции распределения	0,4	0,4
	Задача о всевозможных случайных величинах	0,1	0,1
	Задача о функции распределения модифицированной случайной величины	0,2	0,2
	Задача о количестве пар ладей	0,1	0,1
	Задача о числе компонент связности случайного графа	0,3	0,3
	Итоговые задания 4		3
Математическое ожидание	Вероятность отсутствия треугольника в случайном графе. Математическое ожидание	0,2	0,2
	Свойство линейности математического ожидания, примеры	0,3	0,3
	Неравенство Маркова	0,1	0,1
	Применение неравенства Маркова в задаче о пороговой вероятности существования треугольника	0,1	0,1
	Определение дисперсии. Неравенство Чебышева	0,2	0,2
	Неравенство Чебышева в задаче о пороговой вероятности: формулировка теоремы и начало доказательства	0,2	0,2
	Завершение доказательства теоремы	0,3	0,3
	Задача о веб-странице	0,2	0,2
	Задача о космическом корабле	0,2	0,2
	Задача о случайной перестановке	0,2	0,2
	Задача об изолированных вершинах	0,2	0,2
	Задача о хроматическом числе	0,2	0,2

	Задача о полном графе на четырех вершинах	0,3	0,3
	Задача о непересекающихся парах случайных подмножеств	0,1	0,1
	Итоговые задания 5		3
Применение схемы Бернулли к задаче о раскраске	Введение	0,1	0,1
	Обобщение задачи о раскраске пятнадцати множеств на случай произвольного числа множеств	0,2	0,2
	Формулировка теоремы	0,1	0,1
	Доказательство теоремы: первая раскраска	0,2	0,2
	Доказательство теоремы: вторая раскраска, определение "плохого" события F	0,1	0,1
	Доказательство теоремы: оценивание вероятности события F через вероятности событий A, A', C	0,2	0,2
	Доказательство теоремы: оценивание вероятностей событий A, A'	0,2	0,2
	Доказательство теоремы: оценивание вероятностей событий C	0,2	0,2
	Доказательство теоремы: оценивание вероятности события F	0,1	0,1
	Завершение доказательства: нахождение параметра p	0,2	0,2
	Задача о числе Рамсея	0,5	0,5
	Задача о родительском собрании	0,6	0,6
	Итоговые задания 6		3
Независимые случайные величины и закон больших чисел	Определение независимости двух событий и независимости в совокупности	0,2	0,2
	Математическое ожидание произведения независимых случайных величин	0,3	0,3
	Дисперсия суммы независимых случайных величин	0,2	0,2
	Существование двух зависимых некоррелированных случайных величин	0,1	0,1
	Формулировка закона больших чисел	0,3	0,3
	Доказательство закона больших чисел	0,1	0,1
	Задача о независимых случайных величинах	0,5	0,5
	Задача об индикаторах в случайном графе	0,3	0,3
	Задача о бесконечной серии испытаний Бернулли	0,1	0,1
	Задача о математическом ожидании произведения случайных величин	0,1	0,1
	Задача об изолированных вершинах случайного двудольного графа	0,2	0,2
	Итоговые задания 7		3

Предельные теоремы	Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в схеме Бернулли. Теорема Пуассона	0,2	0,2
	Доказательство теоремы Пуассона	0,1	0,1
	Теорема Муавра-Лапласа	0,1	0,1
	Задача о двух гардеробах	0,2	0,2
	Решение задачи о двух гардеробах	0,1	0,1
	Задача про пьяницу	0,2	0,2
	Применение неравенства Чебышева	0,2	0,2
	Применение интегральной предельной теоремы	0,4	0,4
	Экспоненциальная вероятность	0,2	0,2
	Задача о случайных цифрах	0,3	0,3
	Задача о стенографисте	0,3	0,3
	Задача о благотворительном фонде	0,4	0,4
	Задача об асимптотике вероятности фиксированного числа успехов	0,4	0,4
	Итоговые задания 8		3
Геометрическая вероятность	Задача о встрече	0,1	0,1
	Решение задачи о встрече для случая дискретного времени	0,2	0,2
	Решение задачи для случая непрерывного времени, геометрическая вероятность	0,1	0,1
	Парадокс Бертрانا	0,1	0,1
	Первый способ определения вероятности в парадоксе Бертрана	0,2	0,2
	Второй способ определения вероятности в парадоксе Бертрана	0,1	0,1
	Задача о нахождении минимального числа пустых треугольников	0,2	0,2
	Вероятностный метод в задаче о нахождении минимального числа пустых треугольников	0,2	0,2
	Задача о прямоугольнике пункт (a)	0,3	0,3
	Задача о прямоугольнике пункт (b)	0,2	0,2
	Задача о касательных к окружности	0,3	0,3
	Задача о двух случайных точках на отрезке	0,2	0,2
	Задача о трех случайных точках на окружности	0,2	0,2
	Задача о треугольнике, составленном из трех случайных отрезков	0,1	0,1
	Итоговые задания 9		3
Колмогоровская аксиоматика	Отличия понятий геометрической и классической вероятностей	0,1	0,1
	Колмогоровское определение вероятностного пространства: сигма-алгебра событий	0,3	0,3

