Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

МФТИ

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа физики и исследований имени Ландау (ЛФИ)

для студентов 2 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа физики и исследований имени Ландау. – Москва: МФТИ, 2021. – 56 с.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет», 2021

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: оптика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 4 семестр

Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. К. М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. Л. М. Колдунов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.т.н., доц. В. А. Овчинкин
к.ф.-м.н., доц. Ю. Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. В. Максимычев

ОПТИКА

1. Геометрическая оптика. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Полное внутреннее отражение. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических аберрациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения.

Современные применения геометрической оптики в пределе коротких длин волн: рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением.

2. Волновая оптика. Волновое уравнение, монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны, показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет. Степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера.

Нерелятивистский эффект Доплера, поиск экзопланет.

3. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Показатель преломления плазмы. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Групповая скорость. Распространение волнового пакета в неоднородной среде. Различные диапазоны длин волн, их особенности. Метаматериалы.

4. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Просветление оптики. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность, функция временной когерентности, связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера–Хинчина) и с видностью. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределенностей.

5. Интерференция при использовании протяженных источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности, функция пространственной когерентности, связь с распределением интенсивности излучения по источнику (теорема Ван Циттерта–Цернике). Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

6. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля.

Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов, теорема Бабинэ. Дифракция на краю, спираль Корню.

7. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

8. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких пленках и многослойных структурах, зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

9. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённостей. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

10. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга–Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

11. Кристаллооптика. Дихроизм, поляроиды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векторов k, E, D, B, направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии. Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц, Рэлеевское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Наведенное двулучепреломление. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм. Оптическое выпрямление. Симметрия среды и генерация второй гармоники. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка.

Понятие о комбинационном рассеянии света и вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна.

14. Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. Т. IV. – Москва : Физматлит, 2018.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I, ч. III, гл. 6–11. – Москва : Физматгиз, 2001.
3. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016.
4. *Бутиков Е.И.* Оптика. – Москва : Высшая школа, 1986.
5. *Ахманов С.А*. *Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : Издательство МГУ, Наука, 2004.

Дополнительная

1. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959, 2007.
2. *Ландсберг Г.С*. Оптика. – Москва : Физматлит, 2003.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Мсква : Наука, 1973.
4. *Козел С.М., Листвин В.И., Локшин Г.Р.* Введение в когерентную оптику и голографию. – Москва : МФТИ, 2000.
5. *Кольер Р.* Оптическая голография. – Москва : Мир, 1973.
6. *Крымский К.М.* Аберрации центрированных оптических систем – теория и расчёт. — Москва : МФТИ, 2015.
7. *Петухов В.А.* Оптические волокна : учебно-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса
на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ сем	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	**I**	**II**
01.02–06.02	**1**	Принцип Ферма. Геометрическая оптика и элементы фотометрии. Оптические инструменты.	1.4 ⁰1 ⁰2	1.29 1.22 1.9 1.56	1.15 T1 T2 1.57
08.02–13.02	**2**	Законы отражения, формулы Френеля. Поляризация. Поток энергии и давление света.	⁰1 11.7 2.3	2.5+2.23 2.26 2.29 2.42	2.1 2.20 2.27 2.45
15.02–22.02	**3**	Дисперсия. Фазовая и групповая скорости.	10.2 10.5(2,3,5) ⁰1	10.8 10.43 *10.75* *10.77*	10.21 10.24 10.35 T3
01.03–06.03	**4**	Интерференция монохроматических волн.	3.3 ⁰1 ⁰2	3.5 3.10 3.18 T4	3.16 3.11 3.20 3.35
08.03–13.03	**5**	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	⁰1 4.2 5.3 ⁰2	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 5.13 5.23 5.30
15.03–20.03	**6**	Дифракция Френеля. Зонные пластинки.	⁰1 ⁰2 6.1	6.15 6.20 *6.59* 6.43	6.16 6.31 6.50 *6.64*
22.03–27.03	**7**	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов.	7.5 ⁰1 ⁰2	7.16 7.48 7.54 *7.83*	7.10 7.53 7.59 *7.33*
29.03–04.04	**8**	Спектральные приборы.	8.2 ⁰1 ⁰2	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 T5 T6

