

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2023 г.



**Дополнительная общеобразовательная
программа
дополнительного образования
«Случайные процессы»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Случайные процессы» является изучение теории случайных процессов, их свойств и применений в различных областях науки и техники.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): Программа предназначена для любых слушателей, желающих изучить теорию случайных процессов. Курс посвящен достаточно сложному разделу математики, поэтому от слушателей потребуются хорошее знание базового университетского курса теории вероятностей, а также владение такими основными математическими курсами, как математический анализ и линейная алгебра.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 11 недель (9-10 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- основные понятия теории случайных процессов, базовые классы случайных процессов и свойства их траекторий, фундаментальные теоремы и другие утверждения об изученных стохастических моделях;
- основные методы анализа в теории случайных процессов,

уметь:

- вычислять основные числовые характеристики случайных процессов.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Ветвящиеся случайные процессы.
2. Пуассоновский процесс.
3. Гауссовские процессы.
4. Винеровский процесс (процесс броуновского движения).
5. Марковские моменты
6. Условное математическое ожидание.
7. Мартингалы.
8. Марковские цепи с дискретным временем.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона	11,2	3,6	7,6
2	Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс	12,1	2,7	9,4
3	Многомерное нормальное распределение, гауссовские процессы	12,4	2,8	9,6
4	Винеровский процесс (процесс броуновского движения)	14,9	3,9	11
5	Марковские моменты	10	3	7
6	Условные математические ожидания	8,6	2,3	6,3
7	Условные распределения	8,6	2,3	6,3
8	Мартингалы	11	3,5	7,5
9	Марковские цепи	9,4	2,7	6,7
10	Стационарные и предельные распределения марковских цепей	7,8	1,9	5,9
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	29,7	78,3

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона	Случайные процессы. Первые определения.	0,4	0,4
	Пример случайных процессов	0,4	0,4
	Ветвящиеся процессы - математическая модель	0,2	0,2
	Производящие функции	0,1	0,1
	Вывод рекуррентного соотношения между производящими функциями в ветвящемся процессе	0,2	0,2
	Вывод уравнения для вероятности вырождения	0,2	0,2

	Формулировка теоремы о вероятности вырождения	0,1	0,1
	Доказательство теоремы о вероятности вырождения. Часть 1	0,2	0,2
	Доказательство теоремы о вероятности вырождения. Часть 2	0,3	0,3
	Следствие из теоремы о вероятности вырождения	0,1	0,1
	Общее число частиц в ветвящемся процессе. Рекуррентное соотношение для производящих функций	0,3	0,3
	Производящая функция общего числа частиц	0,3	0,3
	Разбор примера с геометрическим распределением	0,3	0,3
	Семинары 1	0,5	
	Тест 1		4
	Дополнительные материалы		0,5
2. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс	Процессы с независимыми приращениями. Теорема существования	0,3	0,3
	Пуассоновский процесс. Доказательство существования	0,2	0,2
	Пуассоновский процесс. Явная конструкция	0,2	0,2
	Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 1. Совместная плотность	0,1	0,1
	Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 2. Выписывание вероятности	0,1	0,1
	Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 3. Вычисление интеграла	0,3	0,3
	Свойства траекторий пуассоновского процесса	0,3	0,3
	Семинары 2	1,2	1,2
	Тест 2		4
	Дополнительные материалы		2,7
3. Многомерное нормальное распределение, гауссовские процессы	Многомерное нормальное распределение	0,2	0,2
	Доказательство теоремы о трех эквивалентных определениях	0,7	0,7
	Свойства гауссовских случайных векторов	0,2	0,2
	Критерий независимости компонент гауссовских случайных векторов	0,3	0,3
	Плотность гауссовского случайного вектора	0,2	0,2
	Гауссовские случайные процессы. Свойства	0,3	0,3

