

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

**Физтех-школа физики и исследований
имени Ландау
(ЛФИ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа физики и исследований имени Ландау. – Москва: МФТИ, 2021. – 44 с.

Учебное издание

СБОРНИК программ и заданий

**Физтех-школа физики и исследований имени Ландау
(ЛФИ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка: *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 2,75. Тираж 85 экз.
Заказ № 22.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы современной физики**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
физтех-школа: **ЛФИ (только 2-88Х)**
кафедра: **общей физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.;

физ. практикум: вариативная часть – 2 зачет. ед.;

лекции – 30 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 6 семестр

лабораторные занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90 Самостоятельная работа –
теор. курс – 45 часов
физ. практикум – 60 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. В.Н. Глазков
д.т.н., проф. А.В. Кубышкин
к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. А.О. Раевский

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

Квантовая макрофизика

1. Кристаллические структуры твердых тел, трансляционная симметрия кристаллов, решетка Бравэ, элементарная и примитивная ячейки, базис. Рентгеновские и нейтронные методы исследования кристаллических структур, дифракция Брэгга–Вульфа, обратная решетка, зона Бриллюэна.
2. Типы связей в кристаллах: кулоновская (ионные кристаллы), ковалентная связь (атомные кристаллы), ван-дер-ваальсовская (молекулярные кристаллы), металлическая (металлы). Энергия отталкивания, потенциал Леннарда–Джонса. Дефекты кристаллической решетки.
3. Гармонические колебания одномерной решетки одинаковых атомов и решетки из чередующихся атомов двух сортов. Адиабатическое приближение. Законы дисперсии, квазиимпульс, акустические и оптические моды колебаний атомов в кристаллах. Переход к нормальным модам. Фононы как квазичастицы, аналогия с фотонами.
4. Возбужденные состояния кристалла. Решеточная теплоемкость. Закон Дюлонга и Пти. Дебаевское приближение для акустической ветви колебаний твердого тела, температура Дебая. Модель Эйнштейна для описания оптических ветвей колебаний твердого тела. Решеточная теплопроводность, процессы переброса.
5. Модель свободных электронов. Характер распределения электронов по энергии при нуле температур, наличие максимальной энергии (энергия Ферми). Энергетическое распределение электронов при ненулевой температуре (распределение Ферми). Химпотенциал, температура вырождения. Плотность электронных состояний при энергии Ферми. Электронная теплоемкость и ее температурная зависимость, соотношение с решеточной теплоемкостью.
6. Физическая причина появления зон разрешенных и запрещенных значений энергии, модели слабой и сильной связи. Теорема Блоха. Расчет закона дисперсии в модели сильной связи. Фотонные кристаллы. Качественное объяснение различия в электропроводности изоляторов, полупроводников и металлов. Понятие о ферми-жидкости, электроны и дырки как квазичастицы.
7. Электропроводность классического газа носителей в модели Друде–Лоренца. Электропроводность металла. Роль длины свободного пробега. Электронная теплопроводность. Качественное различие механизмов релаксации энергии и импульса электронов в процессах тепло- и электропроводности, закон Видемана–Франца. Правило Маттисена для электронов проводимости в металлах. Температурная зависимость сечения рассеяния электронов на фононах и примесях и друг на друге. Закон Блоха–Грюнайзена.

8. Электронные и дырочные возбуждения в полупроводниках, заряд дырок. Эффективная масса носителей заряда. Условие электронейтральности. Собственные и примесные полупроводники, донорные и акцепторные уровни, оценка энергии мелких примесных уровней. Температурная зависимость положения уровня Ферми в полупроводниках.
9. Зависимость концентрации проводящих электронов от температуры. Электропроводность полупроводников. Подвижность носителей. Температурная зависимость времени релаксации электронов. Контактные явления в полупроводниках. Равенство химпотенциалов при равновесии. $(p-n)$ -переход во внешнем электрическом поле. Выпрямляющие свойства $(p-n)$ -перехода.
10. Сверхтекучесть. Квантовые возбуждения в сверхтекучей жидкости, закон дисперсии. Критерий сверхтекучести Ландау. Качественное объяснение отсутствия вязкости в сверхтекучем гелии. Явление сверхпроводимости, отличие сверхпроводника от идеального металла, эффект Мейсснера, лондоновская глубина проникновения. Роль кристаллической решетки в явлении сверхпроводимости, изотоп-эффект, куперовское спаривание. Качественное подобие сверхтекучести и сверхпроводимости как квантовых явлений в системе бозонов.
11. Длина когерентности, нулевой импульс пары, s -спаривание электронов. Связь длины когерентности с величиной сверхпроводящей щели. Величина щели в теории БКШ. Критическое магнитное поле. Критический ток, правило Сильсби. Квантование магнитного потока. Сверхпроводники I и II рода, понятие о вихрях магнитного потока, вихревая решетка, пиннинг. Первое и второе критические поля, оценки их величин. Высокотемпературные сверхпроводники. Области практического использования и перспективы применения сверхпроводимости.
12. Эффект Ааронова–Бома. Низкоразмерные структуры, понятие о квантовых ямах, проволоках и точках. Двухмерный характер движения электронов в структурах металл–окисел–полупроводник (МОП-структура). Квантование Ландау. Эффект Холла в полупроводниках, холловское удельное сопротивление (постоянная Холла). Квантовый эффект Холла, квантовый эталон сопротивления.
13. Магнетизм веществ: диа-, пара- и ферромагнетики. Формула Ланжевена–Бриллюэна для описания намагничивания парамагнетиков. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Квантовая природа ферромагнетизма. Модель Гейзенберга для описания обменного взаимодействия, энергия анизотропии. Одноионная анизотропия. Модель Изинга.
14. Теория среднего поля для описания магнитного упорядочения. Закон Кюри–Вейсса. Возбуждения в спиновой системе ферромагнетиков. Классическое и квантовое описание спиновых волн. Закон $3/2$ Блоха. Ферромагнетизм электронов проводимости, критерий Стонера.

Литература

Основная литература

1. Ципенюк Ю.М. Квантовая микро- и макрофизика. Москва: Физматкнига., 2006.
2. Морозов А.И. Элементы современной физики твердого тела. Москва: ИД «Интеллект», 2015.
3. Петров Ю.В. Основы физики конденсированного состояния. Москва: ИД «Интеллект», 2013.
4. Гладун А.Д. Строение вещества. Ч. II. Москва: МФТИ, 2010.
5. Иванов А.А. Введение в квантовую физику систем из многих частиц. Москва: МФТИ, 2007.
6. Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М. Основы физики. Т. 2. Москва: Физматлит, 2007.
7. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 5. Москва: Наука, 1986.
8. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. Москва: Наука, 1978.

Дополнительная литература

9. Мейлихов Е.З. Электроны и фононы в общей физике твердого тела. Москва: МФТИ, 2005.
10. Мейлихов Е.З. Общая физика полупроводников. Москва: МФТИ, 2006.
11. Мейлихов Е.З. Общая физика сверхпроводников. Москва: МФТИ, 2003.
12. Мейлихов Е.З. Магнетизм. Основы теории. Москва: ИД «Интеллект», 2014.
13. Морозов А.И. Физика твердого тела. Кристаллическая решетка. Фононы. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
14. Морозов А.И. Физика твердого тела. Электроны в кристалле. Металлы. Полупроводники. Диэлектрики. Магнетики. Сверхпроводники. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
15. Гольдин Л.Л., Новикова Г.И. Введение в квантовую физику. Москва: ИД «Интеллект», 2016.
16. Крылов И.П. Основы квантовой физики и строение вещества. Москва: МФТИ, 1989.
17. Петров Ю.В. Введение в физику твердого тела. Москва: МФТИ, 1999.
18. Ципенюк Ю.М. Нулевые колебания. Москва: МФТИ, 2011.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 3-го курса ЛФИ, ФАКТ (только г. Жуковский) и ФЭФМ
на весенний семестр 2020-2021 учебного года