05.04–10.04	**9**	Контрольная работа (по группам)			
12.04–17.04	**10**	Сдача 1-го задания			
19.04–24.04	**11**	Дифракция на синусоидальных решётках. Элементы фурье-оптики.	**0**1 **0**2 **0**3	9.1 9.15 9.22 9.26	9.11 9.17 9.28 *9.79*
26.04–01.05	**12**	Голография.	**0**1 **0**2 **0**3	9.32 9.35 *9.45* *9.52*	9.33 9.36 9.40 *9.78*
27.04–02.05	**13**	Поляризация света. Элементы кристаллооптики.	11.17 11.1 11.12	11.9 11.16 11.54 11.28	11.13 11.60 11.80 *11.121*
03.05–08.05	**14**	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики.	01 02 03	*11.125* 11.89 *11.126* T8	11.88 11.90 *11.128* T7
10.05–15.05	**15**	Сдача 2-го задания.			
17.05–22.05	**16**	Зачёт.			

Примечание

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина (**4-е изд**., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2017». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

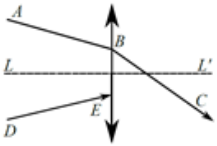
0 — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи группы 0

Семинар 1



^{0}1. На рис. показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC. Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.

^{0}2. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 2

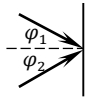
^{0}1. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n, через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0.

Семинар 3

^{0}1. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10$ МГц ($\lambda > 30$ м).

Семинар 4



^{0}1. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0{,}01$ рад. Длина волны $\lambda = 500$ нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рис.).

Ответ: 25 мкм.

^{0}2. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{\text{мин}}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

^{0}1. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник

света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей $\Delta_{\max}$ и максимальное число интерференционных полос $m_{\max}$, которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

^{0}**2.** Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n, если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

^{0}**1.** Щель ширины $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

^{0}**2.** На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ. Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

^{0}**1.** Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

^{0}**2.** Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ — длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0{,}05$.

Семинар 8

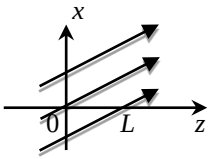
^{0}**1.** На дифракционную решетку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

Ответ: $\delta\varphi \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ рад.

^{0}**2.** Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11



[0]1. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости xz под углом α к оси z. Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости $z = 0$. Найти разность фаз между колебаниями в точках $z = 0$ и $z = L$, лежащих на оси z (см. рис.).

[0]2. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A. Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

[0]3. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b.

Семинар 12

[0]1. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

[0]2. Голограмму точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластинки, записали по схеме Габора на длине волны λ. Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ?

[0]3. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

[0]1. Пользуясь формулой Рэлея, оцените коэффициент пропускания света слоем воздуха толщиной 8 км в атмосфере вблизи поверхности Земли, для двух длин волн: $\lambda = 400$ нм (фиолетовый свет) и 650 нм (красный свет). Показатель преломления воздуха принять равным $n - 1 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $T_{400} \approx 0{,}7$, $T_{700} \approx 0{,}95$.

[0]2. Лазерный пучок проходит сквозь слабопоглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

[0]3. Молекулы некоторой жидкости имеют разную поляризуемость по разным осям. Как будут ориентироваться молекулы в поле световой волны: максимальной поляризуемостью по направлению $\vec{E}$ или перпендикулярно $\vec{E}$? Ответ обосновать.

Текстовые задачи

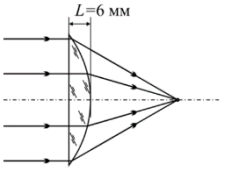
Т1. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для L_d = 0,5 м.

б) У некоторого дальнозоркого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» L_0 = 25 см. Провести расчет для L_b = 1 м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

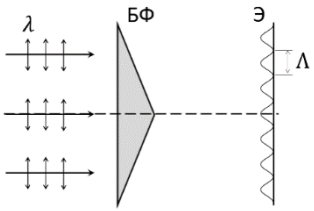
Т2. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера. гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т3. (2019) Параллельный пучок излучения длительностью 100 фс и средней длиной волны $\lambda = 500$ нм фокусируется положительной линзой толщиной $L = 6$ мм в центре и близкой к нулю на краях. Пучок заполняет всю линзу. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}7$, групповая скорость в стекле $v_{\text{гр}} = 0{,}55c$. Оценить длительность импульса в фокусе линзы.