	ковариационной функции		
	Формулировка теоремы о существовании гауссовских процессов	0,1	0,1
	Семинары 3	0,8	0,8
	Тест 3		4
	Дополнительные материалы		2,8
4. Винеровский процесс (процесс броуновского движения)	Броуновское движение. Доказательство существования	0,2	0,2
	Формулировка теоремы об эквивалентном определении броуновского движения	0,1	0,1
	Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 1. Вывод второго определения из первого	0,2	0,2
	Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 2. Проверка корректности второго определения	0,1	0,1
	Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 3. Вывод первого определения из второго	0,2	0,2
	Модификации случайного процесса. Теорема Колмогорова	0,3	0,3
	Существование непрерывной модификации броуновского движения	0,3	0,3
	Замечание к теореме Колмогорова	0,1	0,1
	Свойства траекторий броуновского движения	0,1	0,1
	Закон повторного логарифма для броуновского движения	0,2	0,2
	Локальный закон повторного логарифма	0,3	0,3
	Семинары 4	1,8	1,8
	Тест 4		4
	Дополнительные материалы		3,1
5. Марковские моменты	Фильтрации	0,3	0,3
	Марковские моменты и моменты остановки	0,2	0,2
	Строго марковское свойство броуновского движения	0,2	0,2
	Сигма-алгебра, порожденная марковским моментом	0,2	0,2
	Принцип отражения для броуновского движения. Первый момент достижения фиксированного уровня	0,3	0,3
	Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке и значения на правом конце	0,3	0,3

	Доказательство теоремы о совместном распределении	0,3	0,3
	Распределение максимума броуновского движения на отрезке	0,2	0,2
	Семинары 5	1	
	Тест 5		4
	Дополнительные материалы		1
6. Условные математические ожидания	Определение условного математического ожидания	0,2	0,2
	Существование условного математического ожидания	0,4	0,4
	Вычисление условного математического ожидания в дискретном случае	0,3	0,3
	Свойства 1-2 условного математического ожидания	0,1	0,1
	Свойства 3-4 условного математического ожидания	0,2	0,2
	Свойства 5-6 условного математического ожидания	0,1	0,1
	Свойство 7 условного математического ожидания	0,1	0,1
	Формулировка свойства 8 условного математического ожидания	0,1	0,1
	Свойство 9 условного математического ожидания	0,2	0,2
	Свойство 10 условного математического ожидания	0,2	0,2
	Семинары 6	0,4	
	Тест 6		4
	Дополнительные материалы		0,4
7. Условные распределения	Условные распределения, основные определения	0,2	0,2
	Связь с обычным условным математическим ожиданием	0,2	0,2
	Условная плотность	0,1	0,1
	Условная плотность, вычисление условных математических ожиданий с ее помощью	0,2	0,2
	Теорема об условной плотности	0,2	0,2
	Пример вычисления условного математического ожидания с помощью условной плотности	0,3	0,3
	Вычисление УМО для функции от независимых случайных величин	0,1	0,1
	Другие примеры вычисления условного математического ожидания	0,2	0,2

	Семинары 7	0,8	
	Тест 7		4
	Дополнительные материалы		0,8
8. Мартингалы	Мартингалы, основные определения	0,1	0,1
	Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями	0,1	0,1
	Примеры мартингалов и субмартингалов	0,2	0,2
	Еще примеры: мартингалы Леви и преобразования, дающие субмартингалы	0,2	0,2
	Формулировка теоремы об остановке	0,1	0,1
	Доказательство теоремы об остановке	0,5	0,5
	Следствия из теоремы об остановке	0,3	0,3
	Задача о разорении игрока: постановка и математическая модель	0,2	0,2
	Задача о разорении игрока: момент окончания игры	0,2	0,2
	Задача о разорении игрока: нахождение вероятности разорения в симметричном случае	0,1	0,1
	Задача о разорении игрока: нахождение вероятности разорения в несимметричном случае	0,2	0,2
	Теорема об остановке для непрерывного времени	0,2	0,2
	Семинары 8	1,1	
	Тест 8		4
	Дополнительные материалы		1,1
9. Марковские цепи	Марковские цепи, определения	0,2	0,2
	Лемма о независимости прошлого и будущего	0,2	0,2
	Переходные вероятности и их свойства	0,2	0,2
	Доказательство свойств переходных вероятностей	0,1	0,1
	Матрицы переходных вероятностей	0,1	0,1
	Существование марковских цепей	0,2	0,2
	Примеры марковских цепей	0,2	0,2
	Однородные марковские цепи	0,3	0,3
	Примеры однородных марковских цепей	0,1	0,1
	Семинары 9	1,1	
	Тест 9		4
	Дополнительные материалы		1,1
10. Стационарные и предельные	Стационарные распределения для марковских цепей	0,2	0,2
	Предельные распределения для марковских	0,2	0,2

