

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

**Физтех-школа физики и исследований
имени Ландау
(ЛФИ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Основы современной физики
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»
физтех-школа: ЛФИ (только группы 2-82Х)
кафедра: общей физики
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть – 3 зачет. ед.;

физ. практикум: вариативная часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 6 семестр

лабораторные занятия – 60 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120 Самостоятельная работа –
теор. курс – 45 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. В. Н. Глазков

д.ф.-м.н., проф. РАН Э. В. Девятов

д.ф.-м.н. Я. В. Фоминов

д.ф.-м.н. А. Ю. Кунцевич

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

План лекций

1. Структура и колебания кристаллических решёток. Кристалл как система с трансляционной симметрией. Представление о решётке Браве, элементарной ячейке, симметрии кристалла. Обратная решётка, вектор обратной решётки. Дифракция на кристалле, связь условия Брэгга с вектором обратной решётки. Упругие колебания в цепочках. Эквивалентность волн с волновыми векторами, отличающимися на вектор обратной решётки. Первая зона Бриллюэна.
2. Теплоёмкость твёрдого тела. Модель Дебая. Колебания решётки, оптические и акустические моды, положение звуковых колебаний в фононном спектре. Подсчёт полного числа колебаний. Модель Дебая и модель Эйнштейна. Вычисление теплоёмкости в модели Дебая, характерная величина температуры Дебая, низкотемпературный закон T^3 .
3. Электронный ферми-газ. Принцип Паули. Распределение Ферми. Идеальный ферми-газ, энергия и импульс Ферми. Плотность состояний. Энергия и теплоёмкость идеального ферми-газа. Квазичастичное описание ферми-газа: электронные и дырочные возбуждения. Роль взаимодействия частиц в ферми-газе, представление о ферми-жидкости. Изменение спектра электрона в периодическом потенциале в модели слабой связи, энергетические зоны. Причина образования запрещённых зон: дифракция Вульфа–Брегга электронов на решётке.
4. Электроны в кристалле. Приближение сильной связи. Зонная структура, разрешённые и запрещённые зоны, связь заполнения зон с проводимостью. Поверхность Ферми для электронов в кристалле. Понятие эффективной массы.
5. Кинетические и электрические явления в твёрдых телах и металлах. Длина и время свободного пробега. Фононная и электронная теплопроводность. Процессы переброса в трёхфононных процессах. Зависимость вкладов различных процессов в теплопроводность от температуры. Связь электропроводности и длины (времени) свободного пробега. Электрон-электронные, электрон-фононные столкновения и рассеяние на примесях. Правило Маттисена, закон Блоха–Грюнайзена. Электронная теплопроводность. Качественное различие механизмов релаксации энергии и импульса электронов в процессах тепло- и электропроводности, закон Видемана–Франца. Термо-ЭДС.
6. Объёмные полупроводники. Зона проводимости, валентная и запрещённая зоны для полупроводника. Электронные и дырочные возбуждения в полупроводниках. Эффективная масса носителя заряда. Положение уровня химпотенциала в полупроводниках, «правило рычага». Электропроводность полупроводников. Примесные донорные и

акцепторные уровни в слабелегированных полупроводниках, оценка энергии мелких примесных уровней. Положение уровня хипотенциала в слабелегированном полупроводнике.

7. Методы изучения спектров колебаний и свойств ферми-поверхности в твёрдых телах. Экспериментальные методы изучения спектров колебаний и структуры кристаллов. Комбинационное рассеяние света. Упругое и неупругое рассеяние рентгеновских лучей и нейтронов. Метод ARPES (фотоэмиссия с угловым разрешением). Парамагнетизм Паули. Уровни Ландау: циклотронный резонанс, осцилляции де Гааза, их связь с геометрией поверхности Ферми.
8. Сверхтекучесть. Магнитные свойства сверхпроводников (I рода). Термодинамика сверхпроводников. Сверхтекучесть ^4He : λ -точка, спектр квазичастиц, фононы и ротоны. Критерий Ландау. Двухжидкостная модель. Термодинамика сверхпроводников. Критическая температура и критическое магнитное поле. Магнитные свойства сверхпроводников, эффект Мейсснера. Энтропия сверхпроводящего состояния. Скачок теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состояние.
9. Электродинамика сверхпроводников. Основы микроскопии сверхпроводников. Сверхпроводники II рода. Уравнение Лондонов. Количественное описание эффекта Мейсснера, глубина проникновения. Квантовое обобщение уравнения Лондонов, квантование магнитного потока. Основы микроскопии сверхпроводников. Куперовские пары и сверхпроводящий конденсат. Плотность состояний и щель в спектре. Длина когерентности. Сверхпроводники II рода. Вихри Абрикосова, критические поля сверхпроводника II рода, смешанное состояние.
10. Энергетические диаграммы для квазичастичного тока в контактах сверхпроводников. Эффект Джозефсона. Квазичастичное туннелирование, энергетические диаграммы. Эффект Джозефсона (стационарный и нестационарный). Резистивная модель. Джозефсоновская генерация. Сквид.
11. Контактные явления в полупроводниках. p - n -переход. Изгиб зон при контакте двух полупроводников. Гетеропереход, образование квантовой ямы. Использование гетероструктур для формирования низкоразмерных электронных систем, критерии низкоразмерности.
12. Низкоразмерные электронные системы. Двумерные системы – приближение прямоугольной квантовой ямы, спектр. Одномерные системы – спектр, квантование проводимости. Взаимодействие частиц в низкоразмерных системах: вигнеровский кристалл, неприменимость модели ферми-жидкости в одномерных системах. Двумерный электронный газ в квантующем магнитном поле, уровни Ландау. Спектр и

кратность вырождения уровней Ландау. Основные экспериментальные факты о целочисленном КЭХ, метрологическая значимость.

13. Магнитный порядок в кристаллах и квазичастичные возбуждения в магнетиках. Классификация магнетиков: парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики и антиферромагнетики. Магнитный порядок в кристаллах, обменное взаимодействие как причина его возникновения. Фазовый переход в магнитоупорядоченное состояние. Модель молекулярного поля. Закон Кюри–Вейса. Спиновые волны в ферромагнетике, их спектр и вклад в низкотемпературную намагниченность и теплоёмкость ферромагнетика. Отличие спектра спиновых волн в ферро- и антиферромагнетике. Антиферромагнетик в магнитном поле, насыщение в сильном магнитном поле. Описание поля насыщения антиферромагнетика как конденсации возбуждений насыщенной фазы.
14. Актуальные задачи физики конденсированного состояния.

Литература

Основная литература

1. Киттель Ч. Введение в физику твёрдого тела. Москва : Наука, 1978.
2. Морозов А.И. Элементы современной физики твердого тела. Москва : ИД «Интеллект», 2015.
3. Халатников И.М. Теория сверхтекучести. Москва : Наука, 1971 [§ 1, 2, 4].
4. Шмидт В.В. Введение в физику сверхпроводников. М.: МЦНМО, 2000 [§ 1-6, 8, 20-22, 25, 26, 45].
5. Демиховский В.Я., Вугальтер Г.А. Лекции по физике низкоразмерных систем. Физика квантовых низкоразмерных структур. Москва : Логос, 2000 [гл.1, § 5.1.1, 6.1, 6.2.].

Методические пособия по курсу (доступны на сайте МФТИ)

1. Девятков Э.В. Основы физики низкоразмерных систем и режима квантового эффекта Холла учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2015.
2. Глазков В.Н. Методы изучения структуры и колебаний кристаллов учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2016.
3. Морозов А.И. Электронная ферми-жидкость в металлах : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ 2016.
4. Фоминов Я.В., Щелкачёв Н.М. Эффект Джозефсона : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2010.
5. Щелкачёв Н.М., Фоминов Я.В. Электрический ток в наноструктурах: кулоновская блокада и квантовые точечные контакты : учебно-методическое пособие. Москва : МФТИ, 2010.
6. Бурмистров И.С. Введение в теорию целочисленного квантового эффекта Холла, Москва : МФТИ, 2015.

Дополнительная литература

1. *Овчинкин В.А., Раевский А.О., Ципенюк Ю.М.* Сборник задач по общему курсу физики. Ч.3. Москва : Физматкнига, 2009 [Приложение II].
2. *Долгополов В.Т.* Целочисленный квантовый эффект Холла и сопряжённые с ним явления // Успехи физических наук. 2014. Т. 184. С. 113–136.
3. *Девятков Э.В.* Краевые состояния в режимах целочисленного и дробного квантовых эффектов Холла // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. С. 207–227.
4. *Морозов А.И.* Физика твёрдого тела. Кристаллическая структура. Фононы. Москва : МИРЭА, 2010;
5. *Морозов А.И.* Физика твёрдого тела. Электроны в кристалле. Металлы. Полупроводники. Диэлектрики. Магнетики. Сверхпроводники. Москва : МИРЭА, 2008. (Сайт кафедры.)
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т. 2. Москва : Физматлит, 2007.
7. *Ципенюк Ю.М.* Основы сверхпроводимости. Москва : МФТИ, 1996.
8. *Кириченко Н.А.* Квантовая физика конденсированных систем : учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 3-го курса ЛФИ (только группы 2-82X)
на весенний семестр 2020-2021 учебного года

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи для решения		
			Группа «0»	На семинар*	На дом
1	01.02–06.02	Структура и колебания кристаллической решётки, фононы	0-1-1 0-1-2	2.1, Т1-1, 2.16, Т1-2	Т1-3, 2.20, Т1-4, 2.62, 2.77, 2.72
2	08.02–13.02	Теплоёмкость твёрдого тела. Модель Дебая.	0-2-1 0-2-2	2.21, 2.34, 2.54, 2.74	2.27, Т2-1, 2.47, Т2-2, 2.58, 2.75
3	15.02–22.02	Электронный ферми-газ.	0-3-1 0-3-2	3.13, 3.5, 3.22, Т3-1	3.44, 3.53, 3.59, 3.87, 3.61, 3.28
4	01.03–06.03	Зонная структура	0-4-1 0-4-2	3.1, Т4-1, 3.35, 3.37	3.38, 3.85, 3.57, 4.54, Т4-2, Т4-3
5	08.03–13.03	Кинетические и электрические явления в твёрдых телах и металлах	0-5-1 0-5-2	3.65, 3.75, 3.9, Т5-1, 3.74	2.65, 3.77, 3.79, 3.80, Т5-2, 3.88

6	15.03– 20.03	Объёмные полупроводники	0-6-1 0-6-2	4.2, 4.40, 4.25, 4.21	4.7, T6-1, 4.50, 4.12, 4.11, T6-2
7	22.03– 27.03	Контрольная работа (по семинарским группам)			
8	29.03– 04.04	Сдача 1-го задания			
9	05.04– 10.04	Электродинамика сверхпроводников. Основы микроскопии сверхпроводников.	0-9-1 0-9-2	T9-1, T9-2, T9-3, 5.11	5.4, 5.7, T9-4, T9-5, T9-6, T9-7
10	12.04– 17.04	Энергетические диаграммы для квазичастичного тока в контактах сверхпроводников. Эффект Джозефсона.	0-10-1 0-10-2	T10-1, T10-2, T10-3	T10-4, T10-5, T10-6, T10-7
11	19.04– 24.04	Контактные явления в полупроводниках.	0-11-1 0-11-2	4.24, 4.18, T11-1	4.16, 4.20, T11-2, T11-3, T11-4
12	26.04– 01.05	Низкоразмерные электронные системы	0-12-1 0-12-2	T12-1, T12-2, 4.45	4.48, 4.30, T12-3, T12-4, T12-5, T12-6
13	27.04– 02.05	Магнитный порядок в кристаллах. Спиновые волны и их квантование.	0-13-1 0-13-2	T13-1, T13-2, T13-3, T13-4	T13-5, T13-6, T13-7, T13-8, T13-9
14	03.05– 08.05	Контрольная работа (по семинарским группам)			
15	10.05– 15.05	Сдача второго задания			
16	17.05– 22.05	Зачётная неделя			

* - Рекомендованные к разбору задачи, на семинаре разбираются задачи из предложенных или аналогичные по выбору семинариста.

Примечание

Задачи из группы «0» решаются студентами перед семинаром для ознакомления с темой недели, условия задач приведены ниже.

Номера задач соответствуют разделу «Строение вещества» Сборника задач по общему курсу физики. Ч. 3 / под ред. В.А. Овчинкина. М.: МФТИ, 2009.

Номера задач, начинающиеся с буквы «Т», соответствуют текстовым задачам из списка ниже.

Задачи группы «0»

0-1-1 Оценить максимальную частоту акустического фонона в кристалле серебра. Кристаллическая решётка гранецентрированная кубическая с периодом $a=4.1 \text{ \AA}$, скорость звука $s=3.7 \text{ км/с}$.

0-1-2 Найти три наименьших длины векторов обратной решётки для простой кубической решётки с периодом a .

0-2-1 Оценить величину температуры Дебая для алмаза. Скорость звука $s=20 \text{ км/с}$, расстояние между ближайшими атомами углерода $d=1.54 \text{ \AA}$.

0-2-2 Во сколько раз отличаются количества теплоты, необходимые для увеличения на 1% температуры адиабатически изолированного кристалла кремния от начальных температур $T_1=100 \text{ мК}$ и $T_2=10 \text{ К}$. Температура Дебая для кремния $\theta=640 \text{ К}$.

0-3-1 Оценить величину температуры вырождения для электронов в металле с концентрацией свободных электронов $n=10^{22} \text{ л/см}^3$.

0-3-2 Найти отношение длины фермиевского волнового вектора к минимальному расстоянию от точки $k=0$ до границы первой зоны Бриллюэна для металла с простой кубической решёткой и одним свободным электроном на элементарную ячейку.

0-4-1 В модельном одномерном кристалле законы дисперсии электрона в двух нижних энергетических зонах имеют вид $E_1(k)=A \times \sin^2(ka/2)$ и $E_2(k)=A \times (1-0.1 \cos(ka))$, где a — период кристалла и $A>0$. Определить, будет ли данный кристалл проводником или диэлектриком, если на элементарную ячейку приходится: (а) один электрон, (б) два электрона.

0-4-2 В модельном одномерном кристалле энергия электрона зависит от его волнового вектора по закону $E(k)=A \times \sin^4(ka/2)$, где a — период кристалла и $A>0$. Найти фермиевский волновой вектор и энергию Ферми, если на элементарную ячейку приходится один свободный электрон. Построить график $E(k)$ и отметить на нем заполненные при $T=0$ состояния. Взаимодействие электронов друг с другом не учитывать.

0-5-1 Образец соединен с холодной ступенью криостата, поддерживаемой при температуре $T_0=100$ мК, хладопроводом из тонкой проволочки, сопротивление которой равно $R=1$ Ом. Пользуясь законом Видемана–Франца, оценить, какую мощность можно непрерывно выделять в образце, чтобы его температура не повысилась, больше чем на $\Delta T=10$ мК.

0-5-2 Во сколько раз изменится теплопроводность сапфира при изменении температуры от $T_1=10$ К до $T_2=2$ К? Температура Дебая для сапфира $\Theta=1040$ К.

0-6-1 В кремнии ширина запрещенной зоны равна $\Delta = 1.14$ эВ. Оценить, во сколько раз увеличится проводимость кристалла чистого кремния при нагреве от $T_1=300$ К до $T_2=350$ К.

0-6-2 Электрон и дырка в полупроводнике могут образовать водородоподобное связанное состояние, характерный размер которого много больше межатомного расстояния (экситон Ванье). Оценить энергию связи и характерный размер экситона в основном состоянии. Эффективную массу электрона и дырки считать равными $m^*=0.1$ от массы свободного электрона, диэлектрическая проницаемость материала $\epsilon=10$.

0-9-1 Оценить максимальный ток, который может протекать через индиевую проволочку диаметром $d = 100$ мкм, не разрушая сверхпроводимость. Критическое поле для индия при $T = 0$ равно $H_c=280$ Э.

0-9-2 На кварцевый стержень диаметром $d=10$ мкм напылён слой свинца ($T_c= 7.2$ К), толщина которого много больше лондоновской глубины проникновения. Оценить, чему должна быть равна напряженность магнитного поля, приложенного параллельного оси стержня при $T>T_c$, чтобы при переходе в сверхпроводящее состояние был захвачен магнитный поток, равный кванту потока Φ_0 .

0-10-1 При приложении какого напряжения начнёт течь ток в туннельном контакте между сверхпроводящим свинцом ($T_c= 7.2$ К) и нормальным металлом? Температура $T \ll T_c$.

0-10-2 При каком напряжении на джозефсоновском контакте в нём будут генерироваться электромагнитные волны с длиной волны $\lambda=3$ см?

0-11-1 Чему равен уровень химпотенциала в полупроводнике с легированием акцепторными примесями при $T=0$? Считать энергию «потолка» валентной зоны равной нулю, ширина запрещенной зоны Δ , расстояние от примесного уровня до «дна» зоны проводимости δ .

0-11-2 Найти потенциал плоской границы контакта полупроводников на p – n -переходе при $T=0$, если концентрация донорных примесей в 10 раз больше, чем концентрация акцепторных. Оба полупроводника получены легированием кремния ($\Delta = 1.1$ эВ), примесные уровни близки к валентной зоне (p) или зоне проводимости (n). Считать нулевым потенциал полупроводника n -типа.