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи для решения	
			Обязательные	Дополнительные
1	01.02–06.02	Структура и колебания кристаллических решёток.	0-1-1, 0-1-2, 2.1, 2.71, Т.1, Т.2, Т.3, Т.4	Т.Ф1(1) Т.Ф1(2)
2	08.02–13.02	Фононы. Модель Дебая.	0-2-1, 0-2-2, 2.23, 2.31, 2.58, 2.61, 2.75, Т.5	Т.Ф2
3	15.02–22.02	Решёточная теплоёмкость и теплопроводность.	0-3-1, 0-3-2, 2.34, 2.40, 2.52, 2.64, 2.65, 2.68	Т.Ф3
4	01.03–06.03	Свободный электронный газ. Энергия Ферми. Теплоёмкость металлов.	0-4-1, 0-4-2, 3.4, 3.17, 3.22, 3.27, 3.44, 3.61	Т.Ф4
5	08.03–13.03	Кинетика электронов в металле.	0-5-1, 0-5-2, 3.65, 3.74, 3.75, 3.88, Т.6, Т.7	Т.Ф5
6	15.03–20.03	Зонный характер спектра электронов в твердых телах; поверхность Ферми.	0-6-1, 0-6-2, 3.1, 3.34, 3.35, 3.43, 3.85, Т.8	Т.Ф6
7	22.03–27.03	Контрольная работа (по семинарским группам)		
8	29.03–04.04	Сдача 1-го задания		
9	05.04–10.04	Полупроводники.	0-9-1, 0-9-2, 4.12, 4.17, 4.43, 4.50, Т.9, Т.10	Т.Ф9
10	12.04–17.04	Сверхпроводники.	0-10-1, 0-10-2, 5.19, 5.21, 5.22, 5.24, 5.27, 5.34	Т.Ф10
11	19.04–24.04	Низкоразмерные системы.	0-11-1, 0-11-2, 3.87, 3.89, 4.16, 4.28, 4.48, Т.11	Т.Ф11

12	26.04– 01.05	Магнетизм.	0-12-1, 0-12-2, 6.60(А), 6.148(Г), 6.251(Г), Т.12, Т.13, Т.14	Т.Ф12(1) Т.Ф12(2)
13	27.04– 02.05	Контрольная работа (по семинарским группам)		
14	03.05– 08.05	Сдача 2-го задания		
15	10.05– 15.05	Подготовка вопросов по выбору		
16	17.05– 22.05	Зачет в лаборатории		

Примечание:

Номера задач без букв соответствуют разделу «Строение вещества». Номера задач с буквой (А) – разделу «Атомная и ядерная физика», с буквой (Г) – разделу избранных задач ГОС экзаменов Сборника задач по общему курсу физики. Часть 3 / под ред. В.А. Овчинкина. М.: МФТИ. 2009.

Контрольные задачи и вопросы к семинарам (задачи группы 0)

0-1-1. При комнатной температуре ниобий ($A = 93$) кристаллизуется в ОЦК-решетку с ребром куба $a = 3,294 \text{ \AA}$. Найти плотность ниобия.

0-1-2. Найти расстояния между плоскостями d_{110} в моноатомной ОЦК- и ГЦК-решетках, если ребро элементарного куба равно a .

0-2-1. Усредненная скорость звука в меди равна $s = 3600 \text{ м/с}$. Постоянная ГЦК-решетки меди равна $a = 3,61 \text{ \AA}$. Найти дебаевскую частоту.

0-2-2. Найти величину щели (в эВ) между акустической и оптической модами колебаний на границе зоны Бриллюэна для одномерной цепочки NaCl с периодом $2a = 5,6 \text{ \AA}$. Скорость звука $s = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

0-3-1. Оценить, какое количество тепла надо подвести к одному молу диэлектрического кристалла, содержащего один атом в элементарной ячейке, чтобы нагреть его от температуры 2θ до $2,5\theta$.

0-3-2. Имеется диэлектрический кристалл с температурой Дебая $\theta = 300 \text{ К}$. Как изменится его решеточная теплопроводность при увеличении температуры от 5 К до 15 К ? Считать, что при указанных температурах длина свободного пробега фононов ограничена размерами кристалла.

0-4-1. Определить, какая доля электронов проводимости в металле при $T = 0 \text{ К}$ имеет кинетическую энергию, большую $0,5 E_F$.

0-4-2. Оценить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Температура Дебая у серебра равна $\theta = 220$ К, энергия Ферми $E_F = 5,5$ эВ.

0-5-1. Как изменится электропроводность чистого металла, если его температура изменилась от $1,5\theta$ до 2θ ? Вкладом дефектов кристаллической структуры пренебречь.

0-5-2. При нагревании металла от 0 К до 2 К его сопротивление возросло в 5 раз. Во сколько раз изменится сопротивление этого металла при нагревании от 0 К до 4 К?

0-6-1. Закон дисперсии электронов в двумерной структуре с периодом a имеет вид $E(k_x, k_y) = A(\cos k_x a + \cos k_y a)$. Найти модуль групповой скорости электронов в точке $k_x = \pi/2a$, $k_y = \pi/6a$.

0-6-2. Закон дисперсии электронов в одномерной структуре с периодом a имеет вид $\varepsilon(k_x) = A \cos(k_x a)$. Найти ускорение электрона при $k_x = \pi/6a$ в электрическом поле с напряженностью E . Концентрацию электронов считать малой.

0-9-1. Оценить минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в чистом кристалле GaAs, если его электропроводность изменяется в 10 раз при изменении температуры от $+20^\circ\text{C}$ до -3°C .

0-9-2. Оценить, при какой концентрации мелких донорных примесей в кремнии образуется примесная зона? Статическая диэлектрическая проницаемость кремния $\varepsilon = 12$, эффективная масса равна половине массы свободного электрона.

0-10-1. Оценить величину энергетической щели в свинце, у которого критическая температура равна $T_c = 7,2$ К.

0-10-2. При каком напряжении начнет течь ток через туннельный переход металл-изолятор-сверхпроводник, если $T_c = 9,2$ К? Измерение проводится при $T \ll T_c$.

0-11-1. В каком минимальном магнитном поле электроны в МОП-структуре будут полностью заполнять нижний спиновый подуровень Ландау? Поверхностная плотность электронов $n_s = 10^{12} \text{ см}^{-2}$.

0-11-2. При приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена, энергия Ферми электронов оказалось равной $E_F = 0,1$ эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене, если $c^* = 10^8 \text{ см/с}$.

0-12-1. Оценить обменный интеграл (в эВ) в оксиде европия, если спин магнитного иона равен $7/2$, число ближайших соседей – 12, температура Кюри – 77 К.

0-12-2. При температуре T_1 намагниченность ферромагнетика отличается от намагниченности насыщения на 1%, а при температуре T_2 – на 8%. Найти отношение температур T_2/T_1 .

Текстовые задачи (задачи группы 1)

Т.1. Кристаллическая решетка окиси марганца MnO является кубической гранецентрированной (типа NaCl). При низких температурах это соединение является антиферромагнетиком: соседние ферромагнитно упорядоченные плоскости (111) ионов магния имеют противоположные направления локального магнитного момента. При дифракции нейтронов с длиной волны $\lambda = 1,204 \text{ \AA}$ на порошкообразном MnO на угол $\alpha = 13^\circ$ наблюдается пик магнитного рассеяния первого порядка. Найти величину ребра элементарного куба.

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4\sin(\alpha/2)} = 4,5 \text{ \AA}.$$

Т.2. Дана двухатомная цепочка равноотстоящих атомов с отношением масс 2:3. В ней возбуждено такое колебание, что на оптической ветви отношение модулей смещения легкого и тяжелого атомов равно 2. Чему равна (в единицах периода цепочки) максимальная длина волны такого колебания. Учитывать взаимодействие только между ближайшими соседями.

$$\text{Ответ: } \lambda_{\max} = \pi d / \arccos(0.4) \approx 2,7d.$$

Т.3. Так называемый α -карбин представляет собой одномерную цепочку из атомов углерода с чередующимися одинарной и тройной химическими связями $-\text{C} \equiv \text{C} - \text{C} \equiv \text{C} -$, а β -карбин – цепочку, в которой атомы углерода связаны двойной химической связью $=\text{C}=\text{C}=\text{C}=\text{C}=$. Считая, что жесткость γ химической связи определяется ее кратностью, определить отношение продольных скоростей звука в α - и β -модификациях карбина. Среднее расстояние между атомами, соединенными одинарной и тройной связями в α -карбине, считать равными $d_{\alpha}^{(1)} = 0,137 \text{ нм}$ и $d_{\alpha}^{(3)} = 0,125 \text{ нм}$ соответственно, а среднее расстояние между атомами, соединенными двойной связью в β -карбине, равным $d_{\beta}^{(2)} = 0,128 \text{ нм}$.

$$\text{Ответ: } \frac{s_{\alpha}}{s_{\beta}} = \frac{d_{\alpha}^{(1)} + d_{\alpha}^{(3)}}{2d_{\beta}^{(2)}} \sqrt{\frac{2\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3)}} = \frac{131}{128} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,89.$$

