

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

Д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2023 г.



**Дополнительная общеобразовательная
программа
дополнительного образования
«Теория игр»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Теория игр» является формирование у слушателей теоретических знаний и практических навыков в области теории игр, а также развитие у них аналитического мышления, умения анализировать и принимать решения в ситуациях конфликта и сотрудничества.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): программа предназначена для любых слушателей, желающих получить теоретические знания и практические навыки в области теории игр. Для понимания всех утверждений курса рекомендуется знать линейную алгебру и математический анализ в рамках базовых университетских курсов. Также полезно будет знать теорию вероятностей.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 13 недель (8 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен: знать:

- классификацию игр;
- основы моделирования розыгрышей игр;
- основные принципы решения игр;
- о формировании стратегий, платежах, цене игры,
- об основах рационального поведения, правилах справедливого дележа,
- о взаимосвязи дисциплины с другими смежными дисциплинами.

уметь:

- применять имеющиеся знания для решения практических задач
- применять новые технологии анализа экономических систем.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Позиционные игры
2. Статические игры
3. Динамические игры
4. Кооперативные игры

5. Приложения теории игр

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
0	Общая информация о курсе	0,3	0,3	
1	Равновесия Нэша	12,4	2,1	10,3
2	Смешанные равновесия	9,1	1,4	7,7
3	Симметричные равновесия	7,9	1,3	6,6
4	Динамическая теория игр	10	2	8
5	Случайность и неполная информация	7,6	1,2	6,4
6	Секвенциальные равновесия и равновесия Байеса-Нэша	9,7	1,9	7,8
7	Промежуточный экзамен	5		5
8	Аукционы и равновесие дискретного отклика	10,9	2,3	8,6
9	Кооперативная теория игр. Ядро	6,7	0,9	5,8
10	Кооперативная теория игр. Вектор Шепли	8,2	1,4	6,8
11	Применение теории игр в экономике. Экономика обмена	8,8	1,6	7,2
12	Классические модели Курно и Бертрана. Монополистическая конкуренция	9,4	1,8	7,6
	Итоговая аттестация	2	1	1
Итого		108	19,2	88,8

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
0. Общая информация о курсе	Общая информация о курсе	0,3	

1. Равновесия Нэша	Дилемма заключённых	0,4	1
	Доминирующие стратегии	0,8	2
	Итеративное доминирование	0,5	1,3
	Пример игры с несколькими равновесиями Нэша	0,4	1
	Определения		1
	Тест 1		4
2. Смешанные равновесия	Смешанные стратегии	0,7	1,4
	Игра про пионеров	0,7	1,3
	Определения		1
	Тест 2		4
3. Симметричные равновесия	Симметричные игры	0,8	1,6
	Симметричные равновесия	0,5	1
	Тест 3		4
4. Динамическая теория игр	Введение в динамическую теорию игр	0,9	1,8
	Динамическая теория игр	1,1	2,2
	Тест 4		4
5. Случайность и неполная информация	Русская рулетка	0,6	1,2
	Ультиматум и Сороконожка	0,6	1,2
	Тест 5		4
6. Секвенциальные равновесия и равновесия Байеса-Нэша	Секвенциальные равновесия	0,9	1,8
	Игра "Координация"	0,4	0,8
	Игра "Встреча в метро"	0,6	1,2
	Тест 6		4
7. Промежуточный экзамен	Тест 7		5
8. Аукционы и равновесие дискретного отклика	Аукционы	1,3	2,6
	Равновесие дискретного отклика	1	2
	Тест 8		4
9. Кооперативная теория игр. Ядро	Формализация игры. Ядро	0,9	1,8
	Тест 9		4
10. Кооперативная теория игр. Вектор Шепли	Вектор Шепли	1,4	2,8
	Тест 10		4
11. Применение теории игр в экономике. Экономика обмена	Экономика обмена	1,6	3,2
	Тест 11		4
12. Классические	Модели Курно и Бертрана	0,6	1,2
	Монополистическая конкуренция	1,2	2,4

модели Курно и Бертрана. Монополистическая конкуренция	Тест 12		4
Итоговая аттестация	Экзамен	1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
0	Общая информация о курсе	Лекции О физтехе Онлайн-магистратура МФТИ Применения теории игр
1	Равновесия Нэша	Лекции Дилемма заключённых Представление лектора Дуэль трёх лиц Классическая дилемма заключённых Доминирующие стратегии Игра в нормальной форме, доминирующие стратегии Игра "Гарвард", доминируемые стратегии Итеративное доминирование Равновесие Нэша, итеративное доминирование Упражнение: результат итеративного доминирования - равновесие Обсуждение итеративного доминирования Пример игры с несколькими равновесиями Нэша Игра "Угадай число": формулировка Игра "Угадай число": решение Самостоятельная работа Определения. Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
2	Смешанные равновесия	Лекции Смешанные стратегии Игра "Прятки": отсутствие равновесий Нэша, смешанные стратегии Игра "Тюремный покер" Игра про пионеров Игра "Усовершенствованные прятки" ("Пионеры и водка"): формулировка