0-12-1 При изучении двумерного электронного газа в графене или гетероструктурах часто используют дополнительный электрод («затвор»), который создаёт перпендикулярное плоскости газа электрическое поле, притягивающее или выталкивающее электроны из внешней цепи. Это позволяет регулировать концентрацию электронов. В опыте такого типа при приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена энергия Ферми электронов оказалась равна $E_F=0.1$ эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене в этом опыте. Спектр электронов вблизи точки Дирака $E(\vec{k} - \vec{k}_0) = c^* |\vec{k} - \vec{k}_0|$, $c^* = 10^8$ см/с.

0-12-2 Вычислить энергетическое расстояние между нижними уровнями размерного квантования для двумерного электронного газа в Si и GaAs в приближении прямоугольной потенциальной ямы с бесконечно высокими потенциальными стенками в направлении, нормальном к плоскости двумерного электронного газа. Эффективная масса электрона m^* в GaAs и Si составляет 0.067 и 0.19 масс свободного электрона соответственно. Ширину ямы принять равной $d=20$ нм. Сравнить полученное значение с характерными температурами – комнатной (300 К), температурой жидкого азота (77 К), температурой жидкого гелия (4.2 К).

0-13-1 Оценить, при какой температуре диполь-дипольное взаимодействие атомных магнитных моментов могло бы привести к возникновению упорядоченной магнитной структуры. Для оценки принять магнитный момент атомов равным μ_B , расстояние между атомами $d=4$ Å.

0-13-2 Спектр длинноволновых элементарных возбуждений ферромагнетика (спиновых волн) $\omega(k)=Ak^2$. Определить зависимость от температуры вклада спиновых волн в теплоёмкость трёхмерного ферромагнетика.

Текстовые задачи

T1-1 Для базоцентрированной ромбической решётки с параметрами решётки a , $b=2a$, c построить обратную решётку, выделить первую зону Бриллюэна, найти объём первой зоны Бриллюэна и сравнить с объёмом элементарной ячейки исходной ромбической решётки.

T1-2 В модельной одномерной цепочке, содержащей атомы двух сортов, возбуждены колебания с волновым вектором $k=\pi/(2a)$, где a – период цепочки (расстояние между одинаковыми атомами). Оказалось, что амплитуды колебаний атомов разных сортов в одной из мод колебаний отличаются в $\sqrt{2}$ раз. Найти отношение масс атомов. В какой ветви спектра реализуется эта ситуация?

T1-3. Геологическая экспедиция обнаружила новый минерал, обнаруженные образцы имеют естественную кубическую огранку. При изучении рентгеновской дифракции на порошковом образце (схема Дебая–Шерера) обнаружено, что при падении на образец рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda=0.7 \text{ \AA}$ ($K\alpha$ - линия молибдена) первые три кольца дифракционной картины соответствуют отклонениям излучения на углы $\varphi_1=(10\pm1)^0$, $\varphi_2=(18\pm1)^0$ и $\varphi_3=(27\pm1)^0$ от направления падения пучка. Определить, к какой из кубических решёток относится кристаллическая решётка этого минерала, и найти сторону кубической элементарной ячейки.

T1-4 В приближении «ближайших соседей» закон дисперсии фононов $\omega(k)$ в зоне Бриллюэна является монотонно возрастающей функцией. При учёте взаимодействия с соседями, следующими за ближайшими, это уже не всегда так. Например, в свинце в направлении $[100]$ (вдоль ребра элементарного куба) частота фононов достигает максимума при $k_0 = 0.8k_{\text{Бр}}$, где $k_{\text{Бр}}$ – волновое число, соответствующее границе зоны Бриллюэна в этом направлении. Скорость продольного звука в этом направлении составляет $s=2.2\times10^5 \text{ см/с}$. Используя модель одномерной цепочки, найти силовые постоянные для первых и вторых соседей. Свинец кристаллизуется в ГЦК-решётку с $d=4.95 \text{ \AA}$. Периодом одномерной цепочки считать расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению $[100]$.

T2-1 В кристалле поваренной соли NaCl при температуре 10 К теплоёмкость единицы объёма $C = 23.1\times10^3 \text{ эрг/(К}\cdot\text{см}^3)$. Оценить усреднённую скорость звука в кристалле и его дебаевскую температуру. Постоянная решётки $d=0.563 \text{ нм}$.

T2-2 Следуя приближениям модели Дебая, определить отношение теплоёмкостей образцов хрома и золота одного объёма при температурах $T_1=150 \text{ К}$ и $T_2=15 \text{ К}$. Плотности хрома и золота равны $\rho_{\text{Cr}}=7.15 \text{ г/см}^3$ и $\rho_{\text{Au}}=19.3 \text{ г/см}^3$, температуры Дебая $\Theta_{\text{Cr}}=606 \text{ К}$ и $\Theta_{\text{Au}}=162 \text{ К}$. Кристаллическая решётка хрома — ОЦК, золота – ГЦК, в обоих случаях в примитивной ячейке содержится один атом.

Указание: значение функции $f(\xi) = 3\xi^3 \int_0^{1/\xi} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$ приближённо равно

0.50 для $\xi = 0.25$ и 0.94 для $\xi = 0.93$.

T3-1 Найти радиус нейтронной звезды с массой M , равной двум массам Солнца, и температурой не выше $T=10^9$ К. Радиационным давлением пренебречь.

T4-1 Оценить, с точки зрения зонной структуры будут ли диэлектриком или металлом следующие вещества: медь, алмаз, висмут.

T4-2 Однородная цепочка (период a) одновалентных атомов формирует одномерный проводник. Известно, что при некоторой температуре в такой цепочке происходит фазовый переход (пайерлсовский переход), при котором атомы поочерёдно смещаются влево и вправо вдоль цепочки (смещение n -го атома $u_n = (-1)^n \delta$, $\delta \ll a$) и период цепочки удваивается (цепочка димеризуется). В рамках приближения слабой связи объяснить (качественно), почему средняя энергия электронов в димеризованной цепочке оказывается ниже, чем в однородной? Как изменятся проводящие свойства системы после димеризации?

T4-3 При фотоэффекте в металле возможно резонансное увеличение фототока, если после поглощения кванта света электрон попадёт точно на следующую ветвь спектра: такой электрон может распространяться в кристалле на большое расстояние, и вероятность того, что электрон достигнет поверхности, сохранив избыточную энергию, увеличивается. Эта возможность используется в методе ARPES для изучения спектра электронов в металле. Считая взаимодействие электронов с кристаллом слабым, определить для металла с простой кубической решёткой минимальную энергию кванта света, для которой такой процесс возможен. Считать, что каждый атом отдаёт один электрон в зону проводимости, эффективная масса равна массе свободного электрона, энергия Ферми равна 3 эВ.

T5-1 На какой максимальный угол может отклониться электрон при поглощении фотона в одновалентном металле с простой кубической решёткой, хорошо описываемом моделью Дебая и моделью свободных электронов.

T5-2 При изучении сопротивления индия с очень малой концентрацией примесей (RRR порядка 100000) было обнаружено, что при охлаждении от $T_1=4$ К до $T_2=3$ К сопротивление образца уменьшилось в 2 раза. Определить отношение $R(100 \text{ мК})/R(4 \text{ К})$.

Т6-1 В непрямоугольном полупроводнике с малым смещением дна зоны проводимости относительно потолка валентной зоны эффективные массы электронов и дырок одинаковы ($m_e = m_h$), а определённая из измерения температурной зависимости сопротивления ширина запрещённой зоны равна Δ . При изучении внутреннего фотоэффекта при низких температурах в видимой части спектра в образце этого полупроводника обнаружен резкий рост проводимости при некоторой энергии кванта света $E > \Delta$. Считая, что форму дна зоны проводимости и потолка валентной зоны можно описывать квадратичной параболой, оценить по этим данным расстояние в k -пространстве между минимумом энергии в зоне проводимости и максимумом энергии в валентной зоне.

Т6-2 При легировании образца кремния донорными примесями с концентрацией $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ оказалось, что ток дырок при температуре $T = 600 \text{ К}$ уменьшился в $\gamma = 3$ раза по сравнению со случаем нелегированного образца при той же температуре. Найти долю ионизованных примесей при температуре $T = 600 \text{ К}$, если эффективные массы электронов и дырок равны $m_n^* = 1.08 m_0$ и $m_p^* = 0.56 m_0$, ширина запрещённой зоны при данной температуре равна $E_g = 1.05 \text{ эВ}$. Подвижность дырок считать постоянной.

Т9-1 В сверхтекучем гелии минимум отношения $\varepsilon(p)/p$ достигается вблизи от роторного минимума, который описывается следующими параметрами: $\Delta/k_B = 8.6 \text{ К}$, $p_0/\hbar = 1.9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$. Пользуясь критерием Ландау, найти критическую скорость $V_{\text{кр}}$, ниже которой гелий должен течь без трения.

Т9-2 Для сверхтекучего гелия в полости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов a и b ($a < b$) возможны вихревые состояния с целым числом n квантов циркуляции. Найти энергию одноквантового ($n = 1$) вихревого состояния (в расчёте на единицу длины цилиндра). Считать заданной массу атомов гелия m и их концентрацию ρ_0 .

Т9-3 Как показали опыты Мейсснера и Оксенфельда, магнитная индукция внутри сверхпроводника равна нулю (речь идёт о сверхпроводниках первого рода). Это означает, что сверхпроводник – это не тоже самое, что идеальный проводник, хотя в обоих случаях сопротивление равно нулю. Убедитесь в том, что состояние идеального проводника (который ведёт себя как идеальный диамагнетик) в магнитном поле зависит от предыстории. Для этого рассмотрите два пути перевода идеально проводящего шарика в состояние ($T < T_c$, $H > 0$): а) сначала шарик охлаждается, затем включается магнитное поле и б) поле включается до охлаждения. Результат представьте в виде рисунка

магнитных силовых линий в обоих случаях. Что будет в случае сверхпроводника?

T9-4 Длинный цилиндр из сверхпроводника второго рода, у которого нижнее критическое поле $H_{c1} = 400$ Э, помещён в магнитное поле $H = 500$ Э, параллельное его оси, и при этом его намагниченность составила половину того значения, которое было при $H = H_{c1}$. Найти расстояние между вихрями Абрикосова a в этом поле, учитывая, что вихри образуют регулярную треугольную решётку.

T9-5 По бесконечной сверхпроводящей плёнке толщины d ($-d/2 < x < d/2$) течёт заданный сверхпроводящий ток I (на единицу длины поперёк направления тока). Найдите распределение магнитного поля и сверхпроводящего тока внутри плёнки.

T9-6 Индуктивность участка электрической цепи обычно определяется по величине энергии магнитного поля F_M , возникающего при протекании

заданного тока I по этому участку: $F_M = \int \frac{H^2}{8\pi} dV = \frac{L^M I^2}{2c^2}$, интеграл здесь

берётся по всему пространству. Эту индуктивность будем называть *магнитной*. Часть магнитной индуктивности связана с полем во внешнем пространстве и от свойств проводника не зависит (определяется только геометрией), а часть связана с полем внутри проводника:

$L^M = L_{\text{внеш}}^M + L_{\text{внутр}}^M$. Но при создании в участке цепи тока I часть энергии перешла ещё и в кинетическую энергию F^K носителей тока (электронов). С этой энергией можно связать так называемую *кинетическую*

индуктивность участка цепи L^K : $F^K = \int n \frac{mu^2}{2} dV = \frac{L^K I^2}{2c^2}$, где n –

концентрация носителей тока, m – масса одного носителя, u – его скорость, а интегрирование ведётся по объёму проводника. В сверхпроводниках учёт кинетической индуктивности оказывается важен. Для сверхпроводника, занимающего полупространство (имеющего плоскую поверхность и бесконечную глубину), найдите вклад поля внутри образца в магнитную индуктивность $L_{\text{внутр}}^M$ и кинетическую индуктивность L^K на квадрат (т.е. для случая квадратной поверхности).

T9-7 Тонкая сверхпроводящая плёнка толщины $d \ll \lambda$ нанесена на поверхность диэлектрического цилиндра радиуса R . При комнатной температуре система помещена в продольное магнитное поле, затем температура опущена ниже T_c . После этого магнитное поле выключается. (а). Как квантуется магнитный поток в цилиндре? (б) Найдите распределение магнитного поля.

T10-1 Имеется контакт между двумя сверхпроводниками с различными щелями Δ_1 и Δ_2 ($\Delta_1 > \Delta_2$). С помощью энергетических диаграмм объяснить вольт-амперную характеристику для квазичастичного тока через контакт в случае а) $T = 0$, б) $T > 0$ (см. рис. 1).

T10-2 Найти критический ток I_c для параллельного соединения двух джозефсоновских контактов, критические токи которых равны I_{c1} и I_{c2} .

T10-3 Двухконтактный сверхпроводящий квантовый интерферометр представляет собой сверхпроводящее кольцо, в которое включены два одинаковых джозефсоновских контакта. Такая система называется СКВИД (англ. SQUID – superconducting quantum interference device). Найти максимальный бездиссипативный ток СКВИДа в зависимости от магнитного потока через кольцо. Схема относительного расположения джозефсоновских контактов и подводящих проводов показана на рис.2.

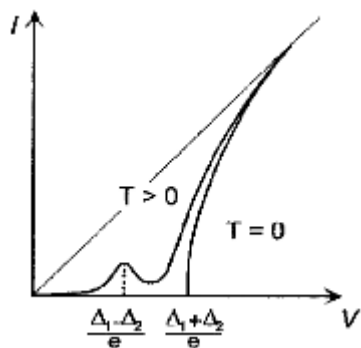


Рис. 1: К задаче T.10-1.

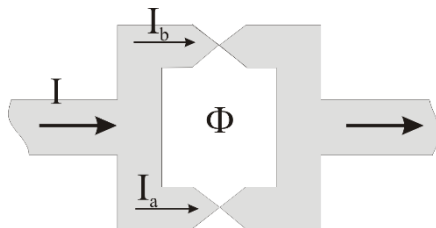


Рис. 2: К задаче T.10-3

T10-4. Имеется туннельный контакт между нормальным металлом и сверхпроводящим алюминием с критической температурой $T_c = 1.2$ К. Контакт поддерживается при температуре $T = 0.5$ К и к нему приложено напряжение немного меньшее, чем напряжение, при котором ток через переход начинает быстро расти. При помощи энергетической диаграммы объяснить, почему в описанном опыте возникает охлаждение электронов в контакте из нормального металла. Зависит ли эффект охлаждения от полярности приложенного напряжения?

T10-5. Найти критический ток I_c (т.е. максимальный бездиссипативный ток) для последовательного соединения двух джозефсоновских контактов,

критические токи которых равны I_{c1} и I_{c2} . При какой разности фаз φ_c этот ток достигается?

T10-6. В рамках резистивной модели джозефсоновского перехода найти зависимость напряжения на переходе от времени $V(t)$ в режиме заданного тока. Какое усреднённое значение $\bar{V}$ покажет вольтметр постоянного тока, подключённый к переходу?

Указание: для решения уравнения вида $\varphi' + a \sin \varphi = b$ можно использовать

$$\text{подстановку } \sin \varphi = \frac{2 \tan(\varphi/2)}{1 + \tan^2(\varphi/2)}.$$

T10-7. Рассмотрим СКВИД, содержащий два джозефсоновских контакта с равными критическими токами I_c . Пусть кольцо СКВИДа имеет собственную индуктивность L . В эксперименте измеряется максимальный бездиссипативный ток $I_{\max}$ через СКВИД как функция внешнего магнитного потока Φ_{ext} . Оказывается, что максимум и минимум тока $I_{\max}$ наблюдаются по-прежнему при $\Phi_{\text{ext}} = 0$ и $\Phi_{\text{ext}} = \Phi_0/2$. Найти эти значения тока $I_{\max}$, считая параметр $\beta = 2LI_c / \Phi_0$ малым. Оценить отношение

$$\frac{I_{\max}(\Phi_0/2)}{I_{\max}(0)}$$

для типичных параметров СКВИДа: $I_c = 10$ мкА, $L = 20$ пГн.

T11-1. Для получения двумерного электронного газа с поверхностной плотностью $N = 10^{11}$ 1/см² используется гетероструктура из сильно легированного донорными примесями AlAs ($N_d \sim 10^{17}$ 1/см²) и чистого GaAs. Ширина запрещённой зоны в AlAs 2.16 эВ, в GaAs 1.42 эВ, на границе контакта потолок валентной зоны GaAs на 0.3 эВ выше потолка валентной зоны в AlAs. GaAs считать чистым полупроводником, примесной уровень в AlAs считать расположенным очень близко к дну зоны проводимости. Эффективная масса электрона в GaAs $m^* = 0.067m_0$, диэлектрическая проницаемость арсенида галлия $\epsilon = 12$, $T = 0$. (i) построить энергетическую диаграмму гетероперехода; (ii) оценить в конденсаторном приближении толщину слоя, в котором формируется двумерный электронный газ, сравнить её с характерным межелектронным расстоянием; (iii) оценить параметры треугольной потенциальной ямы, сравнить расстояние между нижними уровнями с энергией Ферми двумерного газа данной плотности.