Т.4. В приближении «ближайших соседей» закон дисперсии фононов $\omega(k)$ в зоне Бриллюэна является монотонно возрастающей функцией. При учете взаимодействия с соседями, следующими за ближайшими, это уже не всегда так. Например, в свинце, в направлении $[100]$ (вдоль ребра элементарного куба), частота фононов достигает максимума при

$k_0 = 0,8k_{\text{Брил}}$, где $k_{\text{Брил}}$ – волновое число, соответствующее границе зоны Бриллюэна в этом направлении. Скорость продольного звука в этом направлении составляет $s = 2,2 \cdot 10^5$ см/с. Используя модель одномерной цепочки, найти силовые постоянные для первых и вторых соседей. Свинец кристаллизуется в ГЦК-решетку с периодом $d = 4,95 \text{ \AA}$. Период одномерной цепочки – это расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению [100].

$$\text{Ответ: } \beta_1 = -4\beta_2 \cos\left(\pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right) = 12,1 \cdot 10^3 \text{ дн/см},$$

$$\beta_2 = \frac{M_{\text{Pb}} s^2}{d^2 \left(1 - \cos \pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right)} = 3,78 \cdot 10^3 \text{ дн/см}.$$

Т.5. Вероятность эффекта Мессбауэра – испускания γ -квантов возбужденным ядром без изменения состояния решетки (рождения фононов) – равна $w = \exp(-2L)$ (т.н. фактор Лэмба–Мессбауэра). Здесь $L = \langle (\vec{k}\vec{u})^2 \rangle / 2$, $\vec{k}$ – волновой вектор γ -кванта, $\vec{u}$ – вектор смещения атома решетки, угловые скобки обозначают усреднение по направлениям векторов и по спектру колебаний решетки. Найти в дебаевском приближении максимально возможную вероятность эффекта Мессбауэра для кристалла иридия-193 (решетка ОЦК), если энергия перехода в ядре иридия $E_\gamma = 129$ кэВ, дебаевская температура $\Theta = 430$ К.

$$\text{Ответ: } w = \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{E_\gamma^2}{M_{\text{Ir}} c^2 k_{\text{B}} \Theta}\right) = 0,154$$

Т.6. В гелиевую ванну ($T = 4,2$ К) помещен намотанный медным проводом соленоид диаметром $D = 10$ мм с числом витков $N = 200$. Какая мощность будет выделяться при пропускании через соленоид тока $I = 100$ мА? Измерение сопротивления единицы длины этого провода показали, что при температуре $T_1 = 1$ К оно равно $R_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ом/см, а при $T_2 = 2$ К – $R_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}$ Ом/см. Считать, что для меди выполняется закон Блоха–Грюнайзена.

$$\text{Ответ: } 8,3 \text{ мВт}.$$

Т.7. Чистый образец из золота имеет при температуре $T = 295$ К удельное сопротивление $\rho = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетке с периодом $a = 4,1 \text{ \AA}$. Дебаевская температура золота $\theta = 197 \text{ К}$. Оценить по этим данным среднее (эффективное) сечение рассеяния электронов на фононах.

$$\text{Ответ: } \bar{\sigma} = \frac{2}{9(12\pi^2)^{1/3}} \frac{e^2 \rho a}{\hbar} \frac{\theta}{T} = 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2.$$

Т.8. Найти при $T \approx 0$ К максимальный импульс электрона в проводнике с анизотропным законом дисперсии:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\perp}^*} + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}^*}, \quad \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} = 8.$$

Концентрация электронов $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

$$\text{Ответ: } p_{\text{макс}} = \hbar \left(3\pi^2 n \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} \right)^{1/3} = 6,5 \cdot 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

Т.9. При легировании кремния донорами с концентрацией $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, оказалось, что ток дырок при температуре $T = 600$ К уменьшился в $\gamma = 3$ раза по сравнению со случаем нелегированного образца. Найти долю ионизованных примесей при данной температуре, если эффективные массы электронов и дырок равны $m_n^* = 1,08m_0$ и $m_p^* = 0,56m_0$, ширина запрещенной зоны при данной температуре равна $E_g = 1,05$ эВ. Подвижность дырок считать постоянной.

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{n_i}{N_d} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = 0,51,$$

где

$$n_i = 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{m_p^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_g}{2k_B T} \right) = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Т.10. В ионных кристаллах при конечных температурах возникают дефекты Шоттки – пустые места в узле кристаллической решетки (вакансии). При этом ионы из узлов решетки уходят из объема кристалла на его поверхность. В силу электронейтральности в чистом без примесей кристалле вакансии положительных и отрицательных ионов возникают парами (аналогично электронам и дыркам в полупроводнике). Минимальная

энергия образования пары вакансий (т.е. работа по удалению пары ионов) в кристалле NaCl составляет $E_{\text{Sch}} = 2 \text{ эВ}$. Найти температуру $t = 330 \text{ }^\circ\text{C}$ равновесные концентраций вакансий при в природном NaCl содержащем примесь CdCl_2 с концентрацией ионов кадмия $n_{\text{Cd}^{++}} = 10^{14} \text{ см}^{-3}$. Ионы кадмия замещают ионы натрия в узлах кристаллической решетки. Концентрация узлов в подрешетках ионов обоих знаков в NaCl равна $n_0 = 2,2 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

$$\text{Ответ: } n_{\text{Na}^+} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} + n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} n_i = 1,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$n_{\text{Cl}^-} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} - n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} n_i = 0,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

где

$$n_i = n_0 \exp(-E_{\text{Sch}} / 2k_B T) \cong 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Т.11. Найти отношение электронной и решеточной теплоемкостей графена при низких температурах. Графен можно считать двумерным бесщелевым полупроводником с линейным законом дисперсии носителей тока $E(\vec{k}) = \pm \hbar c^* k$, где $\vec{k}$ – двумерный волновой вектор, $k = |\vec{k}|$, $c^* = 10^8 \text{ см/с}$, знак «+» соответствует зоне проводимости, знак «-» – валентной зоне. В зоне Бриллюэна графена имеется два эквивалентных минимума закона дисперсии (две долины). Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене $s = 1,5 \cdot 10^6 \text{ см/с}$. Наличием изгибных колебаний пренебречь.

Указание: Воспользоваться соотношением $\int_0^\infty \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \int_0^\infty \frac{x^n}{e^x - 1} dx$;

$$\text{Ответ: } \frac{C_s}{C_{ph}} = 3 \left(\frac{s}{c^*} \right)^2 = 6,75 \cdot 10^{-4}.$$

Т.12. Под действием однородного переменного магнитного поля в тонких ферромагнитных пленках могут возбуждаться спиновые волны. Когда на толщине пленки укладывается нечетное число полувольт n , возникает стоячая волна колебаний намагниченности (спин-волновой резонанс). Так в пермаллоевой пленке толщиной $L = 2000 \text{ \AA}$ на частоте $f = 9 \text{ ГГц}$ наблюдается резонанс с $n = 7$.

(а) Чему равна эффективная масса (в единицах массы свободного электрона) этих квазичастичных возбуждений?

(б) Считая, что пленка сделана из чистого железа и используя результат (а), найти относительное изменение намагниченности пленки при нагреве ее от $T = 0$ К до $T = 300$ К. Спин иона железа считать равным $S = 5/2$, размер элементарного куба ОЦК-решетки $a = 2,87 \text{ \AA}$.

Указания: Закон дисперсии спиновых волн считать квадратичным;

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = 4\pi^2 \cdot 0,0587.$$

Ответ: (а) $m^* = \frac{\pi \hbar n^2}{4 f L^2} \approx 1,13 \cdot 10^{-26} \text{ Г}$, или $m^* \approx 12,4 m_e$.

$$(б) \frac{\Delta M}{M(0)} = 0,0587 \left(\frac{2m^* k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{a^3}{2S} \approx 0,7\%.$$

Т.13. Магнитная восприимчивость жидкого ^3He выше температуры 1 К ведет себя точно по закону Кюри, т.е. $\chi \propto 1/T$. Вычислить величину восприимчивости ^3He при температуре $T = 2$ К. Плотность ^3He при данной температуре равна $\rho = 0,07 \text{ г/см}^3$.

Ответ: $\chi = \frac{J(J+1)g_{\text{sn}}^2 \mu_{\text{яб}}^2}{3k_B T} \frac{\rho}{\mu} N_A = 4,735 \cdot 10^{-9}.$

Т.14. Гетероструктура AlGaIn/GaN , охлажденная до температуры $T = 4$ К, помещена в магнитное поле $B = 4$ Тл. Оценить теплоемкость единицы поверхности двумерного электронного газа, если при $T = 0$ К полностью заполнен только один подуровень Ландау. Эффективная масса электронов равна $m^* = 0,16m_0$, где m_0 – масса свободного электрона.

