

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

Др. физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2023 г.



**Дополнительная общеобразовательная
программа
дополнительного образования
«Теория графов»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Теория графов» является познакомить слушателей с вопросами и методами теории графов, развить у неподготовленных слушателей культуру математического мышления.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): курс доступен широкому кругу слушателей. Для освоения материала будет достаточно знания математики на хорошем школьном уровне и базовых знаний комбинаторики.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 12 недель (9 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен: знать:

- понятие графа
 - виды, характеристики и свойства графов
 - задачу о правильных раскрасках и о возможности нарисовать данный граф на плоскости без пересечений ребер
 - способы определять деревья
 - понятия эйлеровых и гамильтоновых циклов, паросочетаний
- уметь:
- решать задачи о правильных раскрасках
 - нарисовать граф на плоскости без пересечений ребер
 - решать задачи экстремальной теории графов.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Понятие графа и виды графов.
2. Различные применения графов: от Кенигсбергских мостов до Интернета.
3. Связность графа, подграфы и степень вершины.
4. Эквивалентные определения деревьев.
5. Планарность и критерий Куратовского
6. Формула Эйлера.

7. Хроматическое число планарного графа.
8. Перечисление деревьев: код Прюфера и формула Кэли.
9. Формула для числа унициклических графов.
10. Эйлеровы циклы и критерий эйлеровости.
11. Гамильтоновы циклы. Критерий Дирака и критерий Хватала.
12. Паросочетания. Теорема Холла и Кёнига.
13. Экстремальная теория графов. Теорема Турана.
14. Аналог теоремы Турана для графов на плоскости.
15. Теория Рамсея. Знакомства среди шести человек.
16. Определение числа Рамсея.
17. Нижняя и верхняя оценки чисел Рамсея.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол- во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Введение. Базовые понятия теории графов	11	2,5	8,5
2	Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли	11	2,5	8,5
3	Планарные графы. Формула Эйлера	11,6	2,8	8,8
4	Унициклические графы и Эйлеровы циклы	8,8	1,4	7,4
5	Гамильтоновы циклы	11,2	2,8	8,4
6	Сравнение двух признаков гамильтоновости	7,8	1,4	6,4
7	Теорема Холла	9,2	2,1	7,1
8	Теорема Кёнига	8,6	1,8	6,8
9	Теорема Турана	8,2	1,6	6,6
10	Аналог теоремы Турана	8,8	1,9	6,9
11	Теория Рамсея	9,8	2,4	7,4
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	24,2	83,8

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Введение. Базовые понятия теории графов	Введение. Базовые понятия теории графов	0,1	0,1
	Виды и примеры графов	0,6	0,6
	Граф. Определение и базовые свойства	0,7	0,7
	Семинар 1	1,1	1,1
	Тест 1		4
	Дополнительные материалы		2
2. Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли	Деревья	0,1	0,1
	Теорема об эквивалентных определениях дерева	0,9	0,9
	Формула Кэли для числа деревьев	0,7	0,7
	Семинар 2	0,8	0,8
	Тест 2		4
	Дополнительные материалы		2
3. Планарные графы. Формула Эйлера	Планарные графы	0,6	0,6
	Формула Эйлера	1,4	1,4
	Семинар 3	0,8	0,8
	Тест 3		4
	Дополнительные материалы		2
4. Унициклические графы и Эйлеровы циклы	Унициклические графы	0,5	0,5
	Эйлеровы циклы	0,8	0,8
	Семинар 4	0,1	0,1
	Тест 4		4
	Дополнительные материалы		2
5. Гамильтоновы циклы	Критерий Дирака	0,8	0,8
	Критерий Хватала	1,3	1,3
	Семинар 5	0,7	0,7
	Тест 5		4
	Дополнительные материалы		1,6
6. Сравнение двух признаков гамильтоновости	Сравнение двух признаков гамильтоновости	1,4	1,4
	Тест 6		4
	Дополнительные материалы		1
7. Теорема Холла	Теорема Холла	1,3	1,3
	Семинар 7	0,8	0,8
	Тест 7		4
	Дополнительные материалы		1
8. Теорема Кёнига	Теорема Кёнига	1	1,5