T11-2. Одна из возможных конструкций светодиода основана на двойной гетероструктуре, внешними слоями которой являются слои GaN с большой концентрацией примесей n и p -типа, а внутренним (активным) слоем является $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ с $x \sim 0.3$, являющийся прямозонным полупроводником (см. рис. 3). Ширина запрещённой зоны в GaN равна

3.4 эВ, в $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ 2.5 эВ, температура низкая. (i) Считая $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ чистым полупроводником, построить схему зонной структуры в отсутствие приложенного напряжения. Запрещённую зону $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{N}$ считать расположенной симметрично относительно дна зоны проводимости и потолка валентной зоны в GaN, толщину активного слоя считать большой по сравнению с толщиной слоя аккумуляции; (ii) При пропускании через гетероструктуру небольшого тока электроны и дырки инжектируются в активный слой, где после релаксации могут рекомбинировать с излучением фотона. Определить длину волны излучаемого света; (iii) Можно ли в качестве активного слоя использовать кремний или германий?

T11-3. При температуре 300 К на цилиндрических образцах типичного металла и полупроводников p и n типа длиной 1 см создан перепад температур в 1 К. Определить направление вектора напряжённости электрического поля внутри этих образцов и оценить его величину. Оценить величину термо-ЭДС на паре полупроводников p и n типа, если их соединить, как показано на рис. 4. Для полупроводников принять $m_e = m_h = 0.2m_0$, концентрация донорных и акцепторных примесей $n_{\text{прим}} = 10^{15} \text{ 1/см}^3$. Эффектом «фононного ветра» пренебречь.

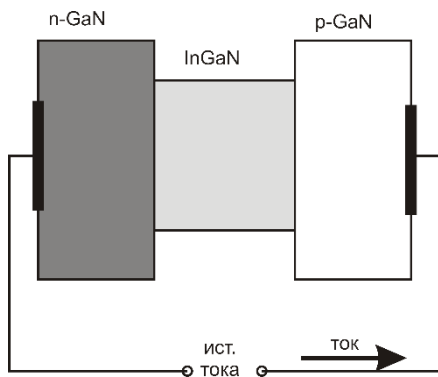


Рис. 3: К задаче T11-2

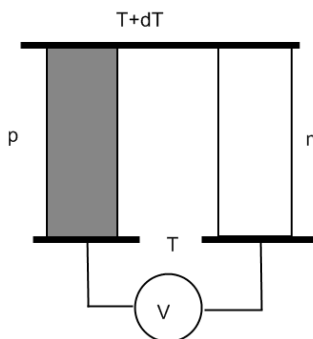


Рис. 4: К задаче T11-3

T11-4. При $T = 0$ электроны, находящиеся в инверсном слое гетероструктуры, могут рассматриваться как двумерный вырожденный электронный газ. Найти фермиевскую скорость и температуру вырождения (энергию Ферми) для таких электронов, если их

концентрация на единицу поверхности составляет $n_s = 10^{12} \text{ 1/см}^2$. Эффективная масса носителей $m^* = 0.067$ массы свободного электрона.

T12-1. Многие вопросы физики твёрдого тела рассматриваются в приближении невзаимодействующих электронов, когда учитывается лишь взаимодействие электрона с кристаллической решёткой, приводящее к появлению эффективной массы электрона, отличной от массы свободной частицы. Оценить концентрацию носителей для случая двумерного металла, при которой справедливо пренебрежение межэлектронным кулоновским взаимодействием. Для численной оценки взять параметры двумерного электронного газа в кремниевой МОП-структуре: эффективная масса носителя заряда равна 0.19 массы свободного электрона, диэлектрическая проницаемость $\epsilon = 10$.

T12-2. Для электрона в сильном магнитном поле получить квантование уровней энергии с помощью условия квантования Бора–Зоммерфельда. Провести численную оценку расстояния между двумя соседними уровнями энергии для GaAs (эффективная масса носителей $m^* = 0.067$ массы свободного электрона) в магнитном поле 10 Тл и оценить температуру, необходимую для наблюдения эффектов, в которых наличие такой щели является существенным.

T12-3. Электроны над поверхностью жидкого гелия формируют двумерный слой на расстоянии около 100 Å от поверхности. Притяжение электронов к границе гелия связано с действием электростатических сил заряда отражения, отталкивание – с отрицательным сродством электрона к гелию. Из-за отталкивания электрона от гелия под электроном деформируется граница раздела. Если приложить к слою электронов переменное электрическое поле, то эта деформация станет центром

генерации поверхностных волн (риплон), спектр которых $\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho} k^3$, где

$\sigma = 0.36 \text{ дин/см}$ – коэффициент поверхностного натяжения, а $\rho = 0.147 \text{ г/см}^3$ плотность жидкого гелия. При достаточно низкой температуре в двумерном электронном газе формируется периодическое состояние вигнеровского кристалла. Оценить поверхностную концентрацию электронов в сформировавшейся регулярной решетке, если в эксперименте наблюдается резонансное поглощение энергии электрического поля при частоте колебаний поля 30 МГц.

T12-4. При учёте спина электрона каждый уровень Ландау дополнительно расщеплён по проекциям спина (зеemanовское расщепление). В случае двумерного электронного газа в GaAs сравнить величины циклотронного и зеemanовского расщеплений в поле 10 Тл и определить, под каким углом к нормали к плоскости двумерного газа

необходимо приложить магнитное поле, чтобы эти расщепления сравнились. g -фактор электрона в GaAs принять равным 0.44.

Указание: учесть, что циклотронная частота в двумерной электронной системе определяется только компонентой поля вдоль направления размерного квантования, а зеемановское расщепление определяется полным полем.

T12-5. Квантовый эффект Холла возникает в двумерной системе, в которой заполнено целое число уровней Ландау. При этом диссипативная (продольная, xx) компонента тензора магнетосопротивления R_{xx} обращается в ноль, а холловская (недиагональная, xy) компонента R_{xy}

принимает квантованное значение $\frac{h}{ne^2}$, где $n=1, 2, 3, 4...$ – фактор

заполнения (число заполненных уровней Ландау). Определить концентрацию носителей заряда в образце, если в поле 10 Тл наблюдается плато в холловском сопротивлении со значением холловского сопротивления 12.9 кОм.

T12-6. Пользуясь соображениями размерности, оценить расстояние между квантованными уровнями энергии электрона в магнитном поле в графене в поле 10 Тл. Спектр электронов вблизи точки Дирака $E(\vec{k} - \vec{k}_0) = c^* |\vec{k} - \vec{k}_0|$, $c^* = 10^8$ см/с.

T13-1. В металлических ферромагнетиках магнитный момент связан с электронами проводимости. Эффект обменного взаимодействия электронов проводимости можно приближённо описать, считая, что электроны с параллельными спинами, находящиеся на расстояниях меньших некоторого r_0 друг от друга, взаимодействуют с энергией $(-U)$, где U – положительная величина, в то время как электроны с противоположно направленными спинами не взаимодействуют между собой. Показать, что для возникновения спонтанной намагниченности энергия взаимодействия должна превысить некоторую критическую величину (т.н. критерий Стонера). Считать заданной концентрацию электронов.

T13-2. В редкоземельном гранате $Gd_3Fe_5O_{12}$ имеется три подрешётки магнитных ионов: ионы железа Fe^{3+} ($L = 0$, $S = 5/2$) занимают две коллинеарных подрешётки по схеме «три вверх-два вниз», а редкоземельные ионы гадолиния Gd^{3+} ($L = 0$, $S = 7/2$) формируют свою подрешётку. Из-за большого расстояния между редкоземельными ионами, их взаимодействием между собой можно пренебречь, а вот ионы железа в обеих подрешётках взаимодействуют сильно и друг с другом, и с ионами гадолиния. Ферромагнитное упорядочение подрешёток железа наступает

при температуре 560 К, а при температуре 280 К полная намагниченность кристалла обращается в ноль. Объяснить эффект и оценить эффективное поле, создаваемое ионами железа на ионе гадолиния при низкой температуре.

T13-3. Оксид марганца MnO кристаллизуется в ГЦК решётку со стороной куба $4.5 \text{ \AA}$. При температуре 122 К он упорядочивается антиферромагнитно, причём спины ионов Mn^{2+} формируют чередующиеся ферромагнитные плоскости, перпендикулярные к одной из главных диагоналей куба. На какой минимальный угол отклонится при дифракции на порошке MnO пучок нейтронов с энергией 25 мэВ при температуре образца 4.2 К? Как будет качественно изменяться интенсивность этого дифракционного пика при нагреве до температуры фазового перехода?

T13-4. Определить относительное изменение частоты света при рассеянии на 90° с испусканием магнона в ферромагнетике на простой кубической решётке с периодом решётки $d = 3 \text{ \AA}$. Величина обменного интеграла $|J| = 100 \text{ К}$, спин магнитного иона $S = 5/2$, взаимодействуют только ближайшие соседи, длина волны падающего света 400 нм, показатель преломления среды $n = 1.3$. Спектр спиновых волн в кубическом ферромагнетике $\omega = 2 \frac{|J|S}{\hbar} (3 - \cos(k_x a) - \cos(k_y a) - \cos(k_z a))$.

T13-5. При измерении низкотемпературной теплоёмкости парамагнитной соли с магнитными ионами Ni^{2+} ($S = 1$) в магнитном поле $B = 4 \text{ Тл}$ при некоторой температуре наблюдается характерный пик теплоёмкости (аномалия Шотки). Считая магнетизм чисто спиновым, определить, при какой температуре наблюдается максимум теплоёмкости. Оценить, во сколько раз теплоёмкость в максимуме превышает решёточную (для оценки использовать характерные значения для диэлектрических кристаллов).

Указание: функция $y = \frac{x^2(4 + 2 \cosh(x))}{(1 + 2 \cosh(x))^2}$ имеет максимум при $x \approx 1.881$, со значением в максимуме $y_{\max} \approx 0.637$.

T13-6. Существуют металл-органические комплексы, в которых в каждой молекуле присутствует два иона со спином $S = 1/2$, связанных обменным взаимодействием с антиферромагнитным знаком обменного интеграла. Определить зависимость магнитной восприимчивости от температуры (на одну молекулу), построить её схематический график.

Показать, что при высоких температурах восприимчивость следует закону Кюри–Вейса и определить температуру Кюри.

Указание: взаимодействие пары магнитных ионов описывается гамильтонианом обменного взаимодействия $H = J\vec{S}_1\vec{S}_2$, параметр $J > 0$ считать известным.

T13-7. В рамках модели молекулярного поля определить, при какой температуре намагниченность ферромагнетика достигнет половины от своего максимального значения. Температура Кюри равна Θ , магнетизм чисто спиновый, $S = 1/2$.

Указание: считать известным, что искомая температура близка к температуре Кюри.

T13-8. Показать, что при конечной температуре ферромагнитный порядок в одномерной системе разрушается тепловыми флуктуациями.

Указание: вычислить связанную с возбуждением спиновых волн поправку к намагниченности ферромагнетика.

T13-9. Под действием однородного переменного магнитного поля в тонких ферромагнитных пленках могут возбуждаться спиновые волны. Когда на толщине пленки укладывается нечетное число полувольт n , возникает стоячая волна колебаний намагниченности (спин-волновой резонанс). В пермаллоевой пленке толщиной $L = 2000 \text{ \AA}$ наблюдается такой резонанс с $n = 7$ на частоте $f = 9 \text{ ГГц}$.

(а) Определить, чему равна эффективная масса этих квазичастичных возбуждений (в единицах массы свободного электрона)?

(б) Считая, что пленка сделана из чистого железа и используя результат п.(а), найти относительное изменение намагниченности пленки при нагреве её от $T_1 = 0 \text{ К}$ до $T_2 = 300 \text{ К}$. Спин иона железа считать равным $S = 5/2$, размер элементарного куба ОЦК решетки $a = 2.87 \text{ \AA}$.

Ответы к текстовым задачам

T1-1 $V_{1\text{с.}\text{\AA}\delta.} = \frac{(2\pi)^3}{a^2 c}$

T1-2 $\frac{m}{M} = \frac{3}{4}$, оптическая ветвь

T1-3 ОЦК, $d = 5.36 \text{ \AA}$

$$\text{T1-4} \quad C_2 = \frac{ms^2}{d^2} \frac{1}{1 - \cos(0.8\pi)} \approx 3.75 \times 10^3 \text{ \AA}^2 / \text{\AA}^2 ,$$

$$C_1 = -4C_2 \cos(0.8\pi) \approx 12.1 \times 10^3 \text{ \AA}^2 / \text{\AA}^2 , \quad C_1 / C_2 = 3.24 .$$

$$\text{T2-1} \quad s = \frac{k_B \Theta d}{2\sqrt[3]{3\pi^2} \hbar} = 3.76 \times 10^5 \text{ \AA} / \text{\AA} .$$

$$\text{T2-2} \quad \text{при } 150 \text{ K: } \frac{C_{\text{Cr}}^{(V)}}{C_{\text{Au}}^{(V)}} = \frac{M_{\text{Au}} \rho_{\text{Cr}}}{M_{\text{Cr}} \rho_{\text{Au}}} \times \frac{f(T / \Theta_{\text{Cr}})}{f(T / \Theta_{\text{Au}})} \approx 0.75 ,$$

$$\text{при } 15 \text{ K: } \frac{C_{\text{Cr}}^{(V)}}{C_{\text{Au}}^{(V)}} = \frac{M_{\text{Au}} \rho_{\text{Cr}}}{M_{\text{Cr}} \rho_{\text{Au}}} \times \left(\frac{\Theta_{\text{Au}}}{\Theta_{\text{Cr}}} \right)^3 \approx 0.027 .$$

$$\text{T3-1} \quad R = \frac{\hbar^2}{GM^{1/3} m^{8/3}} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \approx 8.4 \text{ км} , \quad V_F / c \approx 1/3 .$$

T4-1 Медь: один валентный электрон на примитивную ячейку – металл; алмаз: 8 валентных электронов в примитивной ячейке – диэлектрик; висмут: 10 валентных электронов на примитивную ячейку – полуметалл из-за перекрытия зон.

T4-2 снижение энергии электронов связано с появлением запрещенной зоны на $k = \pm k_F$, система становится диэлектриком

$$\text{T4-3} \quad \hbar\omega = E_F \left(\left(\frac{2\pi}{ak_F} - 1 \right)^2 - 1 \right) = 0.2 \text{ \AA} .$$

T5-1 Внутризонный переход запрещён, при межзонном переходе квазиимпульс электрона почти не меняется.

$$\text{T5-2} \quad \frac{R(100 \text{ мK})}{R(4 \text{ K})} \approx 0.34 .$$

$$\text{T6-1} \quad \delta^2 = \frac{4m}{\hbar^2} (E - \Delta) .$$

$$\text{T6-2} \quad \alpha = \frac{n_i}{N_d} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = 0.51 , \quad \text{где } n_i = 1.9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} \quad - \quad \text{концентрация}$$

носителей в легированном образце.

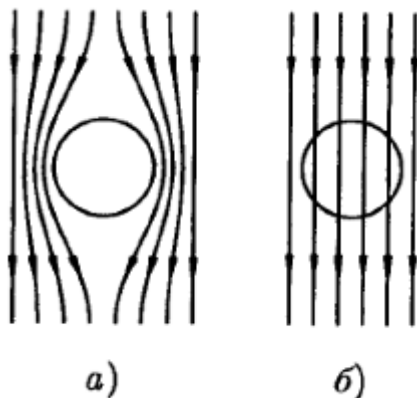


Рис. 5: К задаче Т9-3.

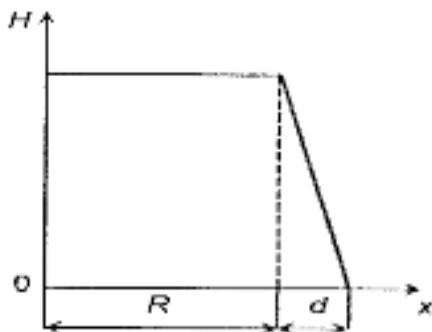


Рис. 6: К задаче Т9-7.

Т9-1 $V_{\text{сд}} = \min(\varepsilon(p)/p) \approx 60 \text{ мВ} / \text{нм}.$

Т9-2 $E_{\text{сд}} = \frac{\pi \hbar^2 \rho_0}{m} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$

Т9-3 См. рис. 5, в сверхпроводнике всегда, как в случае а).

Т9-4 $a = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}B_2}} \approx 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ см}.$

Т9-5 $h(x) = -\frac{2\pi I}{c} \frac{\sinh(x/\lambda)}{\sinh(d/(2\lambda))}, \quad j_s(x) = \frac{I}{2\lambda} \frac{\cosh(x/\lambda)}{\sinh(d/(2\lambda))}.$

Т9-6 $L_{\text{дл}}^M = L^K = 2\pi\lambda.$

Т9-7 $\Phi = \Phi_0 n \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd}\right)^{-1},$ см. рис.6.

Т10-1 см. рис. 7

Т10-2 $I(\varphi) = I_{c1} \sin \varphi + I_{c2} \sin \varphi.$

Т10-3 $I_{\text{max}} = 2I_c \left| \cos\left(\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \right|.$

Т10-4 При отрицательном потенциале металлического контакта металлический контакт покидают только "горячие" электроны, рис. 8. От полярности ответ не зависит.