Ответ: $\tau \simeq 2{,}4$ пс.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля БФ плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ. Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ. Определите видность V интерференционной картины.



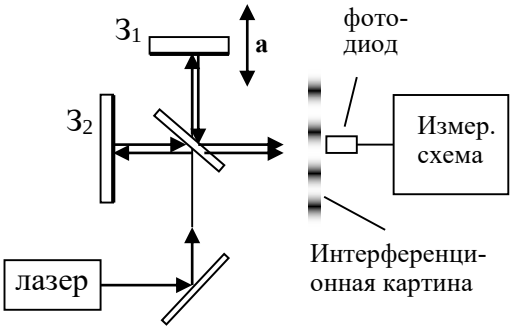
Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$.

Т5. Спектральная линия H_α атомарного водорода (λ = 6563 Å) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda \approx 0{,}16$ Å. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности ρ = 0,9, чтобы с его

помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

Ответ: $L = 0{,}4$ мм, $\Delta\lambda = 5$ Å, $\theta_1 = 2{,}3°$, $D = 4 \cdot 10^{-3}$ Å^{-1}.

Т6. Современные фотодиоды обеспечивают огромный диапазон линейности, до 11 порядков по интенсивности света, то есть в этом диапазоне фототок линейно зависит от интенсивности света, падающего на фотодиод. Это позволяет измерять очень малые интенсивности модулированных по амплитуде световых сигналов на фоне гораздо более мощной постоянной засветки.



Излучение хорошо стабилизированного непрерывного лазера с длиной волны 0,6 мкм пропускается через интерферометр Майкельсона, в котором одно из зеркал $З_1$ может колебаться с малой амплитудой **a**. Зеркало $З_2$ чуть-чуть наклонено, так что в плоскости фотоприемника получаются достаточно широкие (больше размера фотоприемника) интерференционные полосы. Смещение зеркала $З_1$ приводит к смещению интерференционных полос. Оцените минимальное значение $\mathbf{a}_{min}$ амплитуды колебаний, которое можно измерить данной схемой, если измерительное устройство позволяет обнаружить периодические колебания фототока, составляющие величину 10^{-10} от величины тока в максимуме интерференционной картины. В каком месте интерференционной картины (в максимуме, минимуме интенсивности или в другом месте) следует располагать фотодиод для получения максимальной чувствительности?

Ответ: $\mathbf{a}_{min} \approx 10^{-16}$ см.

Т7. Кристалл ниобата лития обладает сильной нелинейностью и довольно часто используется для генерации второй гармоники. Показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны этого кристалла сильно зависят от температуры. Для необыкновенной волны $\frac{dn_e}{dT} = 5{,}4 \cdot 10^{-6}\ (°C)^{-1}$, а для обыкновенной $\frac{dn_o}{dT} = 37{,}9 \cdot 10^{-6}\ (°C)^{-1}$. Оцените, насколько надо изменить температуру кристалла, чтобы интенсивность генерации второй гармоники стала равной нулю. Считайте, что до изменения

температуры было достигнуто условие фазового синхронизма, длина волны накачки равна $\lambda = 1$ мкм, а длина кристалла $l = 1$ см.

Ответ: $\delta T \approx 1.54^{\circ}\mathrm{C}$.

Т8. Найти пропускание атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного (λ = 700 нм) и фиолетового (λ = 400 нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака, ….), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен n_0 = 1,0003.