Ответ: $C \approx 2n_s k_B \left(\frac{\mu_B B}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp \frac{\mu_B B}{k_B T}}{\left(\exp \frac{\mu_B B}{k_B T} + 1 \right)^2} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/(К} \cdot \text{см}^2\text{)},$

где $n_s = B / \Phi_0 = eB / hc$.

Задачи повышенной сложности (задачи группы 2)

Т.Ф1(1). Для базоцентрированной ромбической решётки с параметрами решётки a , $b=2a$, с построить обратную решётку, выделить первую зону

Бриллюэна, найти объём первой зоны Бриллюэна и сравнить с объёмом элементарной ячейки исходной ромбической решётки.

$$\text{Ответ: } V_{\text{зБ}} = \frac{(2\pi)^3}{a^2 c}.$$

Т.Ф1(2). При изучении структуры кристаллов широко используется метод Дебая–Шерера: на порошковый образец, состоящий из маленьких случайно ориентированных кристаллов, падает монохроматическое рентгеновское излучение. Наблюдаемая на расположенном за образцом перпендикулярно к падающему лучу плоском детекторе картина дифракции состоит из семейства концентрических окружностей. Определить радиусы первой из этих окружностей для кристаллов с простой кубической и ГЦК решётками. В обоих случаях ребро кубической элементарной ячейки $a=3.14\text{Å}$, длина волны падающего излучения $\lambda = 0.7\text{Å}$ (K-α линия молибдена), расстояние до детектора $L=10\text{ см}$.

$$\text{Ответ: для кубической решетки: } R \approx L \frac{\lambda}{a} = 2.2\text{ см},$$

$$\text{для ГЦК решетки } R \approx \sqrt{3}L \frac{\lambda}{a} = 3.8\text{ см}.$$

Т.Ф2. В свободном (подвешенном) графене существует длинноволновая изгибная мода колебаний с законом дисперсии $\omega = \alpha k^2$, где $\alpha = 5 \times 10^{-3}\text{ см}^2/\text{с}$, а k – двумерный волновой вектор. Оценить в рамках низкотемпературного приближения при какой температуре вклад в теплоемкость от изгибной моды сравняется с вкладом звуковых ветвей. Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене равна $\bar{S} = 16,2\text{ км/с}$.

$$\text{Указание: } \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \cong 2.40, \quad \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Ответ: } T_* = \frac{\pi^2}{86,4} \frac{\hbar \bar{S}^2}{\alpha k} \cong 458\text{ K}.$$

Т.Ф3. Искусственный алмаз, выращенный из изотопически чистого углерода ^{12}C , обладает при комнатной температуре теплопроводностью $K = 25\text{ Вт/(см}\cdot\text{K)}$. Теплопроводность же алмаза, выращенного из естественной смеси изотопов (с 1%-ым содержанием изотопа ^{13}C), на 1% меньше. Оценить длину свободного пробега фононов, обусловленную рассеянием на дефектах, роль которых играют атомы ^{13}C . Температура Дебая алмаза Θ

= 2250 К, скорость звука $S = 17,5$ км/с, ребро элементарного куба решетки алмаза, содержащего 8 атомов, равно $a = 3,57 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ: } \lambda = \frac{15\kappa a^3}{48\pi^4 k_B S} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^3 \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Т.Ф4. При облучении золотого фотокатода ультрафиолетовым излучением с энергией кванта 16.9 эВ образуются фотоэлектроны с энергиями от $\varepsilon_1 = 7.1$ эВ до $\varepsilon_2 = 11.6$ эВ. Считая спектр электронов проводимости в золоте изотропным и квадратичным, оценить величину эффективной массы электронов. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетку с ребром элементарного куба $a = 4,08 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ: } \frac{m^*}{m_0} = \frac{\hbar^2 (12\pi^2)^{2/3}}{2m_0 a^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = 1,21$$

Т.Ф5. Медный стержень прикреплён одним концом к криостату, поддерживающему температуру $T_1 = 400$ мК, а другой его конец нагрет до температуры $T_2 = 2$ К. Чему равна температура в точке посередине стержня (на равном удалении от концов). Стержень находится в глубоком вакууме, радиационный теплообмен не учитывать.

$$\text{Ответ: } T_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{T_2^2 + T_1^2}{2}} \cong 1,44 \text{ К.}$$

Т.Ф6. Атомы лития образуют одномерную цепочку так, что возникает перекрытие волновых функций электронов и уровни 1s и 2s отдельного атома расщепляются в зоны. Законы дисперсии электронов в первой и второй зонах: $E_1(k) = -7E_0 - E_0 \cos ka$ и $E_2(k) = -3E_0 + 2E_0 \cos ka$, где энергия отсчитывается от уровня энергии покоящегося электрона в вакууме, $E_0 = 2$ эВ, межатомное расстояние $a = 3 \text{ \AA}$. Найти электронный вклад в теплоёмкость единицы длины такой цепочки при $T = 10$ К.

$$\text{Ответ: } c_L = C(T)/L = \pi \kappa^2 T / (3E_0 a) = 2,1 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/(см К).}$$

Т.Ф9. Найти концентрацию носителей тока при температуре $T = 4,2$ К в двухслойном (верхний слой повернут на 60° относительно нижнего, как в графите) идеальном графене, который является бесщелевым полупровод-

ником. У двухслойного графена в зоне Бриллюэна находится два эквивалентных минимума (долины) закона дисперсии, вблизи которых $E(\vec{k}) = \pm \hbar^2 k^2 / 2m^*$. Верхний знак соответствует зоне проводимости, нижний – валентной зоны; эффективная масса носителей $m^* = 0,054m_0$. Во сколько раз изменится концентрация, если увеличить температуру вдвое?

$$\text{Ответ: } n_s = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{m^* k T}{\hbar^2} = 1,14 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}.$$

Т.Ф.10. Ниобий является сверхпроводником второго рода, у которого при абсолютном нуле глубина проникновения и длина когерентности практически совпадают. Считая, спектр электронов в ниобии является изотропным квадратичным, что найти концентрацию и эффективную массу электронов в ниобии. Удельная электронная теплоемкость ниобия в нормальном состоянии описывается законом $C(T)/T = \gamma = 7,18 \cdot 10^3 \text{ эрг}/(\text{см}^3 \text{ K}^2)$. Величина энергетической щели в ниобии при абсолютном нуле $\Delta = 1,4 \text{ мэВ}$.

Указание. Для упрощения вычислений, можно считать, что $(3\pi^2)^{1/3} \cong \pi$.

$$\text{Ответ: } n \cong 1,7 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}, m^* = 75 \cdot 10^{-28} \text{ г или } 8,24 m_0.$$

Т.Ф.11. В объемном образце полуметалла имеется перекрытие зоны проводимости и валентной зоны. Из этого образца изготовлены различные тонкие пленки. Оказалось, что пленки с толщиной меньшей $d = 300 \text{ \AA}$ не обладают проводящими свойствами, а с большей - обладают. Найти величину перекрытия. Эффективные массы электронов и дырок равны соответственно $m_e^* = 0,04m_0$ и $m_h^* = 0,02m_0$. Считать, что электроны и дырки не могут выйти за границы пленки. Принять, что $T \cong 0 \text{ К}$.

$$\text{Ответ: } \Delta = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 d^2} \left(\frac{m_0}{m_h^*} + \frac{m_0}{m_e^*} \right) = 0,3 \text{ эВ}.$$

Т.Ф.12(1). При измерении низкотемпературной теплоёмкости парамагнитной соли с магнитными ионами Ni^{2+} ($S=1$) в магнитном поле $B = 4 \text{ Тл}$ наблюдается характерный пик теплоёмкости (аномалия Шоттки). Считая магнетизм чисто спиновым, определить при какой температуре наблюдается максимум теплоёмкости. Оценить, во сколько раз теплоёмкость в

максимуме превышает решёточную (для оценки использовать характерные значения для диэлектрических кристаллов).