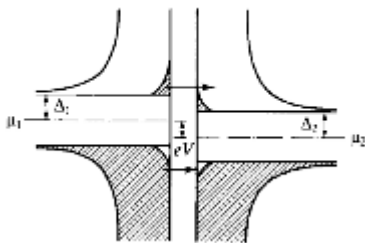


Рис. 7: К задаче T10-1

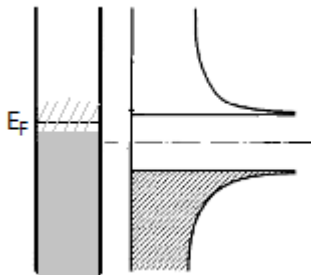


Рис. 8: К задаче T10-4

T10-5 $I_c = \min(I_{c1}, I_{c2}), \cos \varphi_c = -\frac{\min(I_{c1}, I_{c2})}{\max(I_{c1}, I_{c2})}.$

T10-6 $V(t) = R \frac{I^2 - I_c^2}{I + I_c \cos \omega t},$ где $\omega = \frac{2e}{\hbar} R \sqrt{I^2 - I_c^2}, I > I_c; \bar{V} = \frac{\hbar \omega}{2e}.$

T10-7 $\frac{I_{\max}(\Phi_0/2)}{I_{\max}(0)} = \frac{\pi \beta}{4} \approx 0.15.$

T11-1 (i) См. рис. 9; (ii) $d = 660$ нм; (iii) расстояние между уровнями размерного квантования $\Delta E/k_B \approx 300$ К.

T11-2 (i) См. рис. 10; (ii) $E = 2.5$ эВ, $\lambda = 500$ нм; (iii) нет: кремний или германий являются непрямозонными полупроводниками, в них рекомбинация с излучением фотона запрещена правилами отбора.

T11-3 В приближении задачи в металле и n -полупроводнике электрическое поле направлено от холодного к горячему концу образца, в p -полупроводнике – от горячего конца образца к холодному; оценка термо-ЭДС $U \approx 0.7$ мВ.

T11-4 $E_F/k_B \approx 300$ К, $V_F = p_F/m^* \approx 4 \times 10^7$ м/с.

T12-1 $N_s \gg \left(\frac{me^2}{\pi \hbar^2 \varepsilon} \right) \sim 10^{12} \text{ 1/м}^2.$

T12-2 $E = n \hbar \frac{eB}{mc},$ энергия кванта около 200 К

T12-3 $n \approx \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\rho \omega^2}{\sigma} \right)^{2/3} \approx 1.5 \times 10^9 \text{ 1/м}^2.$

T12-4 В поле 10 Тл циклотронное расщепление 17 мэВ, зеемановское 0.26 мэВ; циклотронное и зеемановское расщепление сравниваются при угле наклона поля к нормали $\varphi = \arccos\left(\frac{g m}{2 m_0}\right) = 89.2^\circ$.

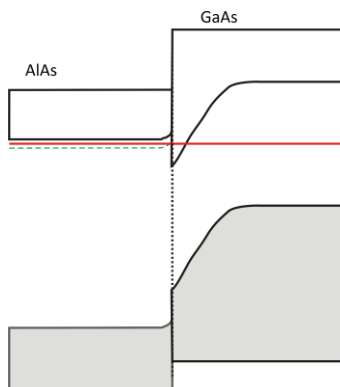


Рис. 9: К задаче T11-1

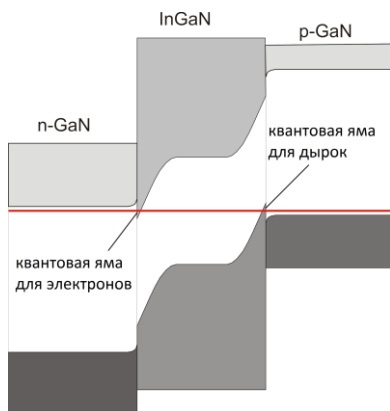


Рис. 10: К задаче T11-2

T12-5 $n_S = 4.8 \times 10^{11} \text{ 1/см}^2$.

T12-6 $\Delta E \sim \sqrt{\frac{\hbar e B}{c}} c^* \approx 1000 \text{ К}.$

T13-1 $U_{\text{эд}} = \frac{E_F}{\pi n r_0^3}.$

T13-2 В точке компенсации наведённая молекулярным полем намагниченность ионов гадолиния уравнивает намагниченность ферромагнитно упорядоченных ионов железа. Эффективное поле равно 33 Тл.

T13-3 $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4a}, \varphi = 20^\circ$. При нагреве к температуре фазового перехода интенсивность этого дифракционного пика будет плавно уменьшаться и обратится в ноль в точке перехода.

T13-4 $\frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{4\pi|J|Sd^2n^2}{\hbar c\lambda} \approx 5.2 \times 10^{-7}.$

T13-5 $T_{\max} = \frac{g\mu_B B}{1.881k_B} \approx 2.9\text{K}, C_{\max} \approx 0.64k_B, \frac{C_{\text{магн}}}{C_{\text{реш}}} \sim 10^{-4}.$

T13-6 $\chi = \frac{8\mu_B^2}{J} \frac{J}{k_B T} \frac{1}{e^{J/(k_B T)} + 3}, \text{ при } T \gg J \quad \chi \approx \frac{2\mu_B^2}{k_B T} \left(1 - \frac{J}{4k_B T}\right), \Theta = \frac{J}{4k_B}$

T13-7 $T \approx 0.90\Theta.$

T13-8 Каждый магнон уменьшает намагниченность на $1\mu_B$, вычисляемая поправка к намагниченности в одномерном случае равна

$$\Delta M \propto \int_0^\infty \frac{dk}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}, \text{ её расходимость при } k=0 \text{ означает разрушение}$$

ферромагнитного порядка длинноволновыми флуктуациями.

T13-9 (а) $m_{\text{yôô}} = \frac{\pi\hbar n^2}{4fL^2} \approx 12m_e$; (б) $\frac{\Delta M}{M_0} \approx 0.007.$

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
подготовки: **ЛФИ, ФПМИ**
физтех-школы: **высшей математики**
кафедра: **3**
курс: **6**
семестр:

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов Экзамен — 6 семестр
практические (семинарские)
занятия — 15 часов
лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 45 Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Теорема Хана—Банаха и теорема об отделимости в линейном нормированном пространстве.
2. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса—Фреше о представлении сопряжённого гильбертова пространства.
3. Слабая топология в нормированном пространстве и слабая* топология в сопряжённом пространстве. Теорема о представлении слабо* непрерывного линейного функционала.
4. Теорема Мазура о слабом замыкании выпуклого множества нормированного пространства.
5. Теорема Банаха—Алаоглу. Рефлексивные банаховы пространства. Теорема о слабой компактности замкнутого шара в рефлексивном пространстве.
6. Оператор, сопряжённый к линейному ограниченному оператору. Равенство норм линейного ограниченного оператора и его сопряжённого.
7. Связь ядра линейного ограниченного оператора и множества значений его сопряжённого. Связь множества значений линейного ограниченного оператора и ядра его сопряжённого.
8. Банаховы алгебры. Банахова алгебра линейных непрерывных операторов в нормированном пространстве.
9. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры. Теорема о спектральном радиусе. Теорема Гельфанда—Мазура.
10. Теоремы Фредгольма и теорема о спектре для компактного линейного оператора в банаховом пространстве.
11. Эрмитово—самосопряжённые линейные непрерывные операторы в гильбертовом пространстве, свойства их спектра. Теорема Гильберта—Шмидта.
12. Идеалы и гомоморфизмы в банаховой алгебре. Множество максимальных идеалов и спектр элемента банаховой алгебры. Преобразование Гельфанда.
13. Инволюция и B^* -алгебры, теорема Гельфанда—Найма. Эрмитовы (самосопряжённые) элементы B^* -алгебры и их спектральные свойства.
14. Пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как B^* -алгебра. Ограниченные нормальные, самосопряжённые, унитарные операторы. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве. Разложения единицы.
15. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Собственные значения ограниченного нормального оператора.

Литература

Основная

1. Рудин У. Функциональный анализ. — Москва : Мир, 1975.
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
3. Трепогин В. А. Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1993.
4. Константинов Р. В. Лекции по функциональному анализу: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2009.
5. Трепогин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.

Дополнительная

6. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1962.
7. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. — Москва : МЦНМО, 2004.
8. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — Москва : Наука, 1974.
9. Кириллов А. А., Гвишиани А. Д. Теоремы и задачи функционального анализа. — Москва : Наука, 1988.
10. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — Москва : Мир, 1970.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В., Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Сопряжённое пространство. Теоремы Хана—Банаха и Рисса—Фреше

§ 9: 1; 3; 4; 5; 7; 9; 11.

II. Слабая и слабая* топология

§ 10: 3; 4; 6; 7; 14.

- 1.1. Доказать, что конечномерное линейное нормированное пространство рефлексивно.
- 1.2. Доказать, что в бесконечномерном линейном нормированном пространстве X слабое замыкание сферы $S_1(0) = \{ x \in X : \|x\| = 1 \}$ равно шару $B_1(0) = \{ x \in X : \|x\| \leq 1 \}$.

1.3. Доказать, что если в линейном нормированном пространстве X существует последовательность $x_n \in S_1(0)$, слабо сходящаяся к нулю, то слабое секвенциальное замыкание сферы $S_1(0)$ равно шару $B_1(0)$.

1.4. Пусть X — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Доказать, что слабая топология в X и слабая* топология в X^* неметризуемы.

1.5. Исследовать последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \ell_\infty$ вида

$$x_n(k) = \cos(k) \quad \text{для } k \leq n; \quad x_n(k) = \sin(k) \quad \text{для } k > n,$$

на слабую сходимость в пространстве ℓ_∞ . Рассматривая ℓ_∞ как сопряжённое к пространству ℓ_1 , исследовать в нём слабую* сходимость последовательности x_n .

1.6. Привести пример функционала $f \in \ell_\infty^*$, не достигающего своей нормы.

1.7. Привести пример несепарабельного банахова пространства X , такого, что замкнутый единичный шар в его сопряжённом пространстве X^* не является слабо* секвенциально компактным.

1.8. Доказать, что в рефлексивном банаховом пространстве X замкнутый единичный шар $B_1(0)$ является слабо секвенциально компактным.

1.9. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $M \subset X$ его замкнутое выпуклое подмножество. Доказать, что для любого $x \in X$ существует $y \in M$, такой, что $\|x - y\| = \rho(x, M)$.

1.10. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, Y — линейное нормированное пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Доказать, что множество $A(B_1(0))$ сильно замкнуто в Y .

III. Сопряжённые линейные ограниченные операторы

§ 11: 1; 3; 10; 12.

1.11. Доказать, что оператор $A: \mathbb{L}_2(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$(Ax)(k) = \int_0^k \frac{x(t)}{1+t} dt, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{L}_2[0, +\infty)$$

является ограниченным, и найти его сопряжённый. Исследовать множество $A(B_1(0))$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве $\mathbb{C}$.

1.12. Доказать, что оператор $A: \ell_1 \rightarrow \mathbb{L}_3(0, +\infty)$ вида

$$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}}, \quad \text{п. в. } t > 0, \quad \forall x \in \ell_1$$

является ограниченным, и найти его сопряжённый. Исследовать множество $A(B_1(0))$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве $\mathbb{L}_3(0, +\infty)$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Банаховы алгебры

2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$.

- а) Доказать, что если x и xy обратимы в $\mathcal{A}$, то обратим и y ;
- б) Доказать, что если xy и yx обратимы в $\mathcal{A}$, то обратимы x и y ;
- в) Показать на примере, что может быть $xy = e \neq yx$ (например, рассмотрите операторы правого и левого сдвига в ℓ_1);
- г) Если $\dim \mathcal{A} < +\infty$, то $yx = e$ равносильно $xy = e$;
- д) Доказать, что элемент $e - yx$ обратим, если обратим элемент $e - xy$ (если $z = (e - xy)^{-1}$, то рассмотрите $e + yzx$);
- е) Пусть комплексное число $\lambda \in \sigma(xy)$ и $\lambda \neq 0$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(yx)$. Показать на примере, что $\sigma(xy)$ может содержать ноль, тогда как $\sigma(yx)$ нуля не содержит;
- ё) Доказать, что если x обратим, то $\sigma(xy) = \sigma(yx)$;
- ж) Доказать, что xy и yx всегда имеют один и тот же спектральный радиус (воспользуйтесь $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$);
- з) Доказать, что если $P(x) = 0$ для комплексного многочлена P , такого, что $P(0) \neq 0$, то x обратим.

2.2. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, множество

$$G(\mathcal{A}) = \{ x \in \mathcal{A} : \exists x^{-1} \in \mathcal{A} \}.$$

- а) Доказать, что множество $G(\mathcal{A})$ открыто в $\mathcal{A}$;
- б) Доказать, что для любой граничной точки x множества $G(\mathcal{A})$ и для любой последовательности $x_n \in G(\mathcal{A})$, сходящейся к x , выполнено

$$\|x_n^{-1}\| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, такая, что

$$\exists M > 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \|x\| \|y\| \leq M \|xy\|.$$

Доказать, что $\mathcal{A}$ изометрически изоморфна $\mathbb{C}$.

2.4. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, $x \in \mathcal{A}$. Доказать, что для любого открытого множества $V \subset \mathbb{C}$ вида $\sigma(x) \subset V$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любого $y \in \mathcal{A}$ вида $\|y - x\| < \delta$ выполнено $\sigma(y) \subset V$.

II. Спектр и резольвента

§ 7: 1; 7; 11; 13; 15.

§ 11: 9.

2.5. Найти спектр и резольвенту оператора Вольтерра $A: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{L}_2[0, 1]$ вида

$$(Af)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, 1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0, 1].$$

2.6. Пусть число $a \neq 0$. Найти спектр и резольвенту оператора трансляции $T_a: \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида $(T_a f)(x) = f(x + a)$ для всех $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ и п. в. $x \in \mathbb{R}$.

III. Эрмитово-самосопряжённые ограниченные операторы

§ 11: 5; 7; 11; 13.

§ 12: 18.

2.7. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Пусть оператор A^*A компактен. Доказать, что оператор A также является компактным.

2.8. Доказать, что оператор инверсии $J: \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида

$$(Jf)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}),$$

является эрмитово-самосопряжённым, и найти его спектр и резольвенту.

2.9. Пусть $A: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{L}_2[0, 1]$ — оператор Вольтерра (см. задачу 12.18). Найти спектр и резольвенту эрмитово-самосопряжённых операторов A^*A и AA^* .

IV. Идеалы и гомоморфизмы. Преобразование Гельфанда

2.10. Доказать, что линейное пространство $C^1[0, 1]$ с нормой

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_C + \|f'\|_C$$

является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечного умножения. Найти множество всех гомоморфизмов этой банаховой алгебры. Для любой функции $f \in C^1[0, 1]$ найти её преобразование Гельфанда $\hat{f}$.

2.11. В линейном пространстве

$$\ell_1 = \left\{ x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\} \quad \text{с нормой} \quad \|x\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|$$

рассматривается произведение

$$(xy)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in \ell_1.$$

Доказать, что ℓ_1 с таким произведением является коммутативной банаховой алгеброй. Найти множество всех гомоморфизмов этой банаховой алгебры. Для любого элемента $x \in \ell_1$ найти его преобразование Гельфанда $\hat{x}$.

2.12. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, элементы $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{A}$ таковы, что $xy = yx$. Доказать, что спектральный радиус элемента $x + y$ не превосходит суммы спектральных радиусов x и y , а спектральный радиус элемента xy не превосходит произведения спектральных радиусов x и y .

V. Спектральная теорема для ограниченных операторов

2.13. Найти спектральное разложение для эрмитово-самосопряжённого оператора инверсии $J: \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ (см. задачу 2.8).

2.14. Пусть $A: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{L}_2[0, 1]$ — оператор Вольтерра (см. задачу 12.18 или задачу 2.5). Найти спектральные разложения для эрмитово-самосопряжённых операторов A^*A и AA^* .

2.15. Пусть функция $h \in \mathbb{L}_\infty[0, 1]$, линейный оператор $A: \mathbb{L}_2[0, 1] \rightarrow \mathbb{L}_2[0, 1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = h(x)f(x) \quad \text{п. в. } x \in [0, 1], \quad \forall f \in \mathbb{L}_2[0, 1].$$

Доказать, что A — нормальный оператор, найти его норму, спектр (указав все компоненты спектра) и спектральное разложение.

2.16. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Пусть нормальный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет счётный спектр

$$\sigma(A) = \{ \lambda_k \}_{k=1}^{\infty}$$

и спектральное разложение E . Доказать, что вектор $y \in \operatorname{Im} A$ если и только если

$$y \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \quad \text{и} \quad \sum_{k: \lambda_k \neq 0} \frac{\|E(\lambda_k)y\|^2}{|\lambda_k|^2} < +\infty.$$

2.17. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Доказать, что остаточный спектр нормального оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ пуст.

2.18. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельно гильбертово пространство. Доказать, что точечный спектр нормального оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ не более чем счётен.

2.19. Пусть нормальный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таков, что $|A| = |A - I|$, где I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Для любого $x \in \mathcal{H}$ найти $(A + A^*)(x)$.