Ответ: для λ = 400 нм $I_{кон}/I_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$, для λ = 700 нм $I_{кон}/I_0$ = 0,27.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Приближение функций равномерно, в среднем и среднеквадратичном

1. Равномерное приближение непрерывной функции на отрезке кусочно-линейными функциями и приближение кусочно-линейных функций многочленами.
2. * Алгебры непрерывных на компактах функций, замкнутые относительно равномерной сходимости. Теорема Стоуна–Вейерштрасса.
3. Пространства L_p. Неравенства Гёльдера и Минковского. Полнота пространства L_p. Скалярное произведение в пространстве L_2.
4. Приближение функций в L_1 и L_2 ступенчатыми и бесконечно гладкими.

Ограниченная вариация, абсолютная непрерывность и осцилляция

5. Функции ограниченной вариации, представление функции ограниченной вариации в виде суммы монотонных и ограниченных.
6. Абсолютно непрерывные функции и обобщённая формула Ньютона–Лейбница. Обобщённое интегрирование по частям.
7. Теорема Римана об осцилляции и равномерной осцилляции.
8. Порядок убывания коэффициентов Фурье абсолютно непрерывных и несколько раз обобщённо дифференцируемых функций.
9. Порядок убывания коэффициентов Фурье функций ограниченной вариации.

Тригонометрический ряд Фурье и его сходимость

10. Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье, ядро Дирихле. Принцип локализации для рядов Фурье и равномерный принцип локализации.
11. Признак Липшица равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
12. Признак Дирихле равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье на отрезке.
13. Признаки Липшица, Дирихле и Дини сходимости тригонометрического ряда Фурье в точке.
14. Почленное дифференцирование и интегрирование тригонометрических рядов Фурье.
15. Теорема Фейера о суммировании тригонометрического ряда Фурье методом средних арифметических.
16. * Явный пример непрерывной 2π-периодической функции, ряд Фурье которой расходится в одной точке.

17. Представление котангенса и косеканса в виде бесконечной суммы элементарных дробей. Формула дополнения для бета-функции.

Ряд Фурье в пространстве L_2

18. Неравенство Бесселя и свойство минимальности коэффициентов Фурье по ортогональной системе функций в L_2.
19. Полные системы в пространстве L_2. Полнота тригонометрической системы в $L_2[-\pi, \pi]$.
20. Равенство Парсеваля для коэффициентов Фурье функций из $L_2[-\pi, \pi]$ по ортогональным системам.

Интеграл Фурье и преобразование Фурье

21. Вычисление интеграла Дирихле с помощью дифференцирования по параметру.
22. Представление функций интегралом Фурье, свёртка с ядром Дирихле для интеграла Фурье.
23. Признаки сходимости интеграла Фурье для абсолютно интегрируемой функции: признак Дини и признак Дирихле.
24. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
25. Пространство $\mathcal{S}$, его инвариантность при преобразовании Фурье и непрерывность преобразования Фурье $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
26. Унитарность преобразования Фурье относительно стандартного скалярного произведения в пространстве $\mathcal{S}$, продолжение преобразования Фурье на L_2.
27. Явление Гиббса для представления $\operatorname{sgn} x$ интегралом Фурье.
28. Преобразование Фурье функций нескольких переменных. Преобразование Фурье гауссовой плотности.
29. Достаточные условия для справедливости формулы обращения преобразования Фурье функции нескольких переменных.
30. Свёртка функций из L_1 и преобразование Фурье.

Банаховы пространства

31. Нормированные векторные пространства, банаховы пространства. Полнота пространства $C[a, b]$.
32. Теорема Бэра в банаховом пространстве.
33. Двойственное к банахову пространству, эквивалентность ограниченности и непрерывности линейного функционала.
34. Принцип равномерной ограниченности (теорема Банаха–Штейнгауза) для семейств непрерывных линейных функционалов в банаховых пространствах.

35. Расходимость рядов Фурье непрерывных 2π-периодических функций и норма свёртки с ядром Дирихле.
36. Непрерывные линейные отображения между банаховыми пространствами, их норма, эквивалентность ограниченности и непрерывности.
37. Факторпространство банахового пространства по замкнутому линейному подпространству.
38. Теорема об изоморфизме для непрерывных линейных отображений банаховых пространств.
39. ε-сети в метрических пространствах, эквивалентность предкомпактности и вполне ограниченности подмножества полного метрического пространства.
40. Теорема Арцела–Асколи о предкомпактных подмножествах в пространстве непрерывных на метрическом компакте функций.