Указание: функция $y = x^2(4+2\operatorname{ch} x)/(1+2\operatorname{ch} x)^2$ имеет максимум при $x \approx 1.881$ равный $y_{\max} \approx 0.63$

$$\text{Ответ: } T_{\max} = \frac{g\mu_B B}{1,881k_B} = 2,86 \text{ К}, \quad C(T_{\max}) = 0,637 k_B.$$

Т.Ф12(2). Определить относительное изменение частоты света при рассеянии на 90° с испусканием магнона в ферромагнитном диэлектрике с простой кубической решёткой. Величина обменного интеграла $|J|=100$ К, спин магнитного иона $S = 5/2$, взаимодействуют только ближайшие соседи, длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм, показатель преломления среды $n = 1.3$. Спектр спиновых волн в указанном материале $\omega = (2|J|S/\hbar)(3 - \cos(K_x a) - \cos(K_y a) - \cos(K_z a))$.

$$\text{Ответ: } \frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{4\pi|J|Sa^2n^2}{\hbar c\lambda} = 5,2 \cdot 10^{-7}$$

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ЛФИ, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 5 зач. ед.;

лекции — 45 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил

д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. **Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье.** Постановка смешанной задачи на конечном отрезке с граничными условиями Дирихле, единственность решения. Метод разделения переменных для задачи с однородными граничными условиями. Построение формального решения для случаев однородного и неоднородного уравнений. Обоснование метода Фурье. Условия согласования начального и граничных условий. Решение смешанной задачи при неоднородных граничных условиях.
2. **Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке.** Постановка смешанной задачи для струны с закреплёнными концами. Единственность её решения (метод интеграла энергии). Построение формального решения методом Фурье (случаи однородного и неоднородного уравнений). Обоснование метода, условия согласования. Существование классического решения.
3. **Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны.** Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Разделение переменных. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя, неограниченные в нуле. Представление собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закреплёнными краями через функции Бесселя. Ортогональность собственных функций и функций Бесселя. Полнота системы собственных функций (без доказательства).
4. **Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$.** Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области. Пространство основных функций $D(\mathbb{R}^n)$. Понятие сходимости последовательности функций в $D(\mathbb{R}^n)$. Пространство обобщённых функций $D'(\mathbb{R}^n)$, сходимость последовательности элементов из $D'(\mathbb{R}^n)$. Локально интегрируемые функции и регулярные обобщённые функции. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Гармонические функции в $\mathbb{R}^3$ и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона, единственность классического решения. Функция Грина задачи Дирихле; решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Симметричность функции Грина (без доказательства). Функция Грина для шара. Формула Пуас-

сона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Преобразование Кельвина. Регулярность поведения гармонической функции на бесконечности.

Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в $\mathbb{R}^3$.

5. **Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Сферические функции.** Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические функции как собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере S_1 . Шаровые функции (гармонические многочлены). Собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами. Дифференциальное уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Выражение сферических функций в сферической системе координат.

Ортогональность и полнота (без доказательства) сферических функций в $L_2(S_1)$. Решение задач Дирихле и Неймана в шаре и шаровом слое в форме рядов по шаровым функциям.

6. **Интегральные уравнения.** Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Непрерывность интегральных операторов с непрерывными и полярными ядрами в пространстве $C(\bar{G})$. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции ядра интегрального оператора.

Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Интегральные уравнения с непрерывными и полярными ядрами. Уравнение с малым по норме оператором. Ряд Неймана.

Сведение интегральных уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае.

Уравнения с эрмитовыми ядрами. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема о существовании характеристических чисел. Теорема Гильберта–Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.

7. **Задача Штурма–Лиувилля.** Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля; её существование, симметричность, непрерывность. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Свойства спектра и собственных функций. Теорема Стеклова.

8. **Потенциалы.** Объемный потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя, его непрерывность в $\mathbb{R}^3$. Потенциал двойного слоя. Формула Гаусса, скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя, формула для скачка нормальной производной.
- Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — 7-е изд. — Москва : Изд-во МГУ, Наука, 2004.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 3-е изд. — Москва : Физматгиз, 1961.
5. *Уровев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : МЦНМО, 2001.
6. *Пальцев Б. В.* Сферические функции: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2000.
7. *Зубов В. И.* Функции Бесселя: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2007.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье

1. 20.50(1,6); 20.14(4); 20.56(5); 20.16(5); 20.3(3).

2. Решить смешанные задачи:

- а) $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$
- б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = te^{-9t}, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \pi x - \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$
- в) $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4} \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = x + \cos \frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad x \in [0, \pi],$
 $u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$
- г) $u_t = u_{xx} - u + \frac{1}{2\pi}t(x^2 - 2), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = \cos x, \quad x \in [0, \pi],$
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t \geq 0.$

II. Смешанная задача в прямоугольнике. Метод Фурье

1. 20.59; 20.22; 20.21.

III. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны

1. 20.34(2); 20.37(2); 20.62(2); 20.60(2); 20.38*.

2. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, и пусть

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad (x, y) \in D, \quad \left. \frac{\partial u_k}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0,$$

$$u_k \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \quad u_k \not\equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Доказать, что

$$\iint_D u_1(x, y) u_2(x, y) dx dy = 0.$$

3. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ — корни уравнения $J'_2(\mu) = 0$. С помощью результата предыдущей задачи доказать, что

$$\int_0^1 r J_2(\mu_m r) J_2(\mu_n r) dr = 0, \quad \text{если } m \neq n.$$

4. Найти собственные функции $u(x, y)$ и собственные значения λ задачи $-\Delta u = \lambda u, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) : y > 0, x^2 + y^2 < R^2\}, \quad u|_{\partial D} = 0.$

5. Решить смешанные задачи ($f(r)$ и $g(r)$ — достаточно гладкие функции):

а) $u_{tt} = 4\Delta u + f(r) \cos^2 \varphi$, ($t > 0$, $r < 3$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$),

$$u|_{r=3} = 0, \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad (r \leq 3, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi), \quad f(3) = 0;$$

б) $u_t = \frac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t}f(r) \sin 3\varphi$, ($t > 0$, $r < 4$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$),

$$u|_{r=4} = 0, \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$u|_{t=0} = g(r) \cdot \sin 2\varphi, \quad (r \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$f(4) = 0, \quad g(4) = 0;$$

в) $u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right) \cos 2\varphi$, ($t > 0$, $r < 2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$),

$$u|_{r=2} = 0, \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$u|_{t=0} = g(r) \cdot \cos(2\varphi + \pi/4), \quad (r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$g(2) = 0, \quad \mu_3^{(2)} - \text{положительный нуль функции Бесселя первого рода } J_2(x).$$

6. Решить смешанную задачу для круга:

$$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad r < 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$u|_{t=0} = (r-2)^2, \quad r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$u|_{r=2} = 16t \sin 5\varphi, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

IV. Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$. Функция Грина задачи Дирихле

1. Доказать, что функция $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

2. 17.1(1,2); 17.2(1,2); 17.7; 17.4(1,2,7); 17.8(2).

3. Найти ограниченные в $D = \{x = (x_1, x_2, x_3): x_1 \in \mathbb{R}^1, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ решения задач:

а) $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = \cos 4x_1 \cdot \sin 3x_2$;

б) $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u_{x_2}|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^{-1/2}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Интегральные уравнения

1. 5.20; 5.22; 5.23(4,8); 5.25(2).

2. Найти характеристические числа, собственные функции ядра интегрального оператора и решить при всех λ уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + y \cos x) u(y) dy + f(x),$$

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2, \quad f(x) \in C\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Найти условия его разрешимости при характеристических значениях λ , а также его резольвенту $R(x, y; \lambda)$. Проиллюстрировать справедливость теорем Фредгольма на примере этой задачи.

3. Сколько решений имеет интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{30}{115} \int_0^1 \left(e^{\frac{x^2+y^2}{2}} - \cos(x+2y) \right) u(y) dy + \frac{95}{1+x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

4. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (|y| \sin |x| + |x|y) u(y) dy + a|x| + bx, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right].$$

5. 5.34; 5.41(1,4); 5.43(2); 5.44*.

II. Задача Штурма–Лиувилля

1. 15.1(4,5); 15.4(1,2); 15.21(2,4); 15.15(1,7); 15.17.
2. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу

$$x^2 y'' - x y' + y = \lambda x^3 y + f(x), \quad 1/2 < x < 1,$$

$$2y(1/2) - y'(1/2) = 0, \quad y(1) = 0.$$

III. Потенциалы

1. 18.6(5); 18.7(1); 18.16; 18.19(1); 18.22(1); 18.33(1).
2. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в $\mathbb{R}^3$.

Указание. Решение рекомендуется искать в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Составитель задания

д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6
Трудоемкость: базовая часть – 3 зачет. ед.