2.20. Найти спектральное разложение для унитарного оператора трансляции $T_a: \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ (см. задачу 2.6). Найти спектр оператора $|T + T^*|$ и классифицировать его компоненты.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладная математика и физика»**
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 5 зач. ед.;

лекции — 45 часов

практические (семинарские)

занятия — 45 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу и задание составил

к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, определение классического и обобщённого решения по Л. Шварцу. Корректность обобщённого решения по отношению к классическому на открытом множестве. Пример классического и обобщённого решений для уравнения свободных колебаний струны.
2. Постановка классической задачи Коши для волнового уравнения. Теорема единственности классического решения этой задачи. Решение классической задачи Коши для уравнения колебаний струны, формула Даламбера. Решение классической задачи Коши для трёхмерного волнового уравнения со сферически симметричными начальными условиями.
3. Пространства Л. Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Преобразование Фурье и свёртка в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ и их свойства, связанные с обобщённым дифференцированием. Лемма о дифференцировании действия.
4. Носитель обобщённой функции. Теорема о носителе свёртки обобщённой функции. Лемма об интегрировании действия и преобразование Фурье свёртки обобщённых функций.
5. Определение суперпозиции обобщённой функции n переменных с n -мерной вектор-функцией m переменных, примеры $\delta(t - |x|) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ и $\delta(R - |x|) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$. Обобщённое решение уравнения свободных колебаний струны в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$.
6. Функция Грина линейного дифференциального оператора в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, достаточное условие существования единственной функции Грина. Вычисление обобщённого решения линейного дифференциального уравнения в частных производных с помощью его функции Грина.
7. Вычисление всех функций Грина произвольного линейного дифференциального оператора в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ и применение этой техники для вычисления всех функций Грина оператора переноса $\frac{\partial}{\partial t} + (a, \nabla_x)$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$.
8. Функция Грина оператора Лапласа Δ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ и обобщённое решение уравнения Пуассона для абсолютно интегрируемого источника.
9. Функции Грина операторов Гельмгольца $\Delta \pm k^2$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ и обобщённое решение уравнения Гельмгольца для абсолютно интегрируемого источника.
10. Функция Грина оператора Шрёдингера $i\frac{\partial}{\partial t} + a^2\Delta$ и оператора теплопроводности $\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$ в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$.
11. Функция Грина оператора Даламбера $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$ в пространствах $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$. Обобщённое решение одномерного и трёхмерного волно-

вого уравнения для источника медленного роста. Запаздывающий потенциал.

12. Постановка обобщённой задачи Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Корректность решения обобщённой задачи Коши по отношению к решению классической задачи.
13. Решение обобщённой задачи Коши для однородного волнового уравнения в пространстве $S'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ (формула Даламбера) и в пространстве $S'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ (формула Кирхгофа).
14. Решение обобщённой задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности в пространстве $S'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m)$ (формула Пуассона).

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2008.
3. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2003.
4. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.
5. Сборник задач по уравнениям математической физики. Под редакцией В. С. Владимирова. — 4-е изд., стереотип.. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Дополнительная

6. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
7. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики, Том 1, Функциональный анализ. — Москва : Мир, 1977.
8. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики, Том 1. — Москва : Мир, 1982.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 марта)

I. Волновое уравнение, классическое решение

- 1.1. Пусть $a > 0$. Найти общее классическое решение $u \in C^2(t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})$ уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.2. Пусть $a > 0$. Для любой функции $f \in C^1(t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ найти классическое решение $u \in C^2(t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = 0, \quad u'_t(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.3. Пусть $a > 0$. Для любых функций $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ и $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ найти классическое решение $u \in C^2(t \geq 0, x \in \mathbb{R})$ задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u'_t(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4. Пусть число $a > 0$ и вектор $\ell \in \mathbb{R}^m$. Для любой функции $w \in C^1(\mathbb{R})$ найти классическое решение $u \in C^2(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m)$ задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x \right) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

$$u(0, x) = 0, \quad u'_t(0, x) = w((\ell, x)), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где (ℓ, x) — скалярное произведение векторов $\ell \in \mathbb{R}^m$ и $x \in \mathbb{R}^m$, и оператор Лапласа

$$\Delta_x = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

1.5. Пусть число $a > 0$, функции $u_0 \in C^3[0, +\infty)$ и $u_1 \in C^2[0, +\infty)$, причём $u'_0(0) = 0$. Найти классическое решение $u \in C^2(t \geq 0, x \in \mathbb{R}^3)$ задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta_x \right) u(t, x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$u(0, x) = u_0(|x|), \quad u'_t(0, x) = u_1(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ — длина вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, и оператор Лапласа

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

II. Обобщённые функции: дифференцирование и преобразование Фурье

1.6. Вычислить пределы в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right); \quad \text{б) } \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

1.7. В $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ доказать равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k).$$

1.8. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{x}$, действующий по формуле:

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x) \right\rangle = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ равенство

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1.$$

1.9. Вычислить пределы в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$:

$$\text{а) } \frac{1}{x + i\varepsilon}; \quad \text{б) } \frac{1}{x - i\varepsilon}.$$

1.10. В $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ доказать равенство:

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

1.11. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ обобщённую функцию

$$\mathcal{P}\frac{1}{x^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

а) Доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ равенство

$$x^n \mathcal{P}\frac{1}{x^n} = 1;$$

б) Найти в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ общее решение $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ уравнения

$$x^n u(x) = 1.$$

1.12. Пусть $P(z)$ комплексный многочлен степени $N \in \mathbb{N}$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все различные комплексные корни P кратностей $r_1, \dots, r_m$ соответственно. Найти в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ общее решение $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ уравнения

$$P(ix)u(x) = 1.$$

1.13. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\frac{1}{|x|}$, действующий по формуле:

$$\left\langle \mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \varphi(x) \right\rangle = \int_{|x|<1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

принадлежит пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ равенство

$$x\mathcal{P}\frac{1}{|x|} = \text{sign}(x).$$

1.14. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ преобразование Фурье следующих обобщённых функций:

$$\text{а) } \delta(x); \quad \text{б) } \mathcal{P}\frac{1}{x}; \quad \text{в) } \text{sign}(x); \quad \text{г) } \theta(x); \quad \text{д) } |x|; \quad \text{е) } \mathcal{P}\frac{1}{|x|}.$$

1.15. Пусть обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ такова, что $f'(x) = 0$. Доказать, что $f(x) = \text{const}$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

1.16. Пусть обобщённая функция $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$, мультииндекс $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$. Доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ равенства:

$$\text{а) } F[f(x - x_0)](y) = e^{i(y, x_0)} F[f(x)](y);$$

$$\text{б) } \partial^\alpha F[f(x)](y) = F[(ix)^\alpha f(x)](y); \quad \text{в) } F[\partial^\alpha f(x)](y) = (-iy)^\alpha F[f(x)](y).$$

1.17. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ преобразование Фурье следующих обобщённых функций:

$$\text{а) } \frac{1}{|x|^2}, \quad \text{б) } \frac{1}{|x|}, \quad \text{в) } |x|, \quad \text{г) } \delta_S(x),$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ — длина вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, и $\delta_S(x)$ — дельта-функция на сфере: $\langle \delta_S(x), \varphi(x) \rangle = \int_{|x|=1} \varphi(x) dS_x$.

1.18. Пусть вектор $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ преобразование Фурье следующих обобщённых функций:

$$\text{а) } \delta(x - x_0); \quad \text{б) } |x - x_0|^2; \quad \text{в) } (x, x_0); \quad \text{г) } e^{i(x, x_0)}.$$

1.19. Пусть $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, матрица $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ имеет ранг m , столбец $b \in \mathbb{R}^m$. Доказать, что отображение

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto \left\langle F^{-1}[f](y), e^{i(b,y)} F[\varphi](A^T y) \right\rangle$$

определяет линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, который будем называть обобщённой функцией $f(Ax + b) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Доказать, что в случае $m = n$ по этому определению получим

$$\langle f(Ax + b), \varphi(x) \rangle = \langle f(y), \varphi(A^{-1}(y - b)) / |\det A| \rangle.$$

1.20. Для дельта-функции $\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, зависящей от переменного $x \in \mathbb{R}$, вычислить по определению из предыдущей задачи действия

$$\langle \delta(x_1 - x_2), \varphi(x_1, x_2) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

$$\langle \delta(a^T x + b), \varphi(x) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

где $a \in \mathbb{R}^m$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

1.21. В пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ вычислить:

$$\text{а) } F[\delta(x_1 + x_2)](y_1, y_2); \quad \text{б) } F[|x_1 - x_2|](y_1, y_2).$$

1.22. Пусть $a > 0$. Для любых $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ определим обобщённую функцию $u(t, x) = f(x - at) + g(x + at) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ равенство

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u(t, x) = 0.$$

1.23. Пусть $a > 0$. Вычислить:

$$\text{а) } F_x[\theta(at - |x|)](y) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}); \quad \text{б) } F_x \left[\frac{\delta(at - |x|)}{|x|} \right](y) \text{ в } \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3).$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Свёртка обобщённых функций

2.1. Для любой $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ доказать в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ равенства:

$$\text{а) } \delta * f = f * \delta = f; \quad \text{б) } (\partial^\alpha \delta) * f = f * (\partial^\alpha \delta) = \partial^\alpha f \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^m.$$

2.2. Вычислить свёртки в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ ($t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$):

- а) $(\theta(t)\delta(x)) * \theta(t - |x|)$; б) $(\delta(t)\delta'(x)) * \theta(t - |x|)$;
 в) $(\theta(t)\theta(x)) * \theta(t - |x|)$; г) $(\theta(t)\delta(t + x)) * \theta(t - |x|)$.

2.3. Вычислить свёртки в пространстве $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ ($x \in \mathbb{R}^3, x_0 \in \mathbb{R}^3$):

- а) $\delta_S(x) * e^{i(x, x_0)}$; б) $\delta_S(x) * |x|$; в) $\delta_S(x) * (x, x_0)^2$;

здесь $\delta_S(x)$ — дельта-функция на сфере: $\langle \delta_S(x), \varphi(x) \rangle = \int_{|x|=1} \varphi(x) dS_x$.

II. Функция Грина линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

2.4. Пусть $a \in \mathbb{C}$. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ все функции Грина $\mathcal{E}(x)$ оператора L :

- а) $L = \frac{d}{dx} - a$; б) $L = \frac{d^2}{dx^2} - a^2$; в) $L = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} - 6$.

2.5. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ все функции Грина $\mathcal{E}(x_1, x_2)$ оператора L :

- а) $L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} - 1$; б) $L = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} - i$.

2.6. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{1+m})$ все функции Грина $\mathcal{E}(t, x)$ оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + (v, \nabla_x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad v \in \mathbb{R}^m.$$

2.7. Пусть $a > 0$.

- а) Доказать, что оператор Гельмгольца $\Delta - a^2$ имеет в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ единственную функцию Грина $\mathcal{E}_a(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$;
 б) Вычислить $\mathcal{E}_a(x)$, и найти в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ её предел $\mathcal{E}_0(x)$ при $a \rightarrow +0$;
 в) Доказать, что $\mathcal{E}_0(x)$ — функция Грина оператора Лапласа в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

2.8. Пусть $r > 0$. Найти обобщённое решение $u(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ уравнения Пуассона:

- а) $\Delta u(x) = \frac{\theta(r - |x|)}{\sqrt{|x|}}$; б) $\Delta u(x) = \frac{\theta(|x| - r)}{|x|^4}$.

2.9. Пусть $a > 0$. Найти в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ функцию Грина $\mathcal{E}(t, x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ оператора Даламбера

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

удовлетворяющую условию $\text{supp } \mathcal{E} \subset \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0 \}$.

2.10. Пусть $a > 0$. Найти в $S'(\mathbb{R}^2)$ функцию Грина $\mathcal{E}(t, x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ оператора Шрёдингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

удовлетворяющую условию $\text{supp } \mathcal{E} \subset \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0 \}$.

2.11. Пусть $a > 0$ и $k > 0$. Найти в $S'(\mathbb{R}^2)$ функцию Грина $\mathcal{E}(t, x) \in S'(\mathbb{R}^2)$ оператора Клейна—Гордона—Фока $\square_a + k^2$, удовлетворяющую условию $\text{supp } \mathcal{E} \subset \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0 \}$.

III. Обобщённая задача Коши для волнового уравнения и уравнения теплопроводности

2.12. Решить обобщённые задачи Коши:

- а) $u_{tt} - u_{xx} = \delta(t)\delta'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- б) $u_{tt} - u_{xx} = \delta'(t)\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- в) $u_{tt} - u_{xx} = \delta(t - |x|) + \delta'(t)\theta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- г) $u_{tt} - u_{xx} = \theta(t)\theta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- д) $u_{tt} - \Delta_x u = \theta(t)\delta(x) + \delta(t)|x|, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0.$

2.13. Решить обобщённые задачи Коши:

- а) $u_t - u_{xx} = \delta'(t)\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- б) $u_t - u_{xx} = \theta(t)\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- в) $u_t - u_{xx} = \delta(t)\delta'(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$
- г) $u_t - u_{xx} = \theta(t)\theta(1 - |x|), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6
Трудоемкость: базовая часть – 3 зачет. ед.

<u>лекции – 30 часов</u>	<u>Экзамен – нет</u>
<u>практические (семинарские)</u>	
<u>занятия – нет</u>	<u>Диф.зачет – 6 семестр</u>
<u>лабораторные занятия – 30 часов</u>	
	<u>Самостоятельная работа – 75 часов</u>
<u>ВСЕГО ЧАСОВ – 60</u>	

Программу и задание составила

д. ф.-м. н., профессор Е. Н. Аристова

Программа принята на заседании
кафедры вычислительной физики
24 ноября 2020 года.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н, профессор, чл.-корр. РАН

И. Б. Петров

1. *Решение разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
2. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге–Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад и методы Адамса). *Исследование схем на А-устойчивость, Lp-устойчивость и монотонность.
3. Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Метод дополненного вектора. *Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.
4. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Основная теорема вычислительной математики. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Спектральный признак устойчивости, элементы теории Самарского об исследовании устойчивости двухслойных схем на основе энергетических неравенств, условие Куранта–Фридрихса–Леви. *Принцип максимума, принцип замороженных коэффициентов. *Канонический вид двухслойных схем.
5. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем. *Метод прямых. *Бикompактная схема Рогова. *Первое дифференциальное приближение. *Диссипативная и дисперсионная ошибки разностной схемы.
6. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. *Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.
7. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение.

Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

8. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.
9. *Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Литература

Основная

1. *Рябенкий В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с; 3-е изд. – Москва : Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. /под редакцией А.И. Лобанова. – 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с., Долгопрудный: Интеллект, 2008. 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Косарев В.И.* 12 лекций по вычислительной математике. 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 2000. – 224 с.
4. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. – Москва : Интернет–Университет информационных технологий, 2006. – 522 с.
5. *Аристова Е.Н., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. – Москва : МФТИ, 2015. – 310 с.

Дополнительная

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». – 2-е изд, исправленное и дополненное / *В. Д. Иванов, В. И. Косарев, А. И. Лобанов, И. Б. Петров, В. Б. Пирогов, В. С. Рябенкий, Т. К. Старожилова, А. Г. Торماسов, С. В. Утюжников, А. С. Холодов.* – Москва : Изд-во МЗ-пресс, 2003. – 196 с.
3. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – Москва : Наука, 1989.

Аудиторная контрольная работа — вторая декада марта

Задание 1 (срок сдачи — вторая неделя марта).

Задачи даны из пособия [5].

№п/п	Тема IX					
	Построение общего решения					
1	6.1	7.18	7.19	7.9	7.12-1	7.15-1
2	6.2	7.19	7.20	7.10	7.12-2	7.15-2
3	6.3	7.20	7.21	7.11	7.12-3	7.15-3
4	6.4	7.21	7.18	7.9	7.12-4	7.15-4
5	6.1	7.18	7.20	7.10	7.12-1	7.15-5
6	6.2	7.19	7.21	7.11	7.12-2	7.15-6
7	6.3	7.20	7.21	7.9	7.12-3	7.15-7
8	6.4	7.21	7.18	7.10	7.12-4	7.15-8
9	6.1	7.18	7.20	7.11	7.12-1	7.15-9
10	6.2	7.19	7.21	7.9	7.12-2	7.15-10
11	6.3	7.18	7.19	7.10	7.12-3	7.15-3
12	6.4	7.19	7.20	7.11	7.12-4	7.15-4
13	6.1	7.19	7.20	7.9	7.12-1	7.15-5
14	6.2	7.20	7.21	7.10	7.12-2	7.15-6
15	6.3	7.21	7.18	7.11	7.12-3	7.15-7
16	6.4	7.18	7.20	7.9	7.12-4	7.15-8
17	6.1	7.19	7.21	7.10	7.12-1	7.15-9
18	6.2	7.20	7.21	7.11	7.12-2	7.15-10
19	6.3	7.21	7.18	7.10	7.12-3	7.15-1
20	6.4	7.18	7.20	7.11	7.12-4	7.15-2

№п/п	Тема X								
	Жесткие системы ОДУ								
1	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.14	7.19	8.1
2	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.16	7.19	8.2
3	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.17	7.19	8.3
4	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.13	7.19	8.4
5	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.14	7.19	8.8
6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.16	7.19	8.9
7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.17	7.19	8.11

8	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.13	7.19	8.12
9	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.14	7.19	8.4
10	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.16	7.19	8.8
11	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.17	7.19	8.9
12	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.13	7.19	8.11
13	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.14	7.19	8.12
14	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.16	7.19	8.1
15	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.17	7.19	8.2
16	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.7	7.13	7.19	8.3
17	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.8	7.14	7.19	8.11
18	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.9	7.16	7.19	8.12
19	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.10	7.17	7.19	8.4
20	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.12	7.13	7.19	8.8

№	Тема XI											
	Числ. решение ОДУ: краевые задачи											
1	7.2	8.1	**	8.2а	8.3а*	8.4а	8.4б	8.5	8.10а	9.1а	9.3б	
2	7.2	8.1	**	8.2б	8.3б*	8.4б	8.4в	8.6	8.10б	9.1а	9.3а	
3	7.2	8.1	**	8.2в	8.3в*	8.4в	8.4г	8.5	8.10в	9.1б	9.3б	
4	7.2	8.1	**	8.2г	8.3а*	8.4г	8.4д	8.6	8.11а	9.1б	9.3а	
5	7.2	8.1	**	8.2а	8.3б*	8.4д	8.4е	8.5	8.11б	9.1а	9.3а	
6	7.2	8.1	**	8.2б	8.3в*	8.4а	8.4е	8.6	8.11в	9.1б	9.3б	
7	7.2	8.1	**	8.2в	8.3а*	8.4б	8.4г	8.5	8.10а	9.1б	9.3а	
8	7.2	8.1	**	8.2г	8.3б*	8.4в	8.4д	8.6	8.10б	9.1а	9.3б	
9	7.2	8.1	**	8.2а	8.3в*	8.4г	8.4е	8.5	8.10в	9.1б	9.3б	
10	7.2	8.1	**	8.2б	8.3а*	8.4а	8.4в	8.6	8.11а	9.1б	9.3а	
11	7.2	8.1	**	8.2в	8.3б*	8.4б	8.4д	8.5	8.11б	9.1а	9.3а	
12	7.2	8.1	**	8.2г	8.3в*	8.4в	8.4е	8.6	8.11в	9.1б	9.3б	
13	7.2	8.1	**	8.2а	8.3б*	8.4а	8.4г	8.5	8.10а	9.1б	9.3а	
14	7.2	8.1	**	8.2б	8.3в*	8.4б	8.4е	8.6	8.10б	9.1а	9.3б	
15	7.2	8.1	**	8.2в	8.3а*	8.4в	8.4д	8.5	8.10в	9.1а	9.3б	
16	7.2	8.1	**	8.2г	8.3б*	8.4а	8.4е	8.6	8.11а	9.1а	9.3а	
17	7.2	8.1	**	8.2а	8.3в*	8.4б	8.4д	8.5	8.11б	9.1б	9.3б	
18	7.2	8.1	**	8.2б	8.3а*	8.4в	8.4г	8.6	8.11в	9.1б	9.3а	
19	7.2	8.1	**	8.2в	8.3б*	8.4а	8.4б	8.5	8.10а	9.1а	9.3б	
20	7.2	8.1	**	8.2г	8.3в*	8.4д	8.4е	8.6	8.10б	9.1а	9.3а	

* В задаче XI.8.3 найти начальное приближение для наименьшего собственного значения и указать алгоритм его дальнейшего нахождения с заданной точностью.