9. Теорема Турана	Семинар 8	0,8	1,3
	Тест 8		4
	Теорема Турана	1,1	1,1
	Семинар 9	0,5	0,5
	Тест 9		4
10. Аналог теоремы Турана	Дополнительные материалы		1
	Аналог теоремы Турана для графов на плоскости	0,6	0,6
	Некоторые уточнения	0,4	0,4
	Семинар 10	0,9	0,9
	Тест 10		4
11. Теория Рамсея	Дополнительные материалы		1
	Знакомства среди шести человек	0,6	0,6
	Числа Рамсея	1,3	1,3
	Нижняя оценка чисел Рамсея	0,6	0,6
	Семинар 11	1,2	1,2
Экзамен	Тест 11		4
	Дополнительные материалы		1
	Итоговое тестирование	1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Введение. Базовые понятия теории графов	Лекции Введение. Базовые понятия теории графов Виды и примеры графов Примеры графов. Граф и его изображения Ориентированные графы Кёнигсбергские мосты Граф интернета Граф. Определение и базовые свойства Определение графа Маршруты в графах Связность, подграфы Степень вершины Практические занятия Знакомства Число мультиграфов Путь в графе Перенумерация цикла Последовательности степеней

		Замкнутый маршрут Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
2	Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли	Лекции Деревья, эквивалентные определения дерева Теорема об эквивалентных определениях дерева Формулировка теоремы. Доказательство первой импликации Доказательство второй импликации Доказательство третьей импликации Доказательство четвёртой импликации Формула Кэли для числа деревьев Число деревьев Доказательство формулы. Кодирование деревьев Построение кодов Прюфера Взаимно однозначное соответствие кодов и деревьев. Декодирование Практические занятия Минимальное число рёбер Центр дерева Деревья с заданной последовательностью степеней Код Прюфера из различных чисел Число неизоморфных деревьев Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
3	Планарные графы. Формула Эйлера	Лекции Планарные графы Планарность. Гипотеза о четырёх красках Примеры непланарных графов Критерий Куратовского Формула Эйлера Плоские графы, грани и теорема Жордана Формула Эйлера Следствие для числа рёбер Хроматическое число планарных графов Доказательство оценки хроматического числа Практические занятия Число пересечений в полном графе Число рёбер в планарном графе и формула Эйлера Характеризация двудольных графов Двудольные планарные графы

		Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
4	Унициклические графы и Эйлеровы циклы	Лекции Унициклические графы Формула для числа унициклических графов Доказательство формулы Эйлеровы циклы Эйлеровы циклы Критерий эйлеровости Первая часть доказательства критерия Вторая часть доказательства критерия Практические занятия Ориентация графа Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
5	Гамильтоновы циклы	Лекции Критерий Дирака Гамильтоновы циклы, теорема Дирака Множества соседей концов максимального пути Завершение доказательства теоремы Дирака Критерий Хватала Независимые множества Вершинная связность. Критерий Хватала Доказательство. В графе есть циклы Подграф без максимального цикла Соседи связной компоненты Соседи компоненты и максимальный цикл Число соседей больше связности Завершение доказательства Практические занятия Число гамильтоновых циклов в полном двудольном графе Число независимости, связность Непересекающиеся гамильтоновы циклы Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
6	Сравнение двух признаков гамильтоновости	Лекции Сравнение двух признаков гамильтоновости на конкретном графе. Определение графа Работает ли признак Дирака? Признак Хватала. Оценка связности через общих соседей

		Число общих соседей Примеры независимых множеств, теорема о числе независимости Доказательство теоремы Связь с теорией кодирования Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
7	Теорема Холла	Лекции Задача о свадьбах. Паросочетания Необходимое условие существования паросочетания. Теорема Холла Доказательство теоремы Холла. Два случая Разбор случая 1 Разбор случая 2 Практические занятия Паросочетания и степени вершин Паросочетания в деревьях К-регулярный двудольный граф Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
8	Теорема Кёнига	Лекции Вершинное покрытие, теорема Кёнига Первая часть доказательства. Чередующиеся цепи Вторая часть доказательства. Разбиение множества вершин Третья часть доказательства. Построение вершинного покрытия Завершение доказательства. Вершинное покрытие работает Практические занятия 2-регулярные двудольные графы Теорема Холла из теоремы Кёнига Теорема Кёнига из теоремы Холла Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование — контрольная работа, решение задач.
9	Теорема Турана	Лекции Число независимости, кликовое число Теорема Турана Доказательство теоремы Турана Пример графа, на котором оценка Турана достигается Теорема Турана в терминах кликового числа