<u>лекции – 30 часов</u>	<u>Экзамен – нет</u>
<u>практические (семинарские)</u>	
<u>занятия – нет</u>	<u>Диф.зачет – 6 семестр</u>
<u>лабораторные занятия – 30 часов</u>	
	<u>Самостоятельная работа – 75 часов</u>
<u>ВСЕГО ЧАСОВ – 60</u>	

Программу и задание составила
д. ф.-м. н., профессор Е. Н. Аристова

Программа принята на заседании
кафедры вычислительной физики
24 ноября 2020 года.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н, профессор, чл.-корр. РАН

И. Б. Петров

1. *Решение разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге–Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад и методы Адамса). *Исследование схем на А-устойчивость, Lp-устойчивость и монотонность.
3. Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Метод дополненного вектора. *Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.
4. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Основная теорема вычислительной математики. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Спектральный признак устойчивости, элементы теории Самарского об исследовании устойчивости двухслойных схем на основе энергетических неравенств, условие Куранта–Фридрихса–Леви. *Принцип максимума, принцип замороженных коэффициентов. *Канонический вид двухслойных схем.
5. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем. *Метод прямых. *Бикompактная схема Рогова. *Первое дифференциальное приближение. *Диссипативная и дисперсионная ошибки разностной схемы.
6. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. *Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.
7. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение.

Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

8. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.
9. *Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Литература

Основная

1. *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с; 3-е изд. – Москва : Физматлит, 2008. — 288 с. (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. /под редакцией А.И. Лобанова. – 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с., Долгопрудный: Интеллект, 2008. – 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 2000. – 224 с.
4. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. – Москва : Интернет–Университет информационных технологий, 2006. – 522 с.
5. *Аристова Е.Н., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. – Москва : МФТИ, 2015. — 310 с.

Дополнительная

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – Санкт-Петербург : БХВ–Петербург, 2011 – 592 с.
2. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». 2-е изд, исправленное и дополненное / *В. Д. Иванов, В. И. Косарев, А. И. Лобанов, И. Б. Петров, В. Б. Пирогов, В. С. Рябенский, Т. К. Старожилова, А. Г. Торماسов, С. В. Утюжников, А. С. Холодов.* – Москва : Изд-во МЗ-пресс, 2003. – 196 с.
3. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. — 685 с.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – Москва : Наука, 1989.

Аудиторная контрольная работа — вторая декада марта**Задание 1 (срок сдачи — вторая неделя марта).**

Задачи даны из пособия [5].

№п/п	Тема IX					
	Построение общего решения					
1	6.1	7.18	7.19	7.9	7.12-1	7.15-1
2	6.2	7.19	7.20	7.10	7.12-2	7.15-2
3	6.3	7.20	7.21	7.11	7.12-3	7.15-3
4	6.4	7.21	7.18	7.9	7.12-4	7.15-4
5	6.1	7.18	7.20	7.10	7.12-1	7.15-5
6	6.2	7.19	7.21	7.11	7.12-2	7.15-6
7	6.3	7.20	7.21	7.9	7.12-3	7.15-7
8	6.4	7.21	7.18	7.10	7.12-4	7.15-8
9	6.1	7.18	7.20	7.11	7.12-1	7.15-9
10	6.2	7.19	7.21	7.9	7.12-2	7.15-10
11	6.3	7.18	7.19	7.10	7.12-3	7.15-3
12	6.4	7.19	7.20	7.11	7.12-4	7.15-4
13	6.1	7.19	7.20	7.9	7.12-1	7.15-5
14	6.2	7.20	7.21	7.10	7.12-2	7.15-6
15	6.3	7.21	7.18	7.11	7.12-3	7.15-7
16	6.4	7.18	7.20	7.9	7.12-4	7.15-8
17	6.1	7.19	7.21	7.10	7.12-1	7.15-9
18	6.2	7.20	7.21	7.11	7.12-2	7.15-10
19	6.3	7.21	7.18	7.10	7.12-3	7.15-1
20	6.4	7.18	7.20	7.11	7.12-4	7.15-2

№п/п	Тема X								
	Жесткие системы ОДУ								
1	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.14	7.19	8.1
2	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.16	7.19	8.2
3	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.17	7.19	8.3
4	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.13	7.19	8.4
5	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.14	7.19	8.8
6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.16	7.19	8.9
7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.17	7.19	8.11

8	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.13	7.19	8.12
9	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.14	7.19	8.4
10	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.16	7.19	8.8
11	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.17	7.19	8.9
12	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.13	7.19	8.11
13	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.14	7.19	8.12
14	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.16	7.19	8.1
15	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.17	7.19	8.2
16	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.13	7.19	8.3
17	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.14	7.19	8.11
18	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.16	7.19	8.12
19	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.17	7.19	8.4
20	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.13	7.19	8.8

№	Тема XI											
	Числ. решение ОДУ: краевые задачи											
1	7.2	8.1	**	8.2а	8.3а*	8.4а	8.4б	8.5	8.10а	9.1а	9.3б	
2	7.2	8.1	**	8.2б	8.3б*	8.4б	8.4в	8.6	8.10б	9.1а	9.3а	
3	7.2	8.1	**	8.2в	8.3в*	8.4в	8.4г	8.5	8.10в	9.1б	9.3б	
4	7.2	8.1	**	8.2г	8.3а*	8.4г	8.4д	8.6	8.11а	9.1б	9.3а	
5	7.2	8.1	**	8.2а	8.3б*	8.4д	8.4е	8.5	8.11б	9.1а	9.3а	
6	7.2	8.1	**	8.2б	8.3в*	8.4а	8.4е	8.6	8.11в	9.1б	9.3б	
7	7.2	8.1	**	8.2в	8.3а*	8.4б	8.4г	8.5	8.10а	9.1б	9.3а	
8	7.2	8.1	**	8.2г	8.3б*	8.4в	8.4д	8.6	8.10б	9.1а	9.3б	
9	7.2	8.1	**	8.2а	8.3в*	8.4г	8.4е	8.5	8.10в	9.1б	9.3б	
10	7.2	8.1	**	8.2б	8.3а*	8.4а	8.4в	8.6	8.11а	9.1б	9.3а	
11	7.2	8.1	**	8.2в	8.3б*	8.4б	8.4д	8.5	8.11б	9.1а	9.3а	
12	7.2	8.1	**	8.2г	8.3в*	8.4в	8.4е	8.6	8.11в	9.1б	9.3б	
13	7.2	8.1	**	8.2а	8.3б*	8.4а	8.4г	8.5	8.10а	9.1б	9.3а	
14	7.2	8.1	**	8.2б	8.3в*	8.4б	8.4е	8.6	8.10б	9.1а	9.3б	
15	7.2	8.1	**	8.2в	8.3а*	8.4в	8.4д	8.5	8.10в	9.1а	9.3б	
16	7.2	8.1	**	8.2г	8.3б*	8.4а	8.4е	8.6	8.11а	9.1а	9.3а	
17	7.2	8.1	**	8.2а	8.3в*	8.4б	8.4д	8.5	8.11б	9.1б	9.3б	
18	7.2	8.1	**	8.2б	8.3а*	8.4в	8.4г	8.6	8.11в	9.1б	9.3а	
19	7.2	8.1	**	8.2в	8.3б*	8.4а	8.4б	8.5	8.10а	9.1а	9.3б	
20	7.2	8.1	**	8.2г	8.3в*	8.4д	8.4е	8.6	8.10б	9.1а	9.3а	

* В задаче XI.8.3 найти начальное приближение для наименьшего собственного значения и указать алгоритм его дальнейшего нахождения с заданной точностью.

** Для краевой задачи

$$-\Delta_{xx} u_m = f_m, \quad u_0 = u(0) = a, \quad u_M = u(X) = b, \quad h = X / M$$

а) найти число обусловленности системы разностных уравнений;

б) определить, для какого вектора правых частей достигается минимальное значение величины $\nu(\mathbf{f})$ в оценке погрешности решения в

зависимости от погрешности правой части $\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \nu(\mathbf{f}) \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}$. Результат

нарисовать как зависимость f_m от m для всех значений m ;

в) определить, для какого вектора правых частей достигается максимальное значение $\nu(\mathbf{f})$. Результат нарисовать как зависимость f_m от m .

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.

Потоковая контрольная работа — первая декада мая

Задание 2 (срок сдачи – последняя декада апреля). Задачи даны из пособия [5].