	Колмогоровское определение вероятностного пространства: вероятность	0,1	0,1
	Интуитивное определение случайной величины	0,2	0,2
	Борелевская сигма-алгебра	0,1	0,1
	Случайная величина и функция распределения	0,1	0,1
	Свойства функции распределения	0,1	0,1
	Задача об операциях, определяющих алгебру	0,2	0,2
	Задача о пересечении сигма-алгебр	0,1	0,1
	Итоговые задания 10		3
Абсолютно непрерывные случайные величины	Дискретные распределения: определение и примеры	0,3	0,3
	Распределение Пуассона	0,1	0,1
	Абсолютно непрерывные распределения: определение	0,2	0,2
	Равномерное распределение	0,2	0,2
	Стандартное нормальное распределение	0,1	0,1
	Нормальное распределение	0,1	0,1
	Экспоненциальное и хи-квадрат распределения	0,1	0,1
	Сингулярные распределения	0,1	0,1
	Математическое ожидание и дисперсия	0,2	0,2
	Математическое ожидание функции от случайной величины	0,1	0,1
	Моменты случайной величины	0,1	0,1
	Независимые случайные величины	0,2	0,2
	Задача о моментах стандартной нормальной случайной величины	0,3	0,3
	Задача о преобразовании стандартной нормальной случайной величины	0,1	0,1
	Задача о случайных величинах без математического ожидания	0,1	0,1
	Задача о преобразовании случайной величины с распределением Коши	0,2	0,2
	Итоговые задания 11		3
Утверждения теории вероятностей для произвольных случайных величин	Неравенство Маркова, неравенство Чебышева и закон больших чисел	0,3	0,3
	Виды сходимостей случайных величин	0,2	0,2
	Из сходимости по вероятности не следует сходимости почти наверно	0,2	0,2
	Усиленный закон больших чисел	0,1	0,1
	Центральная предельная теорема	0,3	0,3
	Формула свертки	0,2	0,2
	Другие функции	0,2	0,2

	Задача о порядковых статистиках	0,3	0,3
	Задача о плотности разности независимых случайных величин	0,1	0,1
	Задача о вычисления вероятностей	0,3	0,3
	Задача о видах сходимостей случайных величины	0,4	0,4
	Задача о сумме независимых биномиальных случайных величин	0,2	0,2
	Итоговые задания 12		3
Метод моментов	Связь первых моментов и распределения случайной величины	0,3	0,3
	Факториальные моменты	0,2	0,2
	Формула обращения	0,2	0,2
	Пуассоновская аппроксимация	0,3	0,3
	Деревья в случайном графе	0,1	0,1
	Отсутствие деревьев	0,2	0,2
	Пуассоновское число деревьев: вычисление математического ожидания	0,2	0,2
	Пуассоновское число деревьев: вычисление второго факториального момента	0,4	0,4
	Пуассоновское число деревьев: вычисление остальных факториальных моментов	0,2	0,2
	Задача о пороговой вероятности, предел вероятности равен нулю	0,3	0,3
	Задача о пороговой вероятности, предел вероятности равен единице	0,9	0,9
	Задача о формуле обращения	0,4	0,4
	Задача о производящей функции	0,1	0,1
	Доказательство центральной предельной теоремы в случае конечных моментов	0,7	0,7
	Итоговые задания 13		3
Экзамен		1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Классическая вероятность	Лекция Случайное событие и вероятность на примере с игральной костью Классическое определение вероятности Свойства вероятности Практическая работа

		Формулировка задачи Решение задачи Задача о книжной полке Задача о случайном подмножестве Задача о простом цикле в классической модели Задача о двух кубиках Задача о двух случайных числах Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
2	Условная вероятность	Лекция Определение условной вероятности Независимость двух и нескольких событий Формула полной вероятности Практическая работа Задача с урнами на применение формулы полной вероятности Лекция Формула Байеса Практическая работа Задача на применение формулы Байеса Задача о трех случайных числах Задача о двух студентах на экзамене Задача про игральные кости Задача о двух случайных подмножествах Задача об урнах Задача об условной вероятности простого цикла Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
3	Схема испытаний Бернулли	Лекция Схема испытаний Бернулли: множество элементарных исходов и вероятность успеха Схема испытаний Бернулли: вероятность элементарного исхода Подсчет вероятности события наступления фиксированного количества успехов Практическая работа Задача о вероятности пересечения двух случайных множеств Лекция Полиномиальная схема Практическая работа Задача о двух гардеробах Задача про частицу на прямой Задача о пустом пересечении случайных подмножеств Задача о трех случайных подмножествах Задача о простом цикле в схеме испытаний Бернулли Задача о дереве Задача о пользователе социальной сети Самостоятельная работа

		Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
4	Случайные величины	Лекция Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме Бернулли Конечное вероятностное пространство, свойства вероятности Определение случайной величины Случайный граф, число треугольников в случайном графе Распределение случайной величины Функции распределения Практическая работа Задача о всевозможных случайных величинах Задача о функции распределения модифицированной случайной величины Задача о количестве пар ладей Задача о числе компонент связности случайного графа Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
5	Математическое ожидание	Лекция Вероятность отсутствия треугольника в случайном графе. Математическое ожидание Свойство линейности математического ожидания, примеры Неравенство Маркова Применение неравенства Маркова в задаче о пороговой вероятности существования треугольника Определение дисперсии. Неравенство Чебышева Неравенство Чебышева в задаче о пороговой вероятности: формулировка теоремы и начало доказательства Завершение доказательства теоремы Практическая работа Задача о веб-странице Задача о космическом корабле Задача о случайной перестановке Задача об изолированных вершинах Задача о хроматическом числе Задача о полном графе на четырех вершинах Задача о непересекающихся парах случайных подмножеств Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
6	Применение схемы Бернулли к задаче о раскраске	Лекция Введение

		Обобщение задачи о раскраске пятнадцати множеств на случай произвольного числа множеств Формулировка теоремы Доказательство теоремы: первая раскраска Доказательство теоремы: вторая раскраска, определение "плохого" события F Доказательство теоремы: оценивание вероятности события F через вероятности событий A, A', C Доказательство теоремы: оценивание вероятностей событий A, A' Доказательство теоремы: оценивание вероятностей событий C Доказательство теоремы: оценивание вероятности события F Завершение доказательства: нахождение параметра p Практическая работа Задача о числе Рамсея Задача о родительском собрании Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
7	Независимые случайные величины и закон больших чисел	Лекция Определение независимости двух событий и независимости в совокупности Математическое ожидание произведения независимых случайных величин Дисперсия суммы независимых случайных величин Существование двух зависимых некоррелированных случайных величин Формулировка закона больших чисел Доказательство закона больших чисел Практическая работа Задача о независимых случайных величинах Задача об индикаторах в случайном графе Задача о бесконечной серии испытаний Бернулли Задача о математическом ожидании произведения случайных величин Задача об изолированных вершинах случайного двудольного графа Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
8	Предельные теоремы	Лекция Математическое ожидание и дисперсия числа успехов в схеме Бернулли. Теорема Пуассона Доказательство теоремы Пуассона Теорема Муавра-Лапласа Практическая работа

		Задача о двух гардеробах Решение задачи о двух гардеробах Задача про пьяницу Лекция Применение неравенства Чебышева Применение интегральной предельной теоремы Экспоненциальная вероятность Практическая работа Задача о случайных цифрах Задача о стенографисте Задача о благотворительном фонде Задача об асимптотике вероятности фиксированного числа успехов Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
9	Геометрическая вероятность	Практическая работа Задача о встрече Решение задачи о встрече для случая дискретного времени Решение задачи для случая непрерывного времени, геометрическая вероятность Лекция Парадокс Бертрانا Первый способ определения вероятности в парадоксе Бертрана Второй способ определения вероятности в парадоксе Бертрана Практическая работа Задача о нахождении минимального числа пустых треугольников Лекция Вероятностный метод в задаче о нахождении минимального числа пустых треугольников Практическая работа Задача о прямоугольнике пункт (а) Задача о прямоугольнике пункт (b) Задача о касательных к окружности Задача о двух случайных точках на отрезке Задача о трех случайных точках на окружности Задача о треугольнике, составленном из трех случайных отрезков Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
10	Колмогоровская аксиоматика	Лекция Отличия понятий геометрической и классической вероятностей Колмогоровское определение вероятностного пространства: сигма-алгебра событий