** Для краевой задачи

$$-\Lambda_{xx}y_m = f_m, \quad y_0 = u(0) = a, \quad y_M = u(X) = b, \quad h = X / M$$

а) найти число обусловленности системы разностных уравнений;

б) определить, для какого вектора правых частей достигается минимальное значение величины $\nu(\mathbf{f})$ в оценке погрешности решения в

зависимости от погрешности правой части $\frac{\|\Delta \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \nu(\mathbf{f}) \frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|}$. Результат

нарисовать как зависимость f_m от m для всех значений m ;

в) определить, для какого вектора правых частей достигается максимальное значение $\nu(\mathbf{f})$. Результат нарисовать как зависимость f_m от m .

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.

Потоковая контрольная работа — первая декада мая

Задание 2 (срок сдачи – последняя декада апреля). Задачи даны из пособия [5].

№п/п	Тема XII							
	Общая теория сходимости для ур.ч.п.							
1	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.25	7.28а
2	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.26	7.28б
3	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.27	7.28в
4	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.25	7.28г
5	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.26	7.28д
6	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.27	7.28е
7	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.25	7.28ж
8	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.26	7.28з
9	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.27	7.28и
10	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.25	7.28к
11	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.26	7.28в

12	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.27	7.28г
13	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.25	7.28д
14	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.26	7.28е
15	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.27	7.28ж
16	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.19	7.25	7.28з
17	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.20	7.26	7.28и
18	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.21	7.27	7.28к
19	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.22	7.25	7.28а
20	7.1	7.2	7.3	7.4	7.8	7.23	7.26	7.28б

№п/п	Тема XIII										
	Числ. методы для ур.ч.п. параболического типа										
1	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1а	
2	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.1б	
3	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.1в	
4	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.2а,б	
5	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2в	
6	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.2д	
7	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.3а,б	
8	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.3в	
9	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.3д	
10	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.7а	
11	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.7б	
12	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1а	
13	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.15	10.1б	
14	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.13	10.1в	
15	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2а,б	
16	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.2в	
17	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.14	10.2д	
18	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.15	10.3а,б	
19	7.3	8.3	9.3	9.1	9.2	9.7	9.8	9.9	9.13	10.3в	
20	7.3	8.3	9.3	9.1	9.4	9.7	9.8	9.9	9.14	10.1а	

№п/п	Тема XIV								
	Числ. методы для ур.ч.п. гиперболического типа								
1	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.3*	9.13а	9.11а	9.25	10.1
2	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.4*	9.14а	9.11б	9.27	10.2
3	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.6*	9.13б	9.11в	9.35	10.3
4	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.5*	9.14б	9.11г	9.25	10.4а
5	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.3*	9.13в	9.11д	9.27	10.4б
6	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.4*	9.14б	9.11а	9.35	10.4в
7	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.6*	9.13а	9.11б	9.25	10.4г
8	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.5*	9.14а	9.11в	9.27	10.4д
9	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.3*	9.13б	9.11г	9.35	10.4е
10	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.4*	9.14б	9.11д	9.25	10.1
11	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.6*	9.13в	9.11а	9.27	10.2
12	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.5*	9.14а	9.11б	9.35	10.3
13	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.3*	9.13а	9.11в	9.25	10.4а
14	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.4*	9.14а	9.11г	9.27	10.4б
15	7.3	8.5	9.1	9.2д,е	9.6*	9.13б	9.11д	9.35	10.4в
16	7.3	8.5	9.1	9.2в,е	9.5*	9.14б	9.11а	9.25	10.4г
17	7.3	8.5	9.1	9.2г,ж	9.3*	9.13в	9.11б	9.27	10.4д
18	7.3	8.5	9.1	9.2а,д	9.4*	9.14а	9.11в	9.35	10.4е
19	7.3	8.5	9.1	9.2в,г	9.6*	9.13б	9.11г	9.25	10.2
20	7.3	8.5	9.1	9.2г,д	9.5*	9.14б	9.11д	9.27	10.3

*Задачи 9.3, 9.4, 9.5 и 9.6. см. стр. 205.

№п/п	Тема XV				
	Числ. методы для ур.ч.п. эллиптического типа				
1	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
2	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
3	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
4	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
5	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
6	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и

7	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
8	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
9	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
10	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
11	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
12	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
13	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
14	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
15	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з
16	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1б,и
17	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1а,к
18	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1г,з
19	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1д,е
20	5.1	7.1	7.14	7.15	8.1ж,з

Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Уравнение переноса.
2. Уравнение теплопроводности.

Для получения отличной отметки за курс необходимо выполнить курсовую работу – самостоятельную реализацию разностной схемы для нелинейного уравнения в частных производных или системы нелинейных уравнений в частных производных (по согласованию с преподавателем).

БРС:

Темы:	7х5	=	35
АКР			20
РНО			5
ПКР			20
Летучки	5х3	=	15
Курсовая работа			20
Итого:			115

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая механика

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ЛФИ

кафедра: теоретической физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.

лекции – 45 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 45 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90 Самостоятельная работа
– 60 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф.
Э. Т. Ахмедов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА II

1. **Интеграл по траекториям и оператор эволюции.** Вывод представления оператора эволюции в виде фейнмановского интеграла по траекториям, квантовый принцип Гюйгенса — суперпозиция вкладов всех траекторий, классический предел, поворот Вика, континуальный интеграл при наличии источника, роль решения свободных классических уравнений движения при заданных граничных условиях, квазиклассическое приближение в терминах функционального интеграла, ангармоничный осциллятор, инстантоны в квантовой механике.
2. **Уравнение Дирака.** Релятивистское уравнение Клейна–Гордона для частицы без спина, уравнение Дирака, гамма-матрицы и их алгебра, киральные проекторы, дираковски сопряженный спинор, зарядовое сопряжение биспинора, дираковский спинор с массой, базисные спиноры, античастицы, квантование, проекторы на состояния с заданным значением спина, представление Дирака для гамма-матриц, уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле.
3. **Группа Лоренца.** Генераторы вращений, их коммутатор, спин в релятивистском случае, полный момент количества движения, генераторы бустов и полная алгебра группы Лоренца, собственные ортохронные преобразования, дискретные операции инверсии пространства и времени, классификация преобразований полной группы Лоренца, релятивистские спиноры.
4. **Группа Пуанкаре и вторичное квантование.** Трансляции и неоднородная группа Лоренца, коммутаторы генераторов, вектор Паули–Любанского, классификация Вигнера для массивных и безмассовых полей, спиральность, положительно- и отрицательно-частотные решения.
5. **Сложение моментов.** Тензорное произведение векторных величин в классической физике и наглядное представление о разложении произведения в сумму по неприводимым тензорам, постановка задачи о сложении моментов в квантовой механике, базис состояний и квантовые числа суммарного момента, допустимые значения проекции и модуля суммы моментов, коэффициенты Клебша–Гордана, число состояний.
6. **Нерелятивистское приближение: эффективная теория.** Операторное уравнение для двухкомпонентного спинора во

внешнем поле в одночастичном приближении, разложение операторов в ряд по малому отношению v/c , ведущий вклад в нерелятивистское приближение, спиноры Паули, магнитный момент электрона и фактор Ланде $g = 2$, природа кинетической поправки, спин-орбитального взаимодействия и дарвиновского члена, релятивистские поправки как возмущение в атоме водорода, квантовые числа электрона и формула для поправки к энергии, снятие вырождения по полному моменту и остаточное вырождение по орбитальному моменту.

7. **Теория возмущений.** Стационарная задача: ряд по малой константе связи возмущения, рекуррентные формулы для поправок к энергии и к состояниям, критерий применимости теории возмущений, вырожденный случай и правильные волновые функции ведущего приближения, секулярное уравнение.

Задача теории возмущений в нестационарном случае, представление взаимодействия, ведущее приближение, постоянное возмущение и соотношение неопределенностей время–энергия, периодическое возмущение, индуцированное излучение и поглощение, “золотое правило Ферми” для плотности вероятности перехода в непрерывный спектр, мгновенное включение возмущения и “замороженное состояние”, критерий мгновенности, адиабатическое изменение со временем параметров гамильтониана, адиабатическое приближение для исходного состояния, критерий адиабатичности, фаза Берри для циклического изменения параметров гамильтониана и калибровочное поле.

8. **Атом гелия.** Потенциал в атоме гелия и сохранение суммарного орбитального момента, статистика Ферми для электронов с учетом спина: орто- и парагелий, потенциал ведущего приближения, обменное взаимодействие и отталкивание электронов, теорема об отрицательной разности энергии связи триплета и синглета, приближение факторизации и уравнения Хартри, обобщение с учетом обменного члена – метод Хартри–Фока, самосогласованное поле – сферически симметричный потенциал ядра и его экранировка электронами, сведение задачи к одноэлектронной: конфигурация электронов, диагональность поправки по полному орбитальному моменту и обменный вклад: термы, величина релятивистских поправок и электронные J -термы.

9. **Феноменология: атом во внешнем поле.** Взаимодействие атома с постоянным магнитным полем, магнитный момент элек-

тронов, наведенный диамагнитный вклад, масштаб сильного и слабого магнитных полей, расщепление терма с $J \neq 0$ в слабом поле — аномальный эффект Зеемана, фактор Ланде для терма, снятие вырождения, диамагнетизм атомов с заполненными оболочками, явление парамагнетизма Ван-Флека для терма с $J = 0$, расщепление терма в сильном магнитном поле — эффект Пашена–Бака, остаточное вырождение.

10. **Рассеяние.** Асимптотические состояния в задаче рассеяния, S -матрица и определение дифференциального сечения рассеяния, предельное значение оператора эволюции на больших временах и функция Грина стационарного уравнения Шрёдингера, контур интегрирования, запаздывающая функция Грина, разложение функции Грина по базису стационарных состояний, функция Грина свободной частицы, интегральные уравнения для функции Грина стационарного уравнения Шрёдингера, запаздывающей функции Грина и волновой функции в задаче рассеяния, волновая функция как решение стационарной задачи с источником, асимптотическое поведение на больших расстояниях, падающий и рассеянный потоки вероятности, амплитуда рассеяния $f(\theta)$ и формула для дифференциального сечения, тождество унитарности для матрицы рассеяния и оптическая теорема, амплитуда рассеяния в борновском приближении и условие его применимости для медленных и быстрых частиц.
11. **Фазовая теория рассеяния.** Движение частицы в сферических координатах в области с нулевым потенциалом, рекуррентные соотношения для радиальных волновых функций с различными l , асимптотическое поведение при $r \rightarrow \infty$, сферические волны свободной частицы, сохранение потока вероятности на бесконечности при упругом рассеянии и фазовые сдвиги, разложение волны де Бройля по парциальным волнам, парциальные амплитуды рассеяния и их связь с фазовыми сдвигами, парциальные сечения и оптическая теорема, интегральное представление для парциальных амплитуд, борновское приближение для сдвига фаз, зависимость фаз рассеяния от энергии, постоянное сечение для медленных частиц, длина рассеяния, вклад парциальных волн для быстрых частиц, свойства симметрии по перестановкам для тождественных частиц с четным и нечетным спином при потенциальном рассеянии и выражение для сечения, роль обменных сил.
12. **Калибровочное векторное поле.** Векторное поле и урав-

нения Максвелла, циркулярная поляризация, продольное поле, преобразования Лоренца и калибровочная инвариантность, действие для поперечных мод, квантованное поле, тензор напряженности как коммутатор ковариантных производных, расщепление уровней по орбитальному моменту, спектр уровней из уравнения Дирака, квантовые числа состояний, важность P -четности, расщепление уровней по полному моменту.

13. **Спонтанное излучение.** Квантовые переходы между уровнями атома в электрическом дипольном приближении, вид возмущения, матричный элемент перехода в нестационарной теории возмущений, усреднение по поляризациям начального состояния атома, сумма по поляризациям фотона, угловое распределение спонтанного излучения в дипольном приближении, интенсивность излучения, характерные частоты, ширины и времена жизни, правила отбора по полному моменту, спину, орбитальному моменту и четности в общем случае, серии Лаймана и Бальмера в атоме водорода, интенсивность вынужденного излучения и ее пропорциональность числу квантов поля.
14. **Матрица плотности.** Смешанные и чистые состояния, определение матрицы плотности, квантовое среднее и усреднение по ансамблю, свойства матрицы плотности, эволюция по времени, запутанные состояния, неравенства Белла.

Литература

Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – Москва : Наука, 1989.
2. Мессиа А. Квантовая механика. – Москва : Наука. Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
3. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.
4. Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И. Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2012.
5. Елютин П.В., Кривченко В.Д. Квантовая механика. — Москва : Наука, 1976.
6. Белоусов Ю.М. Курс квантовой механики. — Москва : МФТИ, 2006.
7. Киселев В.В. Квантовая механика. — Москва : МЦНМО, 2009.

8. *Зелевинский В.Г.* Лекции по квантовой механике. — Новосибирск : Сибирское университетское издательство, 2002.

Дополнительная

9. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
10. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1973.
11. *Шифф Л.* Квантовая механика. — Москва : ИЛ, 1967.
12. *Дирак П.А.* Принципы квантовой механики. — Москва : Наука, 1979.
13. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. I. — Москва : Мир, 1974.
14. *Аллилуев С.П., Белоусов Ю.М.* Введение в теорию симметрии и ее применения в физике: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2007.
15. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2005.
16. *Барабанов А.Л.* Лекции по квантовой механике: учебное пособие в 2-х частях. — Москва : МФТИ, 2005.
<http://theorphys.mipt.ru/biblio/qm-barabanov.html>.
17. *Ирошников Г.С.* Континуальный интеграл и когерентные состояния в квантовой механике и теории поля : учебное пособие. — Москва : МФТИ, 1997.
18. *Тернов А.И.* Основы релятивистской квантовой механики: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2002.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КУРСА

Интеграл по траекториям

Амплитуда квантового перехода при наличии источника:

$$Z(j) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t', q'}^{t'', q''} dt \left[\frac{m \dot{q}^2(t)}{2} - V(q(t)) + j(t) q(t) \right] \right\}.$$

Сложение моментов

Сумма $\mathbf{J} = \mathbf{j}^A + \mathbf{j}^B$, допустимые значения:

$$J = j^A + j^B, j^A + j^B - 1, \dots, |j^A - j^B|, \quad -j^A - j^B \leq M \leq j^A + j^B,$$

с шагом $\Delta M = 1$.

Состояния:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_A, m_B} |j^A, m_A\rangle |j^B, m_B\rangle C_{j^A, m_A; j^B, m_B}^{JM}.$$

Коэффициенты Клебша–Гордона:

$$C_{j^A, m_A; j^B, m_B}^{JM} = \langle j^A, m_A; j^B, m_B | J, M \rangle, \quad C_{j^A, j^A; j^B, J-j^A}^{JJ} > 0.$$

Число состояний: $(2j^A + 1)(2j^B + 1)$.