№п/п	Тема XII							
	Общая теория сходимости для ур.ч.п.							
1	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.25	7.28а
2	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.26	7.28б
3	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.27	7.28в
4	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.25	7.28г
5	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.26	7.28д
6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.27	7.28е
7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.25	7.28ж
8	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.26	7.28з
9	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.27	7.28и
10	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.25	7.28к
11	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.26	7.28в

12	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.27	7.28г
13	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.25	7.28д
14	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.26	7.28е
15	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.27	7.28ж
16	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.25	7.28з
17	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.26	7.28и
18	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.27	7.28к
19	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.25	7.28а
20	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.26	7.28б

№п/п	Тема XIII									
	Числ. методы для ур.ч.п. параболического типа									
1	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1а
2	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.1б
3	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.1в
4	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.2а,б
5	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2в
6	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.2д
7	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.3а,б
8	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.3в
9	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.3д
10	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.7а
11	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.7б
12	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1а
13	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.1б
14	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1в
15	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2а,б
16	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.2в
17	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2д
18	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.3а,б
19	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.3в
20	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.1а

№п/п	Тема XIV								
	Числ. методы для ур.ч.п. гиперболического типа								
1	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.3*	9.13а	9.11а	9.25	10.1
2	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.4*	9.14а	9.11б	9.27	10.2
3	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.6*	9.13б	9.11в	9.35	10.3
4	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.5*	9.14б	9.11г	9.25	10.4а
5	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.3*	9.13в	9.11д	9.27	10.4б
6	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.4*	9.14б	9.11а	9.35	10.4в
7	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.6*	9.13а	9.11б	9.25	10.4г
8	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.5*	9.14а	9.11в	9.27	10.4д
9	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.3*	9.13б	9.11г	9.35	10.4е
10	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.4*	9.14б	9.11д	9.25	10.1
11	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.6*	9.13в	9.11а	9.27	10.2
12	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.5*	9.14а	9.11б	9.35	10.3
13	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.3*	9.13а	9.11в	9.25	10.4а
14	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.4*	9.14а	9.11г	9.27	10.4б
15	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.6*	9.13б	9.11д	9.35	10.4в
16	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.5*	9.14б	9.11а	9.25	10.4г
17	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.3*	9.13в	9.11б	9.27	10.4д
18	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.4*	9.14а	9.11в	9.35	10.4е
19	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.6*	9.13б	9.11г	9.25	10.2
20	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.5*	9.14б	9.11д	9.27	10.3

*Задачи 9.3, 9.4, 9.5 и 9.6. см. стр. 205.

№п/п	Тема XV				
	Числ. методы для ур.ч.п. эллиптического типа				
1	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
2	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
3	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
4	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
5	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
6	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и

7	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
8	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
9	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
10	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
11	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
12	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
13	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
14	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
15	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
16	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
17	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
18	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
19	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
20	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Уравнение переноса.
2. Уравнение теплопроводности.

Для получения отличной отметки за курс необходимо выполнить курсовую работу – самостоятельную реализацию разностной схемы для нелинейного уравнения в частных производных или системы нелинейных уравнений в частных производных (по согласованию с преподавателем).

БРС:

Темы:	7х5	=	35
АКР			20
РНО			5
ПКР			20
Летучки	5х3	=	15
Курсовая работа			20
Итого:			115

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая механика

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ЛФИ

кафедра: теоретической физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 2 зачет. ед.

лекции – 30 часов

Дифф. зачет – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 30 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., профессор
О. И. Толстихин

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

1. Введение

Физические явления, указывающие на необходимость развития квантовой механики. Атомный масштаб физических величин. Волна де Бройля. Состояние и наблюдаемая — основные понятия квантовой механики. Волновая функция и её вероятностная интерпретация. Принцип суперпозиции. Среднее значение наблюдаемой. Эрмитовость операторов физических величин. Операторы координаты, импульса и энергии (гамильтониан). Уравнение Шредингера — основной закон квантовой механики.

2. Уравнение Шредингера

Плотность вероятности и плотность потока вероятности. Уравнение непрерывности. Оператор производной наблюдаемой по времени. Коммутаторы и скобки Пуассона. Интегралы движения. Теоремы Эренфеста. Стационарные состояния и стационарное уравнение Шредингера. Вариационный принцип.

3. Элементы теории представлений

Базис в гильбертовом пространстве. Понятия вектора состояния и пространства состояний. Обозначения Дирака. Система собственных векторов оператора физической величины. Нормировка собственных векторов дискретного и непрерывного спектра. Условие полноты (разложение единичного оператора). Унитарные преобразования. Координатное, импульсное и энергетическое представления. Условие одновременной измеримости физических величин. Полный набор коммутирующих операторов. Соотношение неопределенности.

4. Эволюция во времени

Общее решение задачи Коши для уравнения Шредингера в случае, когда гамильтониан системы не зависит от времени. Оператор эволюции. Представления Шредингера и Гейзенберга. Уравнение Гейзенберга для операторов физических величин.

5. Одномерное движение

Общие свойства одномерного движения. Невырожденность дискретного спектра, осцилляционная теорема. Движение свободной частицы, волновой пакет. Отражение от потенциальной стенки. Прохождение через и отражение от потенциального барьера, унитарность. Движение в периодическом потенциале, зонный спектр.

6. Одномерный гармонический осциллятор

Повышающий $\hat{a}^+$ и понижающий $\hat{a}$ операторы. Нахождение энергетического спектра и векторов стационарных состояний гармонического

осциллятора исходя из коммутационных соотношений. Когерентные состояния.

7. Орбитальный момент импульса

Операторы орбитального момента импульса частицы $\hat{\mathbf{l}}$ и его квадрата $\hat{\mathbf{l}}^2$ в декартовых и сферических координатах. Оператор конечных вращений. Коммутационные соотношения для операторов момента. Сферические гармоники.

8. Собственные значения и собственные функции операторов момента импульса

Нахождение собственных значений и построение общей системы собственных векторов операторов $\hat{l}_z$ и $\hat{\mathbf{l}}^2$ исходя из коммутационных соотношений. Целые и полуцелые значения момента. Переход к координатному представлению (построение сферических гармоник) для целых l . Спин частицы. Матрицы Паули.

9. Движение в центральном поле

Гамильтониан в сферических координатах. Разделение радиальной и угловых переменных в стационарном уравнении Шредингера. Уравнение для радиальной функции. Граничные условия для связанных состояний. Полный набор коммутирующих операторов. Радиальное и орбитальное квантовые числа и квантовое число проекции момента. Кратность вырождения уровней.

10. Атом водорода

Разделение переменных в квантово-механической задаче двух тел. Атомная система единиц. Энергии и волновые функции стационарных состояний дискретного спектра водородоподобного атома. Главное квантовое число. Кулоновское (случайное) вырождение.

11. Квазиклассическое приближение

Волновая функция, описывающая одномерное движение в квазиклассическом приближении. Критерий применимости квазиклассического приближения. Классически разрешенная и запрещенная области, точки поворота. Условие сшивки двух квазиклассических решений, взятых по разные стороны от точки поворота. Условие квантования Бора–Зоммерфельда. Фазовый объем, приходящийся на одно состояние, и плотность состояний. Вероятность туннелирования через потенциальный барьер.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — Москва : Физматлит, 2010.
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. — Москва : Наука; Т.1, 1978; Т.2, 1979.
3. *Белоусов Ю.М.* Курс квантовой механики. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Киселев В.В.* Квантовая механика. — Москва : МЦНМО, 2009.
5. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Москва : Интеллект, 2013.
6. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. — Москва : Наука, 1981.

Дополнительная

1. *Дирак П.А.М.* Принципы квантовой механики. — Москва : Наука, 1979.
2. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
3. *Елютин П.В., Кривченко В.Д.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1976.
4. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1973.
5. *Шифф Л.* Квантовая механика. — Москва : ИЛ, 1967.
6. *Барабанов А.Л.* Лекции по квантовой механике : учеб. пособие в 2-х частях. — Москва : МФТИ, 2005.
<http://theorphys.mipt.ru/biblio/qm-barabanov.html>.
7. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2005.
8. *Алмилуев С.П.* Квантовая теория сложного атома и квантовая теория излучения : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 1984.
9. *Тернов А.И.* Основы релятивистской квантовой механики : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2002.