Гильбертовы пространства

41. Евклидовы и гильбертовы пространства над действительными и комплексными числами. Неравенство Коши–Буняковского.
42. Полнота и замкнутость ортонормированной системы в гильбертовом пространстве, ряд Фурье по ней, неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
43. Метрическая проекция на замкнутое аффинное подпространство гильбертового пространства.
44. Описание двойственного к гильбертову пространству.

*** Лемма Цорна и двойственные пространства банаховых пространств**

45. * Теорема Цермело и лемма Цорна.
46. * Теорема Хана–Банаха. Вложение банахова пространства во второе двойственное.
47. * Теорема Тихонова о произведении компактов.
48. $*$-слабая топология двойственного к банахову пространству, компактность в $*$-слабой топологии.
49. * Теорема Рисса о двойственном пространстве к $C[a,b]$.

Распределения (обобщённые функции)

50. Пространство $\mathcal{E}$ и топология в нём, его полнота.
51. Связь непрерывности и ограниченности линейного отображения $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{E}'$ распределений с компактным носителем.
52. Описание элементов $\mathcal{E}'$ через интегрирование производных по отрезку.
53. Пространство $\mathcal{D}$ и определение сходимости в нём.

54. Пространство $\mathcal{D}'$ распределений (обобщённых функций). Регулярные и нерегулярные распределения, дельта-функция.
55. Топология и сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$, сходимость последовательности регулярных функций к дельта-функции.
56. Дифференцирование распределений, корректность его определения и непрерывность дифференцирования как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
57. Умножение распределения в $\mathcal{D}'$ на бесконечно гладкие функции, корректность его определения и непрерывность как операции $\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$.
58. Равенство нулю распределения на открытом множестве, носитель распределения из $\mathcal{D}'$.
59. Пространство $\mathcal{S}'$ обобщённых функций, преобразование Фурье обобщённых функций из $\mathcal{S}'$, преобразование Фурье дельта-функции.
60. * Распределения на многообразиях, бескоординатное определение, сужение распределения на открытое множество.

Литература

Основная

1. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf

Дополнительная

2. *Харди Г. Ч., Рогозинский В. В.* Ряды Фурье. — Москва : Физматгиз, 1959.
3. *Katznelson Y.* An Introduction to Harmonic Analysis. — Cambridge University Press, 2004.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Физматлит, 2006.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечание. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендуется разобрать на семинарских занятиях. Если задача с подчёркнутым номером была разобрана, то студент не обязан записывать её решение в домашнее задание.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–6 марта)

I. Неравенства, пространства L_p и вариация

1. Докажите, что если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклая, то для любого набора $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательных коэффициентов $t_1, \ldots, t_N$, в сумме дающих 1, выполняется

$$f(t_1 v_1 + \cdots + t_N v_N) \le t_1 f(v_1) + \cdots + t_N f(v_N).$$

2. Докажите, что для абсолютно интегрируемой $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ выполняется неравенство

$$\int_0^1 e^{f(x)}\, dx \ge e^{\int_0^1 f(x)\, dx}.$$

3. Докажите для измеримой $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, и положительных $s < t$ неравенство

$$\left(\int_0^1 f(x)^s\, dx\right)^{1/s} \le \left(\int_0^1 f(x)^t\, dx\right)^{1/t}.$$

4. Положительная функция на промежутке называется *логарифмически выпуклой*, если её логарифм выпуклый. Докажите, что сумма логарифмически выпуклых функций логарифмически выпукла.

5. Докажите, что $L_2[a,b] \subseteq L_1[a,b]$, но $L_2(\mathbb{R}) \not\subseteq L_1(\mathbb{R})$. Проверьте, что в первом случае вложение строгое.

6. Докажите, что если функция f лежит в $L_1(\mathbb{R})$ и в $L_4(\mathbb{R})$, то она лежит и в $L_2(\mathbb{R})$.

7. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|^2\, dx \to 0 \text{ при } t \to 0.$$

8. Имеет ли ограниченную вариацию на интервале $(0,1)$ функция:
а) $x \sin \frac{1}{x}$;
б) $x^2 \sin \frac{1}{x}$?