Неприводимый тензорный оператор в стандартном представлении, закон преобразования:

$$\hat{R} \hat{T}_m^{(j)} \hat{R}^\dagger = \mathcal{R}_{mm'}^{(j)} \hat{T}_{m'}^{(j)},$$

где $\mathcal{R}$ — матрица вращения состояний с моментом j ;
коммутиационные соотношения:

$$[j_3, \hat{T}_m^{(j)}] = m \hat{T}_m^{(j)},$$

$$[j_\pm, \hat{T}_m^{(j)}] = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \hat{T}_{m \pm 1}^{(j)}.$$

Теорема Вигнера–Эккарта:

$$\langle J, M | T_m^{(j)} | J', M' \rangle = \frac{\langle J || T^{(j)} || J' \rangle}{\sqrt{2J+1}} \langle J, M | J', M'; j, m \rangle,$$

где $\langle J || T^{(j)} || J' \rangle$ — приведенный матричный элемент оператора, который зависит только от J и J' .

Правила отбора:

$$|\Delta M| \leq j, \quad |\Delta J| \leq j, \quad j \leq J + J'.$$

Релятивистская квантовая механика: группа Лоренца

Спиновая матрица для векторной частицы:

$$(\mathbf{s}_\beta)_{\alpha\gamma} = -i\epsilon_{\beta\alpha\gamma}.$$

Оператора орбитального момента и тензора спина для векторной частицы:

$$L_{\mu\nu} = i\hbar\{x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\} = \{x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu\}, \quad p_\mu \equiv i\hbar\partial_\mu, \\ (S_{\mu\nu})^{\lambda\rho} = i\hbar\{\delta_\mu^\lambda\delta_\nu^\rho - \delta_\nu^\lambda\delta_\mu^\rho\}.$$

Преобразование векторного поля при бесконечно малых преобразованиях группы Лоренца $x'^\mu = x^\mu + \omega^{\mu\nu}x_\nu$ с параметрами $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$:

$$A'^\lambda(x) = \left\{ \hat{\mathbf{1}} - \frac{i}{2\hbar} \omega^{\mu\nu} (L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}) \right\}^\lambda_\rho A^\rho(x).$$

Полный набор коммутационных соотношений для генераторов вращений $\mathbf{j}^\alpha$ и бустов $\mathbf{K}^\beta$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{j}^\alpha, \mathbf{j}^\beta] &= +i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}^\gamma, \\ [\mathbf{j}^\alpha, \mathbf{K}^\beta] &= +i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{K}^\gamma, \\ [\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{K}^\beta] &= -i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}^\gamma. \end{aligned}$$

Собственная ортохронная группа Лоренца:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu, \quad \det \Lambda = 1, \quad \Lambda^0_0 \geq 1.$$

Генераторы:

$$\mathcal{J}^\pm = \frac{1}{2} (\mathbf{j} \pm i\mathbf{K}), \quad J_{\beta\gamma} = \hbar \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{j}_\alpha, \quad J_{0\alpha} = \hbar \mathbf{K}_\alpha.$$

Коммутаторы:

$$\begin{aligned} [\mathcal{J}^+_\alpha, \mathcal{J}^+_\beta] &= i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{J}^+_\gamma, \\ [\mathcal{J}^-_\alpha, \mathcal{J}^-_\beta] &= i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{J}^-_\gamma, \\ [\mathcal{J}^+_\alpha, \mathcal{J}^-_\beta] &= 0, \\ [(\mathcal{J}^+)^2, \mathcal{J}^+_\beta] &= 0, \quad [(\mathcal{J}^-)^2, \mathcal{J}^-_\beta] = 0. \end{aligned}$$

Матрицы:

$$\begin{aligned} (\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} &= (1, +\boldsymbol{\sigma}), \\ (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\alpha} &= (1, -\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned}$$

Релятивистская квантовая механика: группа Пуанкаре

Коммутационные соотношения 4-импульса $(p_0, \mathbf{p}^\alpha)$ с генераторами вращений $\mathbf{j}^\beta$ и бустов $\mathbf{K}^\gamma$:

$$\begin{aligned} [\mathbf{j}^\alpha, \mathbf{p}^\beta] &= i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{p}^\gamma, & [\mathbf{j}^\alpha, p_0] &= 0, \\ [\mathbf{K}^\alpha, \mathbf{p}^\beta] &= i \delta^{\alpha\beta} p_0, & [\mathbf{K}^\alpha, p_0] &= i p^\alpha. \end{aligned}$$

Псевдовектор Паули–Любанского:

$$W^\mu = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu\lambda\rho} p_\nu S_{\lambda\rho}.$$

Инварианты группы:

$$[\mathbf{j}^\alpha, p^2] = [\mathbf{K}^\alpha, p^2] = 0, \quad [\mathbf{j}^\alpha, W^2] = [\mathbf{K}^\alpha, W^2] = [p_\mu, W^2] = 0.$$

Массивные частицы: инварианты

$$p^2 = m^2 > 0, \quad W^2 = -m^2 \hbar^2 s(s+1);$$

квантовые числа $\{m, \mathbf{p}, s, s_z\}$.

Безмассовые частицы: инварианты $p^2 = 0, \quad W^2 = 0;$

квантовые числа — спиральность $\mathfrak{s}$ и импульс $\mathbf{p}$:

$$\frac{1}{\hbar} W^\mu = \mathfrak{s} p^\mu, \quad \mathfrak{s} = \pm \lambda_\pm.$$

Релятивистская квантовая механика

Уравнение Кляйна–Гордона–Фока:

$$(p^2 - m^2 c^2) \phi(x) = 0.$$

Уравнение Дирака:

$$(\hat{p}_\mu \gamma^\mu - mc) \psi(x) = 0.$$

$$\not{p} = p_\mu \gamma^\mu = p_0 \gamma_0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma}.$$

Матрицы Дирака $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu}$:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}.$$

Дираковски сопряженный спинор:

$$\bar{\psi} = {}^\dagger \gamma_0.$$

Билинейные величины:

$$\bar{\psi} \psi \quad \text{— скаляр,}$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad \text{— вектор,}$$

$$\frac{1}{2} \bar{\psi} \hat{\sigma}^{\mu\nu} \psi \quad \text{— антисимметричный тензор.}$$

$$\bar{\psi} \gamma_5 \psi \quad \text{— псевдоскаляр,}$$

$$\bar{\psi} \gamma_5 \gamma^\mu \psi \quad \text{— псевдовектор.}$$

Сумма по поляризациям массивного поля Дирака

$$\Pi(\mathbf{p}) = \sum_\lambda u_\lambda(\mathbf{p}) \bar{u}_\lambda(\mathbf{p}) = \not{p} + mc.$$

Безмассовое векторное поле со спиральностью λ :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = i\lambda \operatorname{rot} \mathcal{A}, \quad \operatorname{div} \mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{A}_0 \equiv 0.$$

$$\mathcal{E} = i\lambda \mathcal{H}, \quad F_{\mu\nu} = i\lambda \tilde{F}_{\mu\nu}.$$

Квантованное безмассовое вещественное векторное поле:

$$\hat{\mathcal{A}}_{\perp}^{\nu}(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2k_0 (2\pi)^3} \left\{ e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \epsilon_{\lambda}^{\nu}(\mathbf{k}) \mathbf{a}_{\lambda}(\mathbf{k}) + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \epsilon_{\lambda}^{\nu*}(\mathbf{k}) \mathbf{a}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) \right\},$$

где 4-векторы поляризации являются поперечными

$$\epsilon_{\nu} k^{\nu} = 0, \quad \epsilon_0 = 0.$$

Ковариантная производная:

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + i \frac{e}{\hbar c} \mathcal{A}_{\mu}, \quad \mathcal{A}_{\mu}^u = \mathcal{A}_{\mu} + \partial_{\mu} u.$$

«Релятивистский» атом водорода: спектр

Вырождение по орбитальному моменту:

$$l_{\pm} = j \pm \frac{1}{2}.$$

Энергия связи:

$$\mathcal{E}_{n,j} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{\nu^2}}} - mc^2, \quad \nu = 1 + n_r + l_{\pm} - \delta_j = n_{\pm} - \delta_j,$$

$$\delta_j = j + \frac{1}{2} - \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha_{\text{em}}^2}.$$

Ведущая поправка:

$$\mathcal{E}_{n,j} \approx -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha_{\text{em}}^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha_{\text{em}}^2}{n^2} \left(\frac{2n}{2j+1} - \frac{3}{4} \right) \right\}.$$

Нерелятивистское приближение: эффективная теория

Уравнение Паули для нерелятивистского спинора:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \hat{H}_{\text{NR}} \varphi, \quad \hat{H}_{\text{NR}} = \frac{\mathcal{P}^2}{2m} + e\phi - g \frac{e\hbar}{2mc} (\mathbf{s} \cdot \mathcal{H}).$$

Фактор Ланде:

$$g = 2.$$

Релятивистская поправка к кинетической энергии электрона:

$$\delta E_{\text{kin.}} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2}$$

Спин-орбитальная поправка во внешнем статическом центральном потенциале $\phi(r)$:

$$V_{sl} = (g - 1) \frac{e\hbar}{2m^2c^2} \frac{\phi'(r)}{r} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}).$$

Дарвиновский вклад:

$$\hat{H}_{\text{Darwin}} = \frac{e\hbar^2}{8m^2c^2} \Delta\phi.$$

Теория возмущений

Поправки к энергии в стационарной теории возмущений для невырожденного случая:

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \langle n^{(0)} | V | n^{(0)} \rangle = V_{nn}, \\ \epsilon_2 &= \langle n^{(0)} | V | n^{(1)} \rangle = \sum_{k \neq n} \frac{V_{nk} V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \end{aligned}$$

Критерий применимости:

$$\frac{|V_{kn}|}{\Delta E_{kn}^{(0)}} \ll 1.$$

Секулярное уравнение в теории возмущений для поправки к энергии в первом порядке:

$$\det(\hat{V} - \epsilon_1) = 0, \quad \hat{V}_{ba} = \langle n^{(0)} | b | V | n^{(0)} \rangle, \quad a \in (\overline{1, k}).$$

“Правильные” функции ведущего приближения:

$$|n\rangle = \sum_{a=1}^k C_a |n^{(0)}, a\rangle, \quad \sum_{a=1}^k \{V_{ba} - \epsilon_1 \delta_{ba}\} C_a = 0,$$

Представление взаимодействия:

$$\begin{aligned} |\mathbf{i}(t)\rangle_I &= U_0^\dagger(t, t') |\mathbf{i}(t)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} U_I(t, t') |\mathbf{i}\rangle, \\ U(t, t') &= U_0(t, t') U_I(t, t'), \quad U_0(t, t') = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0(t-t')}. \end{aligned}$$

Оператор эволюции:

$$i\hbar \frac{\partial U_I}{\partial t} = \lambda V_I U_I, \quad V_I = U_0^\dagger V U_0.$$

$$U_I(t, t') = \hat{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \lambda \int_{t'}^t V_I(t) dt \right\} \approx \hat{1} - \frac{i}{\hbar} \lambda \int_{t'}^t V_I(t) dt.$$

Амплитуда перехода:

$$A_{fi} = -\lambda \frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t V_{fi}(t) e^{i\omega_{fi}(t-t')} dt,$$

$$\omega_{fi} = \frac{1}{\hbar} (E_f^{(0)} - E_i^{(0)}), \quad \langle f | V(t) | i \rangle = V_{fi}(t).$$

“Золотое правило Ферми”:

$$dw_{fi} = \frac{1}{\hbar} |\bar{V}_{fi}|^2 2\pi \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)} + \hbar\omega) d\nu(E_f^{(0)}),$$

где $d\nu(E_f^{(0)})$ — дифференциальная плотность состояний с заданной энергией конечного состояния.

Критерий применимости:

$$w_{fi} = \frac{1}{\tau} \ll \omega_{fi}.$$

Адиабатическое приближение (при $E_n \neq E_m$, если $n \neq m$):

$$|\psi_n(t)\rangle = e^{-i T \varphi_n(s) + i \int_0^s da^\mu \mathcal{A}_\mu(\mathbf{a})} |\psi_n(\mathbf{a})\rangle,$$

где

$$t = T \cdot s, \quad s \in [0; 1], \quad T \rightarrow \infty, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}(s), \quad \{a_\mu\} = \mathbf{a}, \quad \mu = \{\overline{1, p}\},$$

$$\hat{H}(\mathbf{a}) |\psi_n(\mathbf{a})\rangle = E_n(\mathbf{a}) |\psi_n(\mathbf{a})\rangle, \quad \varphi_n(s) = \frac{1}{\hbar} \int_0^s E_n(s) ds,$$

и

$$\mathcal{A}_\mu(\mathbf{a}) = i \langle \psi_n(\mathbf{a}) | \partial_\mu^a | \psi_n(\mathbf{a}) \rangle.$$

Критерий применимости адиабатического приближения:

$$T \gg \frac{1}{\omega}, \quad \omega — \text{частота собственных колебаний в системе.}$$

Фаза Берри:

$$\Delta_c \gamma = \oint da^\mu \mathcal{A}_\mu(a).$$

Атом гелия

Гамильтониан для электронов в атоме гелия в нерелятивистском приближении:

$$\hat{H}_{\text{NR}} = \frac{\mathbf{p}_A^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_B^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r_A} - \frac{Ze^2}{r_B} + \frac{e^2}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}, \quad Z = 2.$$

Уравнения Хатри (в атомных единицах):

$$\begin{cases} E_A \psi_A = \left\{ -\frac{1}{2}\Delta_A - \frac{Z}{r_A} + \phi_B(\mathbf{r}_A) \right\} \psi_A, \\ E_B \psi_B = \left\{ -\frac{1}{2}\Delta_B - \frac{Z}{r_B} + \phi_A(\mathbf{r}_B) \right\} \psi_B, \end{cases}$$

где экранирующие ядро потенциалы

$$\phi_B(\mathbf{r}_A) = \int d^3\mathbf{r}_B \frac{\rho_B(\mathbf{r}_B)}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}, \quad \phi_A(\mathbf{r}_B) = \int d^3\mathbf{r}_A \frac{\rho_A(\mathbf{r}_A)}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|},$$

$$\rho_A(\mathbf{r}_A) = |\psi_A(\mathbf{r}_A)|^2, \quad \rho_B(\mathbf{r}_B) = |\psi_B(\mathbf{r}_B)|^2.$$

Определитель Слетера:

$$\Phi_{k_1, \dots, k_N}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{k_1}(x_1) & \cdots & \psi_{k_N}(x_1) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \psi_{k_1}(x_N) & \cdots & \psi_{k_N}(x_N) \end{pmatrix}, \quad x \equiv \{\mathbf{r}, m_s\}.$$

Конфигурация: эквивалентные электроны, оболочки в самосогласованном поле nl^k .

Термы с учетом поправок к самосогласованному полю: ^{2S+1}L , состояния $|nl^k, \dots; L, M; S; M_S\rangle$.

Термы с учетом релятивистских поправок: $^{2S+1}L_J$.

Правило интервалов Ланде:

$$\Delta\langle V_{ls} \rangle = E(^{2S+1}L_J) - E(^{2S+1}L_{J-1}) = A_{LS} J.$$

Атом во внешнем поле

Гамильтониан:

$$H = \sum_f \left\{ \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}_f - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_f) \right)^2 - (\boldsymbol{\mu}_f \cdot \boldsymbol{\mathcal{H}}) + e\mathcal{A}_0(\mathbf{r}_f) \right\} + V,$$

в магнитном поле: взаимодействие магнитного момента электронов (магнетон Бора $\mu_0 = e\hbar/2mc$)

$$V_{\text{mag.}} = \mu_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}),$$

диамагнитный член

$$V_d = \frac{e^2}{8mc^2} \sum_f (\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \mathbf{r}_f)^2 = \frac{e^2 \boldsymbol{\mathcal{H}}^2}{8mc^2} \sum_f r_f^2 \sin^2 \theta_f.$$

Аномальный эффект Зеемана:

$$\epsilon_1(M_J) = \hbar \Omega g_{\text{LSJ}} M_J, \quad \Omega = e\mathcal{H}/(2mc).$$

Фактор Ланде:

$$g_{\text{LSJ}} = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}.$$

Эффект Пашена–Бака:

$$\langle L, M'; S, M'_S | \mu_0 \mathcal{H} (L_z + 2S_z) | L, M; S, M_S \rangle = \hbar \Omega (M + 2M_S) \delta_{MM'} \delta_{M_S M'_S}.$$

Спонтанное излучение

Вероятность спонтанного излучения в единицу времени — дипольное приближение:

$$w_{\text{fi}} \equiv \frac{1}{\tau} = \frac{4}{3c^3} \omega_{\text{fi}}^4 |\tilde{\mathbf{d}}_{\text{fi}}|^2 \frac{1}{\hbar \omega_{\text{fi}}},$$

матричный элемент дипольного момента:

$$\mathbf{d}_{\text{fi}}^\alpha = \langle \text{f}_{\text{at}} | \mathbf{d}^\alpha | \text{i}_{\text{at}} \rangle.$$

Интенсивность излучения:

$$\mathcal{I}(\omega_{\text{fi}}) = \frac{4}{3c^3} \omega_{\text{fi}}^4 |\tilde{\mathbf{d}}_{\text{fi}}|^2.$$