распределения марковских цепей	цепей. Эргодическая теорема		
	Доказательство эргодической теоремы. Часть 1. Максимумы и минимумы по строчкам	0,1	0,1
	Доказательство эргодической теоремы. Часть 2. Доказательство сходимости	0,3	0,3
	Доказательство эргодической теоремы. Часть 3. Свойства предела	0,1	0,1
	Следствия из эргодической теоремы	0,3	0,3
	Примеры стационарных и предельных распределений	0,2	0,2
	Семинары 10	0,5	
	Тест 10		4
	Дополнительные материалы		0,5
Итоговая аттестация	Экзамен	1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона	Лекции Случайные процессы. Первые определения. Пример случайных процессов Ветвящиеся процессы - математическая модель Производящие функции Вывод рекуррентного соотношения между производящими функциями в ветвящемся процессе Вывод уравнения для вероятности вырождения Формулировка теоремы о вероятности вырождения Доказательство теоремы о вероятности вырождения Следствие из теоремы о вероятности вырождения Общее число частиц в ветвящемся процессе. Рекуррентное соотношение для производящих функций Производящая функция общего числа частиц Разбор примера с геометрическим распределением Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
2	Процессы с независимыми	Лекции

	приращениями. Пуассоновский процесс	Процессы с независимыми приращениями. Теорема существования Пуассоновский процесс. Доказательство существования Пуассоновский процесс. Явная конструкция Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 1. Совместная плотность Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 2. Выписывание вероятности Доказательство явной конструкции пуассоновского процесса. Часть 3. Вычисление интеграла Свойства траекторий пуассоновского процесса Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
3	Многомерное нормальное распределение, гауссовские процессы	Лекции Многомерное нормальное распределение Доказательство теоремы о трех эквивалентных определениях Свойства гауссовских случайных векторов Критерий независимости компонент гауссовских случайных векторов Плотность гауссовского случайного вектора Гауссовские случайные процессы. Свойства ковариационной функции Формулировка теоремы о существовании гауссовских процессов Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
4	Винеровский процесс (процесс броуновского движения)	Лекции Броуновское движение. Доказательство существования Формулировка теоремы об эквивалентном определении броуновского движения Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 1. Вывод второго определения из первого

		Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 2. Проверка корректности второго определения Доказательство теоремы об эквивалентном определении броуновского движения. Часть 3. Вывод первого определения из второго Модификации случайного процесса. Теорема Колмогорова Существование непрерывной модификации броуновского движения Замечание к теореме Колмогорова Свойства траекторий броуновского движения Закон повторного логарифма для броуновского движения Локальный закон повторного логарифма Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
5	Марковские моменты	Лекции Фильтрации Марковские моменты и моменты остановки Строго марковское свойство броуновского движения Сигма-алгебра, порожденная марковским моментом Принцип отражения для броуновского движения. Первый момент достижения фиксированного уровня Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке и значения на правом конце Доказательство теоремы о совместном распределении Распределение максимума броуновского движения на отрезке Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
6	Условные математические ожидания	Лекции Определение условного математического ожидания Существование условного математического ожидания Вычисление условного математического ожидания в дискретном случае Свойства 1-2 условного математического ожидания