9*. Проведите пример непрерывной функции на отрезке, которая имеет ограниченную вариацию, но не является абсолютно непрерывной.

II. Порядок убывания коэффициентов Фурье

С.2. §22: 123(1, 2, 3, 4) — сделайте оптимальную оценку вида $O\left(\frac{1}{n^s}\right)$.

10*. Найдите порядок убывания коэффициентов Фурье функции

$$f(x) = \sqrt{|x|} \quad \text{на} \quad [-\pi, \pi].$$

III. Поточечная и равномерная сходимость рядов Фурье

С.2. §22: 1(5); 9; 12; 27; 30; 45(1). В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23; 58; 60(2); 65; 66; 67.

11. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x, x \in [0; \pi/2]$ по системам:
а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$; в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?
Постройте графики сумм этих рядов.

С.2. §22: 110; 111(3,4).

12. Докажите, что выражение

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

не является рядом Фурье никакой абсолютно интегрируемой функции.

IV. Равенство Парсеваля

С.2. §22: 116; 118.

13. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

V. Суммирование по Чезаро и суммы Фейера

С.2. §16: 47(2); 48(1, 2).

14. Докажите, что при суммировании ряда Фурье ограниченной на $[0, 2\pi]$ функции по Фейеру значения сумм в точке x не выходят за диапазон значений функции.

15*. Докажите, что для $f \in L_1[-\pi, \pi]$ суммы Фейера сходятся в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$ к функции f.

16*. Пусть последовательность $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ положительных чисел убывает, стремится к нулю и выпукла (в смысле $a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} \geq 0$ при $n \geq 1$). Докажите, что сумма

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

неотрицательна (в некоторых точках может быть $+\infty$).

17*. Пусть функция f непрерывная и 2π-периодическая, α — иррациональное число. Докажите, что предел

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_0 + 2\pi\alpha k)$$

не зависит от x_0.

$36 + 5^*$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 апреля)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 5(1); 4; 14(3); 17; 18(1).

1*. Определим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Докажите, что для любого натурального k и любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f^{(k)}(x)| \leq 1$.

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1, 2); 6(3, 4); 7(2, 4, 6).

2. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx, \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\, dx, \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2}\, dx.$$

3. Пусть функция f непрерывна на $[0,+\infty)$ и для любого $A>0$ сходится несобственный интеграл $\int\limits_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$. Докажите, что при любых $a,b>0$ справедлива формула Фруллани (для несобственного в нуле и бесконечности интеграла): $\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=f(0)\ln\frac{b}{a}$.

С.З. §15: 1(1,3,4); 2(1); 3(2); 4(3); 5(6); 6(3, 5); 15(4).

III. Интеграл Фурье и преобразование Фурье

С.З. §17: 1(4); 2(3); 6(2); 7(4); 8(2, 6); 14(1,3); 17(2).

4. Докажите, что функция вида $P(x)e^{-x^2/2}$, где $P(x)\in\mathbb{C}[x]$, при преобразовании Фурье переходит в функцию того же вида, причём степень многочлена не повышается.

5. Вычислите интегралы Лапласа с помощью обращения преобразования Фурье.

6. Докажите, что для любой функции $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ и любых двух чисел x_0, $y_0\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство (соотношение неопределённостей)

$$\|(x-x_0)f(x)\|_2\cdot\|(y-y_0)\hat{f}(y)\|_2\geq\frac{1}{2}\|f\|_2^2.$$

Выясните, в каком случае выполняется равенство.

7*. Найдите преобразование Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}x^{p-1}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0,\end{cases}$$

при $p>0$.

8. Пусть функция $f\in L_1(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на всей прямой. Докажите, что свёртка $\underbrace{f*\cdots*f}_{k+2}$ будет k раз непрерывно дифференцируема.

9. Найдите преобразование Фурье функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f=e^{-Q(x)}$, где $Q(x)$ — положительно определённая квадратичная форма.