Правила отбора: по полному моменту (и его проекции)

$$|\Delta M_J| \leq 1, \quad |\Delta J| \leq 1, \quad 1 \leq J + J',$$

по спине

$$\Delta S = 0, \quad \Delta M_S = 0,$$

по орбитальному моменту

$$|\Delta M| \leq 1, \quad |\Delta L| \leq 1, \quad 1 \leq L + L',$$

по четности

$$P_{\mathbf{f}} = -P_{\mathbf{i}}.$$

Индукцированное излучение и поглощение: вероятность и интенсивность

$$\frac{1}{\tau_{\text{ind.}}} = \langle N(\mathbf{k}_{\text{fi}}) \rangle \frac{4}{3c^3} \omega_{\text{fi}}^4 |\tilde{\mathbf{d}}_{\text{fi}}|^2 \frac{1}{\hbar \omega_{\text{fi}}}, \quad \mathcal{J}_{\text{ind.}}(\omega_{\text{fi}}) = \langle N(\mathbf{k}_{\text{fi}}) \rangle \frac{4}{3c^3} \omega_{\text{fi}}^4 |\tilde{\mathbf{d}}_{\text{fi}}|^2.$$

Рассеяние

Оператор функции Грина – резольвента:

$$G_E = \frac{1}{E - \hat{H} + i0}.$$

Уравнение для функции Грина стационарного уравнения Шрёдингера:

$$(E - \hat{H}_{\mathbf{r}}) \mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

Запаздывающая функция Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t'', \mathbf{r}; t', \mathbf{r}') &= -\frac{i}{\hbar} \langle \mathbf{r} | U(t'', t') | \mathbf{r}' \rangle \vartheta(t'' - t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} E (t'' - t')} \mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \end{aligned}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(x; x') - \hat{H} \mathcal{G}(x; x') = \delta^{(4)}(x - x'), \quad x = (t, \mathbf{r}).$$

Эволюция волновой функции:

$$(x) = i\hbar \int d^3 \mathbf{x}' \mathcal{G}(x; x') \psi(x').$$

Разложение по базису стационарных состояний:

$$\mathcal{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}')}{E - E_n + i0}.$$

Функция Грина свободной частицы

$$\mathcal{G}_E^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i k_E |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Интегральное уравнение Липпманна–Швингера:

$$\psi_{\mathbf{i}}^{(+)}(\mathbf{x}) = \psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{x}) + \int \mathcal{G}_E^{(0)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) V(\mathbf{x}_1) \psi_{\mathbf{i}}^{(+)}(\mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1.$$

Асимптотическое поведение при $r \rightarrow \infty$:

$$\psi_{\mathbf{i}}^{(+)}(\mathbf{r}) \simeq \psi_{\mathbf{i}}^{(0)}(\mathbf{r}) + \frac{e^{i k_{\mathbf{i}} r}}{r} f(\theta), \quad r \rightarrow \infty,$$

где

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{r}' e^{-i \mathbf{k}_E \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{i}}^{(+)}(\mathbf{r}').$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

Соотношение унитарности для $\mathcal{T}$ -матрицы:

$$\mathcal{T} \mathcal{T}^\dagger = -2\hbar \Im \mathcal{T}.$$

Оптическая теорема:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k_{\mathbf{i}}} \Im f(0).$$

Борновское приближение:

$$f(\theta) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\mathbf{k}_{\mathbf{f}} - \mathbf{k}_{\mathbf{i}}),$$

условие применимости: медленные частицы ($ka \ll 1$)

$$\frac{mV_0}{\hbar^2} a^2 \ll 1,$$

быстрые частицы ($ka \gg 1$)

$$\frac{mV_0}{\hbar^2} a^2 \frac{1}{ka} \ll 1.$$

Парциальные волны

Свободная частица:

$$R_{kl}^{(0)}(r) = c_l^{(0)} (-1)^l \frac{r^l}{k^l} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{1}{r} \left\{ -e^{-i kr} + e^{i kr} \right\},$$

асимптотически при $r \rightarrow \infty$:

$$R_{kl}^{(0)}(r) \simeq c_l^{(0)} \frac{2i}{r} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l \right).$$

в волне де Бройля:

$$c_l^{(0)} = i^l \frac{1}{2ik}.$$

В задаче рассеяния:

$$R_{kl}(r) = c_l^{(0)} (-1)^l \frac{r^l}{k^l} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^l \frac{1}{r} \left\{ -e^{-i kr} + S_l e^{i kr} \right\}.$$

Упругое рассеяние:

$$|S_l| \equiv 1, \quad S_l = e^{2i\delta_l}, \quad \delta_l \in [0, \pi].$$

Асимптотически при $r \rightarrow \infty$:

$$R_{kl}(r) \simeq c_l^{(0)} \frac{2i}{r} e^{i\delta_l} \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l \right).$$

Парциальные амплитуды:

$$f(\theta) = \sum_l f_l P_l(\cos \theta), \quad f_l = \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l.$$

Парциальные сечения:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Оптическая теорема при упругом рассеянии:

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k} \Im f_l.$$

Фазовые сдвиги (зависимость от кинематики):

$$\sin \delta_l \sim \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^2 \left(\frac{ak}{l} \right)^{2l+1} \quad \text{и} \quad \sin \delta_0 \sim \frac{2mV_0}{\hbar^2} a^3 k.$$

Медленные частицы ($ka \ll 1$): длина рассеяния

$$f_0 = \frac{1}{k} \sin \delta_0 e^{i\delta_0} \approx \frac{\delta_0}{k} = -a_0,$$

полное сечение

$$\sigma = 4\pi |f_0|^2 \Big|_{k \rightarrow 0} = 4\pi a_0^2.$$

Рассеяние тождественных частиц с суммарным спином S (потенциал не зависит от спина):

$$d\sigma = |f(\theta) + (-1)^S f(\pi - \theta)|^2 d\Omega,$$

Фазовый сдвиг и амплитуда вблизи резонанса:

$$\delta_l \approx \arctan \frac{\Gamma}{2(E_* - E)}, \quad \frac{k}{2l+1} f_l \approx \frac{\frac{\Gamma}{2}}{E_* - E - i\frac{\Gamma}{2}}.$$

Сечение Брейта–Вигнера:

$$\sigma_l = \frac{\pi(2l+1)}{k^2(E)} \frac{\Gamma^2}{(E_* - E)^2 + \Gamma^2/4}.$$

Неупругие столкновения $|S_l| < 1$:

упругое сечение

$$\sigma_{\text{el.}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2,$$

неупругое сечение

$$\sigma_{\text{inel.}} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) (1 - |S_l|^2).$$

ЗАДАНИЕ

Задачи

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

1. Вычислите интеграл по траекториям:

$$Z[\vec{J}(\cdot)] = \int_{\vec{z}(0)=\vec{y}, \vec{z}(t)=\vec{x}} D\vec{z}(\tau) e^{i \int_0^t d\tau \left[\frac{m \dot{\vec{z}}^2(\tau)}{2} + \vec{J}(\tau) \vec{z}(\tau) \right]}$$

2. Волновая функция гармонического осциллятора с массой m и частотой ω в начальный момент времени имеет вид:

$$\Psi(x, t=0) = C e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} (x-x_0)^2},$$

где C и x_0 — некоторые константы. Используя ядро оператора эволюции для осциллятора, найдите вид волновой функции в произвольный момент времени.

3.* Действие для частицы с зарядом e и массой m в постоянном магнитном поле B , направленном вдоль оси z , имеет вид:

$$S = \int_0^t d\tau \left[\frac{m \dot{\vec{X}}^2}{2} + \frac{eB}{2c} (x \dot{y} - y \dot{x}) \right],$$

где $\vec{X} = (x, y, z)$. Покажите, что:

а) минимальное действие с граничными условиями $\vec{X}(0) = \vec{X}_i$, $\vec{X}(t) = \vec{X}_f$ равно

$$S_{min} = \frac{m\omega}{2} \left\{ \frac{(\vec{X}_f - \vec{X}_i)^2}{t} + \frac{\omega}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega t}{2} \right) [(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2] + \right. \\ \left. + \omega (x_i y_f - x_f y_i) \right\},$$

где $\omega = eB/mc$;

б) Используя свойство ядра оператора эволюции, покажите, что оно равно:

$$K(t|\vec{X}_f, \vec{X}_i) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\omega t/2}{\sin(\omega t/2)} e^{\frac{i}{\hbar} S_{min}}.$$

4. Покажите, что для оператора эволюции,

$$\hat{U}(t_2, t_1) \equiv T e^{i \int_{t_1}^{t_2} dt \hat{V}_0(t)},$$

верно равенство

$$\hat{U}(t_2, t_1) \hat{U}(t_1, t_0) = \hat{U}(t_2, t_0).$$

5. Покажите, что оператор $\hat{J} = \hat{L} \otimes \hat{\mathbf{1}} + \hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\Sigma}$, где $\hat{L}$ оператор орбитального момента, а $\hat{\Sigma}$ — оператор спина, коммутируют с гамильтонианом Дирака.

6. Найдите среднее значение оператора спина $\hat{\Sigma}$ дираковской частицы, имеющей определенное значения импульса. При этом спиновое состояние частицы — произвольное. Считать для простоты, что импульс направлен вдоль оси z .

7. Найти собственные значения и собственные функции:

а) операторов $\mathbf{S}^2$ и S_z системы двух электронов, $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, и установить связь перестановочной симметрии спиновой функции со значением суммарного спина S ;

б) операторов $\mathbf{J}^2$ и J_z частицы со спином $\frac{1}{2}$ в случае, когда орбитальное квантовое число равно $L > 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$;

в) операторов $\mathbf{L}^2$ и L_z системы двух частиц с $L_1 = L_2 = 1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$, и определить связь между квантовыми числами суммарного момента и перестановочной симметрией координатной волновой функции.

8.^C Доказать, что квадрат псевдовектора Паули–Любанского имеет вид

$$W^2 = -\frac{1}{2} \{p^2 S^2 - 2 p_\nu p^\mu S_{\mu\lambda} S^{\nu\lambda}\}.$$

9.^C Исследуйте стационарные состояния бесспиновой частицы с зарядом e и массой m в постоянном и однородном магнитном поле $\mathcal{H}$. Найдите уровни энергии (уровни Ландау) и кратности их вырождения, считая, что движение частицы ограничено большим объемом V . Решите задачу в декартовых и в цилиндрических координатах.

10.* Найти энергетический спектр заряженной дираковской частицы в однородном магнитном поле.

11.* Найти дискретный спектр для уравнения Клейна–Гордона в потенциале Кулона.

12. Покажите, что в достаточно сильном электростатическом поле заряженная бесспиновая частица испытывает притяжение (в квантовомеханическом смысле) независимо от знака ее заряда e .

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

13.^C Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$\text{а) } \hat{V} = \alpha x, \quad \text{б) } \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

14.^C Используя второй порядок стационарной теории возмущений, определите, как зависит энергия взаимодействия от расстояния R между а) атомом и ионом, б) двумя атомами. Атомы находятся в состояниях с заданной P -четностью.

15.^C В результате β -распада ядра атома трития образуется ион ${}^3\text{He}^+$. Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: а) в основном состоянии; б) на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей?

16.^C Найдите смещение уровня энергии основного состояния атома водорода, обусловленное конечным размером ядра. Примите, что ядро представляет собой равномерно заряженный по объему шар радиуса r_0 .

17.^C Вычислите электрическую поляризуемость атома водорода в основном состоянии

18.^C Исследуйте расщепление в однородном электрическом поле уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом $n = 2$ (эффект Штарка). Как зависит энергия расщепления от величины поля? Найдите правильные волновые функции нулевого приближения.

19.^C Уровни энергии невозмущенной системы зависят от параметра λ и при некотором значении λ_0 два уровня энергии пересекаются: $E_1^{(0)}(\lambda_0) = E_2^{(0)}(\lambda_0)$. В начальный момент времени система находится на первом уровне в состоянии $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Определите вероятность найти систему в состоянии $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ в момент времени t , если на систему накладывается малое постоянное возмущение $\hat{V}$, причем $V_{11} = V_{22} = 0$, но $V_{12} = V_{21}^* \neq 0$.

20. Найти вероятность перехода частицы, находящейся в связанном состоянии δ -ямы ($U = -\delta(x) \hbar^2 \kappa / m$) в непрерывный спектр под влиянием внешнего поля вида

$$\hat{V}(x, t) = Fx \cos \omega t$$

в случае $\hbar \omega > \hbar^2 \kappa^2 / 2m$.

21.^C На мюон, покоящийся в сильном однородном магнитном поле $\mathbf{H} \parallel z$, падает слабое циркулярно поляризованное радиочастотное поле $\mathbf{h}(t) \perp \mathbf{H}$. Найдите зависимость от времени спиновой функции $|\chi(t)\rangle$ и поляризации мюона $\mathbf{P}(t) = \langle \chi(t) | \hat{\boldsymbol{\sigma}} | \chi(t) \rangle$ для $|\chi(0)\rangle = |+\rangle$.

22. Покоящийся мюон помещен в магнитное поле $\mathbf{H}(t)$, медленно прецессирующее вокруг оси z , составляя с ней постоянный угол θ . Найдите зависимость от времени спиновой функции $|\chi(t)\rangle$ и поляризации $\mathbf{P}(t)$ мюона, если в начальный момент времени его состояние $|\chi(0)\rangle$ определяется положительной проекцией спина на направление магнитного поля. Покажите, что $\mathbf{P}(t)$ следует за направлением магнитного поля. Покажите, что за один полный оборот вектора магнитного поля спиновая функция приобретает фазу, пропорциональную телесному углу, который охватывает вектор $\mathbf{H}(t)$ (фаза Берри)^C.

23.^C Найдите величину сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода. Вычислите длину волны излучения, испускаемого при переходе между расщепленными подуровнями.

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

24.^C Определите вероятность процесса, при котором ядро, связанное гармоническим потенциалом, останется в основном состоянии после испускания γ -кванта (эффект Мессбауэра).

25.^C Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний двух невзаимодействующих тождественных частиц в потенциальном ящике

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, \quad x > a, \end{cases}$$

если этими частицами являются: а) ферми-частицы со спинами $s = 1/2$; б) бозе-частицы со спинами $s = 0$; в) бозе-частицы со спинами $s = 1$. Чему равна в каждом из этих случаев энергия основного состояния N частиц?

26.^C Может ли распасться на две α -частицы нестабильное ядро ${}^8\text{Be}^*$, находящееся в состоянии с полным угловым моментом $J = 1$?

27. Пользуясь вариационным методом, найдите энергию основного состояния гелиеподобного атома с зарядом ядра Z в классе пробных функций вида

$$\text{а)}^C \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha(r_1+r_2)}, \quad \text{б)}^* \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha r_1 - \beta r_2} + e^{-\beta r_1 - \alpha r_2}.$$

Вычислите диамагнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии. Воспользовавшись полученными результатами, установите, существует ли стабильный ион водорода H^- . В случае б) при $Z = 2$ воспользуйтесь численной процедурой минимизации матричного элемента от гамильтониана по параметрам α и β .

28. Два нейтрона в системе центра инерции имеют полный момент импульса $J = 1$. Найти L и S .

29.^C Найдите в борновском приближении дифференциальные и полные сечения рассеяния частицы в полях:

$$\text{а)}^C V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\varkappa r}, \quad \text{б)} V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

В случае а) покажите, что в пределе $\varkappa \rightarrow 0$ дифференциальное сечение принимает вид резерфордского сечения рассеяния заряженной частицы на отталкивающем кулоновском центре. Запишите критерии применимости борновского приближения для рассматриваемых случаев.

30. Для модельного потенциала отталкивания

$$V(r) = \frac{\beta}{r^2}, \quad \beta > 0,$$

найти фазы рассеяния δ_l . В приближении $2m\beta/\hbar^2 \ll 1$ вычислить ряд для амплитуды рассеяния

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) \mathcal{P}_l(\cos \theta)$$

и сравнить замкнутое выражение с борновским приближением для амплитуды.

31.^C Найдите полное сечение рассеяния медленной частицы на сферически-симметричных прямоугольных потенциальных яме и барьере. В случае барьера исследуйте предельный случай непроницаемой сферы. В случае ямы определите, при каких соотношениях между глубиной U_0 и радиусом a ямы полное сечение намного превышает геометрическое значение πa^2 (резонансное рассеяние) и, наоборот, обращается в нуль (эффект Рамзауэра).

32.^C Найдите полное сечение рассеяния быстрых частиц ($ka \gg 1$) на а) непроницаемой сфере радиуса a , б) черном шаре радиуса a . [Обсудите характер зависимости от угла рассеяния θ дифференциальных сечений упругого рассеяния. В случае а) воспользуйтесь численной процедурой для установления зависимости величин $S_l = e^{2i\delta_l}$ и фаз рассеяния δ_l от орбитального момента l , если $ka = 10$.]*

33. Выразите дифференциальное сечение рассеяния: а) α -частиц на α -частицах, б) протонов на протонах, через амплитуду рассеяния двух точечных заряженных частиц друг на друге.

34.^C Найдите сечение фотоэффекта на атоме водорода под действием плоской монохроматической волны с частотой ω для случая $\hbar\omega \gg I$, где I – потенциал ионизации атома.

35.* Нейтрон находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0 \parallel z$. Определите время жизни состояния с проекцией спина на направление поля $m_s = +1/2$. Получите численное значение времени жизни для $H_0 = 1$ кГс.

36.* Доказать, что два фотона, находящихся в системе их центра инерции, не могут иметь полный момент импульса, равный единице.

Задачи со значком ^C рассматриваются на семинаре, знаком * помечены дополнительные задачи повышенной сложности.

Редакторы и корректоры: И.А. Волкова, О.П. Котова

Компьютерная верстка Н.Е. Кобзева

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 x 84 1/16. Усл. печ. л. 4,75. Тираж 150 экз. Заказ № 21.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9