		Поиск равновесия в полностью смешанных стратегиях Поиск всех равновесий Самостоятельная работа Определения. Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
3	Симметричные равновесия	Лекции Симметричные игры Игра "Белый Аист" Функции реакции: аукцион второй цены Симметричные равновесия Существование симметричного равновесия в симметричной игре Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
4	Динамическая теория игр	Лекции Введение в динамическую теорию игр Выборы мэра Выборы мэра: формализация, алгоритм Цермело Игра "Пираты и золотые слитки" Игра "Пираты и золотые слитки" - другой вариант Динамическая теория игр Общее описание Понятие решения Бинарные игры Детские игры про камни Игра "Гексагон" ("Земля-вода") Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
5	Случайность и неполная информация	Лекции Русская рулетка Учёт случайности. Игра "Русская рулетка" Игра "Русская рулетка" - решение Ультиматум и Сороконожка Формулировка игр "Сороконожка": решение "Сороконожка": моделирование неполной информации Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.

6	Секвенциальные равновесия и равновесия Байеса-Нэша	Лекции Секвенциальные равновесия Субъективные веры в информационных множествах Определение сильного и слабого секвенциальных равновесий Поиск секвенциального равновесия в "Сороконожке" с неполной информацией Игра "Координация" Постановка задачи Решение для равномерного распределения Игра "Встреча в метро" Постановка задачи Решение при полной информации Равновесие Байеса-Нэша Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
7	Промежуточный экзамен	Самостоятельная работа Тестирование – контрольная работа, решение задач.
8	Аукционы и равновесие дискретного отклика	Лекции Аукционы Введение Проклятие победителя, виды аукционов Аукцион второй цены: определение и формулировка теоремы Викри Аукцион второй цены: доказательство теоремы Викри Аукцион первой цены Аукцион первой цены: поиск функции реакции Равновесие дискретного отклика Определение на примере игры "Сороконожка" Применение в игре "Сороконожка" Общее определение Одна теорема и игра "Ультиматум" Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
9	Кооперативная теория игр. Ядро	Лекции Кооперативная теория игр: "Подземные музыканты" Кооперативная игра с побочными платежами Ядро кооперативной игры Пример игры с пустым ядром Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции,

		изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
10	Кооперативная теория игр. Вектор Шепли	Лекции Вектор Шепли Супермодулярные кооперативные игры Игра "Аэропорт" Игра "Аэропорт" и похожие: вычисление вектора Шепли Игра "Совет безопасности ООН": поиск ядра Игра "Совет безопасности ООН": поиск вектора Шепли. Индексы влияния Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
11	Применение теории игр в экономике. Экономика обмена	Лекции Обзор применений теории игр в экономике Экономика обмена (модель Вальраса): введение Экономика обмена: теория потребителя и требования к решению Экономика обмена: коалиционная устойчивость Экономика обмена: введение цен Экономика обмена: равновесие Вальраса Экономика обмена: существование равновесия Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
12	Классические модели Курно и Бертрана. Монополистическая конкуренция	Лекции Модели Курно и Бертрана Модель Курно: пример с экспонентой Классические модели Курно и Бертрана Поиск равновесий в модели Бертрана Монополистическая конкуренция Монополистическая конкуренция, пространственные модели Модель Хотеллинга Теорема Эрроу Принцип медианного избирателя Стабильные марьяжи Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
	Итоговая аттестация	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций

		Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию
--	--	--

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Задача 1. Игра "Сумма 100". Количество равновесий.

Двое игроков называют число от 1 до 100. Выигрыши распределяются следующим образом: игроки всегда получают в сумме не более 100 рублей, самый нежадный получает то, что просит. Более формально: если игроки выбрали числа a и b , то выигрыши составят (a, b) , если $a + b \leq 100$. Если $a + b > 100$, то выигрыши равны $(a, 100 - a)$, если $b > a$, $(100 - b, b)$, если $a > b$ и $(50, 50)$, если $a = b$. Сколько равновесий по Нэшу в этой игре?

Задача 2. Простая версия игры «Жадина».

Двое игроков называют число 1, 2 или 3. Если сумма названных чисел не превосходит 4, то каждый получает то, что просил. Если сумма строго больше 4, каждый получает 0.

Пусть p_1, p_2, p_3 - смешанная стратегия второго игрока. Какой ожидаемый выигрыш первого игрока от применения чистой стратегии [1]?

- 1) p_1
- 2) $p_1 + p_2 + p_3$
- 3) $p_1 + 2p_2 + 3p_3$
- 4) p_1^2

Пусть p_1, p_2, p_3 - смешанная стратегия второго игрока. Какой ожидаемый выигрыш первого игрока от применения чистой стратегии [2]?