$38+2^*$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Сходимость и полнота систем функций в пространствах C и L_p

1. Докажите, что если f — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):

$\{f_n\}$		$\{f_n\}$		$\{f_n\}$
Сходится равномерно к f	$\not\longleftarrow$ $\longrightarrow$	Сходится по норме L_2 к f	$\not\longleftarrow$ $\longrightarrow$	Сходится по норме L_1 к f
$\uparrow\downarrow$		$\uparrow\not\downarrow$		$\uparrow\not\downarrow$
$\{f_n\}$ сходится поточечно к f				

2. Приведите пример, когда последовательность функций (f_n) сходится в пространстве $L_1[a,b]$, но для любого $x \in [a,b]$ последовательность чисел $(f_n(x))$ расходится.

3. Докажите, что естественное отображение $C[a,b] \to L_1[a,b]$ не сюръективно, не забывая, что элементы L_1 — это не функции, а классы эквивалентности функций.

4. Какая из систем функций
$\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$
полна в пространстве $L_2[0,\pi/2]$?

5. Какая из систем функций
$\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$
полна в пространстве $C[0,\pi/2]$?

6. Приведите пример какой-нибудь счётной системы функций, полной в $L_2(\mathbb{R})$.

7*. Приведите пример ортогональной системы функций в пространстве непрерывных 2π-периодических функций с нормой $\|\cdot\|_2$, которая является замкнутой, но не является полной.

II. Банаховы пространства и их двойственные

8. Докажите, что в конечномерном банаховом пространстве все нормы эквивалентны, то есть одна оценивается через другую как

$$c\|\cdot\| \le \|\cdot\|' \le C\|\cdot\|$$

с некоторым положительными константами c, C.

9. Докажите, что пространство сходящихся последовательностей с нормой $\|(a_n)\| = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ является банаховым пространством.

10. Можно ли на пространстве $C[a,b]$ ввести скалярное произведение так, что его норма будет получаться из этого скалярного произведения?

11. Найдите норму функционала

$$f \mapsto \sum_{k=0}^{N} (-1)^k f\left(\frac{k}{N}\right)$$

на пространстве $C[0,1]$.

12. Пусть функция g непрерывна на $[a,b]$. Найдите норму линейного отображения

$$M_g : L_2[a,b] \to L_2[a,b], \quad M_g(f) = gf.$$

13. Пусть функция K непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$. Найдите норму линейного отображения

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \quad A(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)\,dy.$$

14. Докажите, что алгебраический базис бесконечномерного банахова пространства не может быть счётным.

15. Приведите пример плотного в $C[a,b]$ линейного пространства, которое имеет счётный базис.

16. Выведите из принципа равномерной ограниченности (теоремы Банаха–Штейнгауза) существование непрерывной 2π-периодической функции, ряд Фурье которой расходится хотя бы в одной точке.

17. Докажите, что в пространстве последовательностей ℓ_1, в котором в качестве нормы берётся норма от ℓ_2, не выполняется теорема Бэра и не выполняется принцип равномерной ограниченности.

18. Докажите, что в бесконечномерном банаховом пространстве E единичный шар не является компактным.

19*. Выведите из теоремы Хана–Банаха, что всякое конечномерное подпространство V в банаховом пространстве E имеет замкнутое дополнение $W \subseteq E$, такое что $E = V \oplus W$.

20. Приведите пример замкнутого в топологии нормы множества $X \subset E'$ (двойственное к некоторому банахову пространству) которое не замкнуто в его $*$-слабой топологии.

21. Докажите, что в $*$-слабой топологии E' компактность некоторого множества влечёт его замкнутость.

22*. Приведите пример топологического пространства, в котором есть компактные, но не замкнутые подмножества.

III. Распределения (обобщенные функции)

23. Найдите пределы последовательностей регулярных элементов пространства $\mathcal{D}'$:
а) $f_n(x) = \cos nx$; б) $f_n(x) = n \sin nx$.

24. Докажите, что в $\mathcal{D}'$ справедливы равенства:
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n^2x^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{x} = \pi\delta(x)$.

25. Найдите в $\mathcal{D}'$ предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 x}{(1+n^2x^2)^2}$.