		Свойства 3-4 условного математического ожидания Свойства 5-6 условного математического ожидания Свойство 7 условного математического ожидания Формулировка свойства 8 условного математического ожидания Свойство 9 условного математического ожидания Свойство 10 условного математического ожидания Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
7	Условные распределения	Лекции Условные распределения, основные определения Связь с обычным условным математическим ожиданием Условная плотность Условная плотность, вычисление условных математических ожиданий с ее помощью Теорема об условной плотности Пример вычисления условного математического ожидания с помощью условной плотности Вычисление УМО для функции от независимых случайных величин Другие примеры вычисления условного математического ожидания Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
8	Мартингалы	Лекции Мартингалы, основные определения Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями Примеры мартингалов и субмартингалов Еще примеры: мартингалы Леви и преобразования, дающие субмартингалы Формулировка теоремы об остановке Доказательство теоремы об остановке Следствия из теоремы об остановке Задача о разорении игрока: постановка и математическая модель

		Задача о разорении игрока: момент окончания игры Задача о разорении игрока: нахождение вероятности разорения в симметричном случае Задача о разорении игрока: нахождение вероятности разорения в несимметричном случае Теорема об остановке для непрерывного времени Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
9	Марковские цепи	Лекции Марковские цепи, определения Лемма о независимости прошлого и будущего Переходные вероятности и их свойства Доказательство свойств переходных вероятностей Матрицы переходных вероятностей Существование марковских цепей Примеры марковских цепей Однородные марковские цепи Примеры однородных марковских цепей Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
10	Стационарные и предельные распределения марковских цепей	Лекции Стационарные распределения для марковских цепей Предельные распределения для марковских цепей. Эргодическая теорема Доказательство эргодической теоремы. Часть 1. Максимумы и минимумы по строкам Доказательство эргодической теоремы. Часть 2. Доказательство сходимости Доказательство эргодической теоремы. Часть 3. Свойства предела Следствия из эргодической теоремы Примеры стационарных и предельных распределений Практические занятия Решение задач по теме лекций Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование –

		решение задач.
	Итоговая аттестация	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Задача 1. Какие из этих функций являются производящими функциями некоторых случайных величин?

- 1) $1 - z$
- 2) $\frac{1+z}{2}$
- 3) $pz + 1 - p, p \in (0, 1)$
- 4) $e^{\lambda(z-1)}, \lambda > 0$

Задача 2. Пусть $(N_t, t \geq 0)$ - пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Чему равняется предел отношения $\frac{N_t}{t}$ при $t \rightarrow +\infty$ в смысле сходимости почти наверное?

- 1) 0
- 2) λ
- 3) $+\infty$
- 4) λ^{-1}

Задача 3. Пусть (X, Y) - гауссовский случайный вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Чему равно $E e^{X-Y}$?

- 1) e^6
- 2) $e^{\frac{3}{2}}$
- 3) e^{-4}
- 4) $e^{-\frac{5}{2}}$

Задача 4. Пусть $(W_t, t \geq 0)$ - винеровский процесс. Чему равна ковариационная матрица случайного вектора $(W_2, W_3 + W_5)$?

- 1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$
- 2) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$
- 3) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$
- 4) $\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

4.3. Список рекомендуемой литературы

1. Райзер Ю. Случайные процессы. М.: МЦНМО, 2015.
2. Пьерс Дж. Введение в теорию случайных процессов. М.: МТ Пресс, 2006.
3. Чернов А. А. Методы статистического анализа временных рядов. М.: Финансы и статистика, 2016.
4. Боков А. В., Быков А.С. Стохастические методы в теории экономических процессов. М.: Логос, 2017.
5. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 2018.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <https://ru.wikipedia.org> – электронная энциклопедия Wikipedia.
4. <https://apps.openedu.ru/> - Платформа Открытого образования.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

Многомерное нормальное распределение, гауссовские процессы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Винеровский процесс (процесс броуновского движения)	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Марковские моменты	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Условные математические ожидания	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Условные распределения	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Мартингалы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Марковские цепи	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Стационарные и предельные распределения марковских цепей	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Итоговая аттестация	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

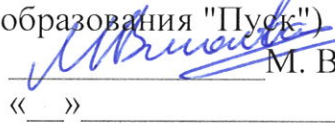
7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

 Ж. И. Зубцова
«__» __ 2023 г.

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

 М. В. Выголова
«__» __ 2023 г.