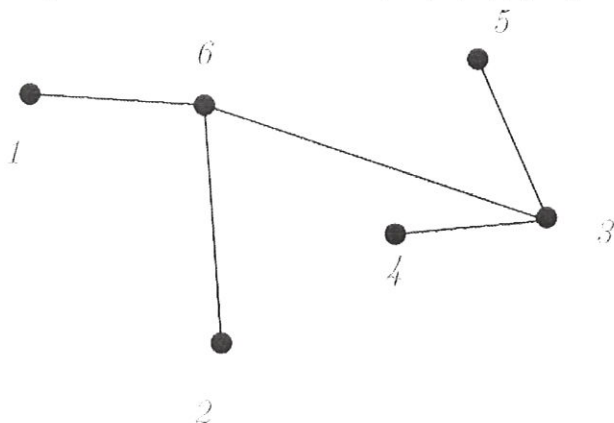
		Практические занятия Двудольный подграф Вершинное покрытие для графа без треугольников Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
10	Аналог теоремы Турана	Лекции Аналог теоремы Турана для графов на плоскости Задача про графы на плоскости Решение задачи Некоторые уточнения Уточнение оценки для дистанционного графа на плоскости Обобщения теоремы Турана Практические занятия Граф без чётных циклов Хроматическое число и число независимости Хроматическое число и максимальная степень Хроматическое число графа и его дополнения Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
11	Теория Рамсея	Лекции Знакомства среди шести человек Теорема про знакомства среди шести человек Начало доказательства. Применение принципа Дирихле Завершение доказательства Формулировка в терминах независимых множеств и раскрасок Пяти вершин недостаточно Числа Рамсея Определение чисел Рамсея Значения $R(s,t)$ для малых s Верхняя оценка чисел Рамсея с помощью рекурсии Доказательство. Принцип Дирихле Завершение доказательства Численные верхние оценки чисел Рамсея Нижняя оценка чисел Рамсея Нижняя оценка числа Рамсея. Что требуется доказать? Подсчёт графов с большими полными подграфами Вычисления. Завершение доказательства теоремы Обсуждение нижних оценок Практические занятия Число Рамсея для звезды

		Число Рамсея для дерева и полного графа Раскраска плоскости Монотонные последовательности Пути или звёзды <i>Самостоятельная работа</i> Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – контрольная работа, решение задач.
	Итоговая аттестация	<i>Практическое занятие:</i> итоговое тестирование по материалам лекций <i>Самостоятельная работа:</i> подготовка к итоговому тестированию

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Вопрос 1. Сколько всего различных помеченных (простых) графов на вершинах?

Вопрос 2. Сопоставьте код Прюфера дереву на рисунке.



- 1) (6, 6, 3, 3)
- 2) (1, 2, 4, 5)
- 3) (1, 2, 4, 5, 3)
- 4) (6, 6, 3, 3, 6)

Вопрос 3. Граф называется внешне-планарным, если его можно нарисовать на плоскости таким образом, что все вершины лежат в одной грани (внутри или на границе). Чему может быть равно хроматическое число такого графа, если граф содержит хотя бы одно ребро?

- 1) 2
- 2) 2, 3
- 3) 2, 3, 4
- 4) 2, 4

Вопрос 4. Пусть G – это связный граф с n вершинами и $n + 1$ ребрами. Сколько различных простых циклов может быть в графе G ?

- 1) 2, 3
- 2) 2, 4
- 3) 1, 2, 3
- 4) 2, 3, 4

4.3. Список рекомендуемой литературы

1. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. Лекции по теории графов. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
2. А. А. Зыков. Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, 1969.
3. М. Свами, К. Тхуласираман. Графы, сети и алгоритмы. М.: Мир, 1984.
4. M. Aigner, G. M. Ziegler. Proofs From THE BOOK. Fourth Edition. Springer, 2009.
5. B. Bollobás. Modern Graph Theory. Springer, 1998.
6. J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer, 2008.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Введение. Базовые понятия теории графов	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Эквивалентные определения дерева. Формула Кэли	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

Планарные графы. Формула Эйлера	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Унициклические графы и Эйлеровы циклы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Гамильтоновы циклы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Сравнение двух признаков гамильтоновости	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Теорема Холла	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Теорема Кёнига	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Теорема Турана	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Аналог теоремы Турана	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Теория Рамсея	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Итоговая аттестация	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

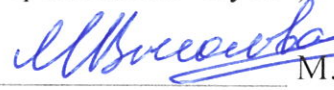
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

«» Ж. И. Зубцова
2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

«» М. В. Выголова
2023 г.