		Колмогоровское определение вероятностного пространства: вероятность Интуитивное определение случайной величины Борелевская сигма-алгебра Случайная величина и функция распределения Свойства функции распределения Практическая работа Задача об операциях, определяющих алгебру Задача о пересечении сигма-алгебр Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
11	Абсолютно непрерывные случайные величины	Лекция Дискретные распределения: определение и примеры Распределение Пуассона Абсолютно непрерывные распределения: определение Равномерное распределение Стандартное нормальное распределение Нормальное распределение Экспоненциальное и хи-квадрат распределения Сингулярные распределения Математическое ожидание и дисперсия Математическое ожидание функции от случайной величины Моменты случайной величины Независимые случайные величины Практическая работа Задача о моментах стандартной нормальной случайной величины Задача о преобразовании стандартной нормальной случайной величины Задача о случайных величинах без математического ожидания Задача о преобразовании случайной величины с распределением Коши Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
12	Утверждения теории вероятностей для произвольных случайных величин	Лекция Неравенство Маркова, неравенство Чебышева и закон больших чисел Виды сходимостей случайных величин Из сходимости по вероятности не следует сходимости почти наверно Усиленный закон больших чисел Центральная предельная теорема Формула свертки

		Другие функции Практическая работа Задача о порядковых статистиках Задача о плотности разности независимых случайных величин Задача о вычисления вероятностей Задача о видах сходимостей случайных величины Задача о сумме независимых биномиальных случайных величин Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
13	Метод моментов	Лекция Связь первых моментов и распределения случайной величины Факториальные моменты Формула обращения Пуассоновская аппроксимация Деревья в случайном графе Отсутствие деревьев Пуассоновское число деревьев: вычисление математического ожидания Пуассоновское число деревьев: вычисление второго факториального момента Пуассоновское число деревьев: вычисление остальных факториальных моментов Практическая работа Задача о пороговой вероятности, предел вероятности равен нулю Задача о пороговой вероятности, предел вероятности равен единице Задача о формуле обращения Задача о производящей функции Лекция Доказательство центральной предельной теоремы в случае конечных моментов Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, тестирование
	Итоговая аттестация	Экзамен

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Задача к семинару 1. Книжная полка вмещает сорок книг. Среди имеющихся у нас сорока книг есть три тома Пушкина. Ставим наши книги в случайном порядке на полку (все расстановки являются равновероятными). С какой

вероятностью тома Пушкина окажутся стоящими в правильной последовательности, но не обязательно рядом? Запишите ответ в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$.

Задача к семинару 2. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, n\}$ по схеме упорядоченного выбора без возвращения выбираются три числа (выборы всех упорядоченных троек равновероятны). Найдите условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго. Запишите ответ в виде обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$.

Задача к семинару 3. В классе 15 человек. На входе в школу имеются два гардероба. Школьники равновероятно раздеваются либо в одном, либо в другом. Найдите вероятность того, что в правом гардеробе школьники этого класса заняли вдвое больше мест, чем в левом. Запишите ответ в виде обыкновенной несократимой дроби $\frac{a}{b}$.

Задача к семинару 4. Сколько различных случайных величин можно задать на пространстве n элементарных исходов, принимающих значения во множестве из m элементов (необязательно все)?

4.3. Список рекомендуемой литературы

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. --- М.: Наука, 1969. --- 420 с.
2. А.М. Райгородский, Комбинаторика и теория вероятностей, Интеллект, Долгопрудный, 2013.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. --- М.-Л.: Гос. изд-во технико-теор. литературы, 1950. --- 388 с.
4. М.Е. Жуковский, И.В. Родионов, "Основы теории вероятностей", МФТИ, 2015.
5. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.} Сборник задач по теории вероятностей. --- М.: Наука, 1989 --- 320 с.
6. А.М. Райгородский, Вероятность и алгебра в комбинаторике, МЦНМО, Москва, Россия, 2015, третье издание.
7. А.М. Райгородский, Модели случайных графов, МЦНМО, Москва, Россия, 2011.
8. Ширяев А.Н. Вероятность. --- М.: Наука, 1989. --- 640 с.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

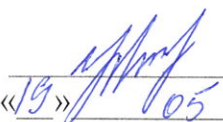
Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Классическая вероятность	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Условная вероятность	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Схема испытаний Бернулли	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Случайные величины	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Математическое ожидание	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Применение схемы Бернулли к задаче о раскраске	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Независимые случайные величины и закон больших	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий,

чисел		тестирование
Предельные теоремы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Геометрическая вероятность	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Колмогоровская аксиоматика	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Абсолютно непрерывные случайные величины	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Утверждения теории вероятностей для произвольных случайных величин	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Метод моментов	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экзамен	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

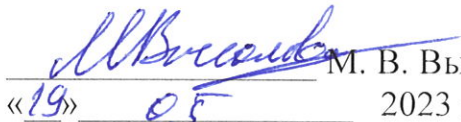
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

 Ж. И. Зубцова
«19» 05 2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

 М. В. Выголова
«19» 05 2023 г.