- 1) $p_2 + p_3$
- 2) $2p_2 + 3p_3$
- 3) $p_1 + 2p_2 + 3p_3$
- 4) $2p_1 + 2p_2$

Пусть p_1, p_2, p_3 - симметричное равновесие в смешанных стратегиях, причём все $p_i \neq 0$. Чему равно p_1 ?

Пусть p_1, p_2, p_3 - симметричное равновесие в смешанных стратегиях, причём все $p_i \neq 0$. Чему равно p_2 ?

Задача 3. Безбилетник и ленивый контролёр.

Рассмотрим модификацию задачи о безбилетнике и контролёре. Имеется электричка из трёх вагонов. Безбилетник выбирает любой из трёх вагонов. Контролёр находится у первого вагона, и ему лень идти до остальных. А именно, затраты его на то, чтобы дойти до второго вагона равны 2, а до третьего 4. Если контролёр и безбилетник оказываются в одном вагоне, то контролёр штрафует безбилетника на 5. Если в разных вагонах никто никому не платит.

Какие в этой игре есть равновесия Нэша в чистых стратегиях?

- 1) Безбилетник садится в третий вагон, а контролёр в первый.
- 2) Оба садятся в первый вагон.
- 3) Оба садятся в третий вагон
- 4) В этой игре нет чистых равновесий Нэша

Предположим, что безбилетник использует смешанную стратегию $1/5[1]+3/5[2]+1/5[3]$. Какой ожидаемый выигрыш получит контролёр, сев в третий вагон?

Какой наилучший ответ контролёра на эту стратегию безбилетника?

- 1) Идти в первый вагон.
- 2) Идти во второй вагон
- 3) Использовать смешанную стратегию $1/3[1]+1/3[2]+1/3[3]$
- 4) Использовать смешанную стратегию $1/5[1]+3/5[2]+1/5[3]$
- 5) Ни одна из перечисленных стратегий не подходит.

Рассмотрим все возможные смешанные равновесия по Нэшу. Напишите минимальные значения вероятностей, с которыми безбилетник использует стратегии [1] и [2] в этих равновесиях (сначала [1], затем [2]).

Задача 4. Камешки-5.

На столе лежат две кучки камней. Играют двое, ходят по очереди. На каждом ходе игрок берёт либо любое количество камней из одной кучки, либо одинаковое количество из обеих кучек. К примеру, из позиции (2,3) можно перейти в позиции (1,3), (0,3), (2,2), (2,1), (2,0), (1,2), (0,1). Выигрывает тот, кто заберет последний камень.

В каких из перечисленных ниже начальных позиций гарантированно выигрывает первый? (в скобках указано число камней в каждой кучке)

- 1) (0, 2)
- 2) (1, 1)
- 3) (2, 1)
- 4) (1, 3)
- 5) (2, 4)

Рассмотрим начальную позицию (10,12). Введите ход первого игрока, при котором он гарантированно выиграет в формате "n,m" (без пробелов и кавычек!), где n,m - количество камней, оставшихся в кучках. К примеру, "8,10" означает, что было взято по 2 камня из каждой кучки. Если первый игрок не может гарантированно выиграть, напишите в ответе "нет"(без кавычек).

4.3. Список рекомендуемой литературы

1. Захаров А.В. Теория игр в общественных науках. М.: препринт НИУ ВШЭ, 2014
2. Данилов В.Н., Лекции по теории игр. М.: препринт РЭШ, 2002
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевконяс Е.В. Теория игр. Санкт-Петербург (БВХ-Петербург) 2012 г.
4. Мазалов В. Математическая теория игр и приложения. Санкт-Петербург, Лань, 2010 г.
5. Меньшиков И. Лекции по теории игр и экономическому моделированию, М.: Контакт Плюс 2010 г.
6. Губко М., Новиков Д. Теория игр в управлении организационными системами. М: Синтез, 2002 г.
7. Осборн М., Рубинштейн А. Теория игр и экономическое поведение. М.: Издательский дом "Вильямс", 2019.

8. Маккарти Дж., Анджелло Р. Теория игр и ее приложения. М.: Издательство "Вильямс", 2018.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Общая информация о курсе		
Равновесия Нэша	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Смешанные равновесия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Симметричные равновесия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Динамическая теория игр	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Случайность и неполная информация	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Секвенциальные равновесия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий,

и равновесия Байеса-Нэша		тестирование
Промежуточный экзамен	Установленное количество выполненных заданий	Тестирование
Аукционы и равновесие дискретного отклика	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Кооперативная теория игр. Ядро	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Кооперативная теория игр. Вектор Шепли	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Применение теории игр в экономике. Экономика обмена	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Классические модели Курно и Бертрана. Монополистическая конкуренция	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Итоговая аттестация	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

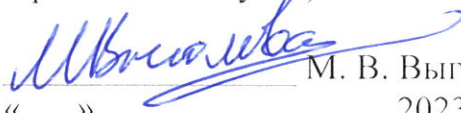
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

 Ж. И. Зубцова
«___» _____ 2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

 М. В. Выголова
«___» _____ 2023 г.