УПРАЖНЕНИЯ

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

- 1.^C Найти эрмитово сопряженные и обратные операторы для операторов пространственной инверсии $\hat{I}$ и трансляции $\hat{T}_a$.
- 2.^C Найти собственные значения и собственные функции операторов пространственной инверсии $\hat{I}$ и трансляции $\hat{T}_a$.
- 3.^C Вычислить действие на волновую функцию оператора $e^{i\hat{I}\varphi}$.
- 4.^C Выразить оператор трансляции $\hat{T}_a$ через оператор импульса $\hat{p}$.
- 5.^C Вычислить действие на волновую функцию оператора

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \hat{\mathbf{p}}} U(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \hat{\mathbf{p}}}.$$

6. Показать, что $\hat{A}\hat{A}^+ - \hat{A}^+\hat{A}$ — эрмитов оператор и $\langle \hat{A}\hat{A}^+ \rangle \geq 0$.
7. Доказать равенство коммутаторов

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

8. Вычислить

$$[x, \hat{p}^2], \quad [U(x), \hat{p}], \quad [U(x), \hat{p}^2].$$

- 9.* Доказать справедливость разложения

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} \xi^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

- 10.^C Эрмитов оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от параметра λ . Собственные значения $f_n(\lambda)$ и собственные векторы $|n(\lambda)\rangle$ этого оператора также зависят от λ . Доказать теорему Гельмана–Фейнмана:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle n(\lambda) \left| \frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial \lambda} \right| n(\lambda) \right\rangle.$$

- 11.* Вычислить коммутатор

$$[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)].$$

- 12.^C Пользуясь операторами рождения и уничтожения, вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса, а также средние значения операторов $\hat{x}^4$ и $\hat{x}^{2k+1}$, $\hat{p}^4$ и $\hat{p}^{2k+1}$ в n -м стационарном состоянии гармонического осциллятора. Обсудите величину $\langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle$ в связи

с соотношением неопределенностей.

13.^C Найти операторы рождения и уничтожения для гармонического осциллятора в представлении Гейзенберга.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

14.^C Вычислить коммутаторы

$$[l_\alpha, l_\pm], \quad [l_+, l_-], \quad [l_\alpha, x_\beta], \quad [l_\alpha, p_\beta], \quad [l_\alpha, \mathbf{r}^2], \quad [l_\alpha, \mathbf{p}^2], \\ [l_\alpha, (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})], \quad [l_\alpha, p_\beta p_\gamma], \quad [l_\alpha, f(r)], \quad [l_z, f(\rho)], \quad \rho^2 = x^2 + y^2.$$

15.^C Доказать равенство

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — векторы.

16. Вычислить $\boldsymbol{\sigma}_\pm^2$ и $[\boldsymbol{\sigma}_\pm, \boldsymbol{\sigma}_\alpha]$.

17.^C Вычислить действие на спинор оператора $e^{i\phi(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})}$.

18. Для $j = 1$ записать матрицы $\mathbf{j}^2$, $\mathbf{j}_\alpha$, $\mathbf{j}_\pm$ и найти собственные векторы для $\mathbf{j}^2$ и $\mathbf{j}_z$. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{n})$.

ЗАДАЧИ

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

1.^C Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний частицы в потенциальном ящике:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ +\infty, & x < 0 \cup x > a. \end{cases}$$

Вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса, $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, δx^2 и δp^2 , для n -го стационарного состояния. Найти фазовый объем, приходящийся на одно квантовое состояние.

2. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состоя-

ний в потенциальной яме:

$$\begin{aligned}
 a) \quad V(x) &= \begin{cases} -V_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad V_0 > 0, \\
 b) \quad V(x) &= \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -V_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases} \quad V_0 > 0,
 \end{aligned}$$

3.^C а) Найти энергию и волновую функцию связанного состояния частицы в поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \delta(x).$$

Вычислить средние значения и дисперсии координаты и импульса в связанном состоянии. б) Найти коэффициенты прохождения и отражения. в) Вычислить вероятность “ионизации” связанного состояния при мгновенном изменении параметра ямы с α_0 до α_1 . г) Найти волновую функцию связанного состояния в импульсном представлении.

4. Найти коэффициенты прохождения и отражения частицы:

- а) для прямоугольной потенциальной ступеньки;
- б) для прямоугольного потенциального барьера;
- в) для прямоугольной потенциальной ямы.

5.^C Найти уровни энергии и волновые функции связанных состояний частицы в поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \{ \delta(x+a) + \delta(x-a) \}.$$

Рассмотреть предел $\alpha a \gg 1$ и эволюцию начального состояния, отвечающего волновой функции частицы, связанной в левой яме. Определить вероятность обнаружить частицу в той же яме в момент времени t и частоту осцилляций.

6.^C Найти разрешенные зоны энергии частицы, движущейся в потенциальном поле:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(x - na).$$

Рассмотреть предельные случаи: а) $\alpha a \gg 1$ (сильная связь), б) $\alpha a \ll 1$ (слабая связь). Найти закон дисперсии для первой зоны и вычислить эффективную массу частицы при малых значениях квазиимпульса.

7.* Рассмотреть вопрос о существовании связанного сферически симметричного состояния частицы в сферически симметричной потенциальной яме в пространстве одного, двух (качественно в импульсном представлении для мелкой ямы) и трех измерений.

8.^C Найти волновую функцию, минимизирующую соотношение неопределенностей для координаты и импульса:

$$\delta x \cdot \delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

9.* Пусть в момент $t = 0$ состояние свободной частицы массы m описывается волновой функцией $\psi_0(x)$ такой, что $\langle \hat{x} \rangle = x_0$, $\langle \hat{p} \rangle = p_0$, а произведение неопределенностей координаты и импульса принимает минимальное значение. Найти, как будет меняться во времени волновая функция частицы $\psi(x, t)$ и плотность вероятности $|\psi(x, t)|^2$.

10.^C Найти уровни энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора и кратности их вырождения, разделяя переменные в декартовых координатах. Обсудить связь задачи с моделью ядерных оболочек и получить значения магических чисел 2, 8, 20.

11. Рассмотреть когерентные состояния одномерного гармонического осциллятора. Вычислить распределение по числу квантов в когерентном состоянии.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

12.^C Найти средние значения компонент момента импульса в состоянии $|l, m\rangle$:

$$\langle \hat{l}_x \rangle, \quad \langle \hat{l}_y \rangle, \quad \langle \hat{l}_x \hat{l}_y \rangle, \quad \langle \hat{l}_y \hat{l}_x \rangle, \quad \langle \hat{l}_x^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle.$$

13.^C Найти собственные значения и собственные спиноры для оператора $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ проекции спина на ось $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Вычислить вероятность того, что спинор с проекцией на ось z , равной $1/2$, находится в собственных состояниях $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$.

14.^C Отрицательно заряженный мюон находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда "включается" магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное под углом θ к оси z , спиновое состояние мюона описывается функцией $|\chi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Какой функцией $|\chi(t)\rangle$ описывается спиновое состояние мюона во все последующие моменты времени в представлении Шредингера? Как выглядит оператор спина

мюона $\hat{\mathbf{s}}(t)$ в представлении Гайзенберга? Найдите вектор поляризации мюона $\mathbf{P}(t) = 2\langle\chi|\hat{\mathbf{s}}|\chi\rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гайзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\mathbf{P}(t)$? Меняется ли во времени его длина?

15.^C Найти уровни энергии трехмерного изотропного гармонического осциллятора и кратности их вырождения, разделяя переменные в сферических координатах. Определить пространственную четность состояний.

16.* Записать стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении. Найти волновую функцию основного состояния в импульсном представлении.

17.^C Найти средние значения r , r^2 , $1/r$, $1/r^2$ и $\mathbf{p}^2$ для nl -состояний атома водорода, используя теорему вириала и теорему Гельмана–Фейнмана.

18.^C Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Найти максимальное значение дипольного момента атома $\mathbf{d} = \langle\psi|e\mathbf{r}|\psi\rangle$ и волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, описывающую состояние с максимальным электрическим дипольным моментом.

19.^C Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции:

- а) гармонического осциллятора,
- б) частицы в потенциале

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ \frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

20.^C В квазиклассике найти коэффициент проникновения через потенциальный барьер

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & 0 < x < a, \\ \frac{2Ze^2}{x}, & x > a, \end{cases}$$

в пределе $a \ll 2Ze^2/E$. Обсудить связь с элементарной теорией α -распада и получить закон Гейгера–Неттола.

21. Вычислить в квазиклассическом приближении уровни энергии и собственные функции частицы в потенциале

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$$

22. Частица совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$; E_n – энергии стационарных состояний. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите изменения δE_n энергий стационарных состояний при малом изменении потенциала $U(x) \rightarrow U(x) + \delta U(x)$.

Задачи со значком C рассматриваются на семинаре, знаком $*$ отмечены дополнительные задачи повышенной сложности.

1-я контрольная работа – вторая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 15.03 – 22.03.2021 года)

2-я контрольная работа – первая декада мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 11.05 – 18.05.2021 года)