26. Упростите в $\mathcal{D}'$ выражения:
а) $(e^{\sin x} + x\cos x)\delta(x)$; б) $\left(\dfrac{x \operatorname{ch} x}{1+x^4} - \sin x\right)\delta'(x)$.

27. Найдите в $\mathcal{D}'$ первые и вторые производные:
а) $(x + \cos x)\operatorname{sign} x$; б) $(x+1)e^{|x|}$.

28. Докажите, что слабая сходимость $\delta_{x_n} \to \delta_{x_0}$ эквивалентна обычной сходимости $x_n \to x_0$.

29*. Докажите, что всякое распределение $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ имеет первообразную, то есть такую $\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, что

$$\mu' = \lambda$$

в смысле дифференцирования распределений.

30. Докажите, что любые две первообразные одного и того же распределения отличаются на константу.

31*. Приведите пример распределения $\lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, которое не является m-й производной регулярного распределения ни для какого m.

IV. Преобразование Фурье распределений

32. Найдите преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ функции:

а) $\sin x$;

б) $\delta^{(n)}$ (n-я производная дельта-функции);

в) $\vartheta(x)$ (функция Хевисайда).

33*. Докажите, что если $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и преобразование Фурье $F[f] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, то $f \equiv 0$.

34*. Докажите, что преобразование Фурье в $\mathcal{S}'$ переводит распределение

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_{2\pi n} \quad \text{в распределение} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n.$$

$26 + 8^*$

Задания составили: д. ф.-м. н., профессор Р. Н. Карасёв
к. ф.-м. н., ассистент А. И. Тюленев

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).

2. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).

3. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).

4. **Задача Коши.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров

и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Особое решение.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.
   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка. Теорема Штурма и следствия из нее.
   Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных урав-нений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.

4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Задача Коши

С. §5: 26; 28а.
С. §6: 36; 49.
Ф.: 1065; 1066; 1067*.

1. Доказать, что при $\alpha > 0$ любое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Рассмотреть уравнение $y'^2 - (y+1)y' + y = 0$. Показать, что прямая $y = 1$ является дискриминантным множеством для этого уравнения, но не является решением. Показать, что через каждую точку прямой $y = 1$ проходят две интегральные кривые уравнения, имеющие общую касательную. Решить краевую задачу:
$y'^2 - (y+1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = e$. Изобразить график полученного решения.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 649; 664; 667; 668*; 673; 678.
Ф. §22: 47*; 59.
С. §9: 10; 31; 53; 64; 68(а).

3. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: 723; 725*; 726.
С. §10: 2; 3; 6.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - 2xy' + y = 0$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ имеет не более трех нулей.

5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \to +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 964; 972*; 973; 974; 975; 978*.
С. §13: 9; 15; 39; 44; 45.

35+7*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 12.

Ф.: 1149.

1. Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

С. §16: 5; 26.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 5; 16; 22; 79; 83.

2. В области $x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$ найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 21; 45; 72; 105.

3. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7\frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12\frac{y}{x}\right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

С. §20.1: 9; 12.

4. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 (2y + yy' + x(y'))\, dx, \quad y(1) = 1.$$

С. §20.2: 5.

С. §20.3: 2.

С. §21: 1.

5*. Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

23+1*

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор, А. М. Тер-Крикоров

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория поля**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов Экзамен – 4 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф.
В. В. Киселёв

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой Ю. М. Белоусов
д.ф.-м.н., профессор

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. **Динамика и векторный анализ.** Принцип наименьшего действия, уравнения Эйлера. Гамильтонова механика. Теорема Нётер. Преобразования Галилея, инерциальные системы. Евклидово пространство: однородность, изотропность, векторы, ковекторы, тензоры, изометрии евклидовой метрики, поднимание и опускание индексов, ориентированный объем и площадь, свойства тензора Леви-Чивиты, ковектор ∇, операции grad, div, rot, лапласиан.

2. **Уравнения Максвелла.** Суперпозиция электрического и магнитного полей, сила Лоренца. Закон Кулона, теорема Гаусса. Закон сохранения заряда, плотность тока. Закон Био–Савара. Индукция, теорема Стокса. Магнитные заряды. Ток смещения. Свободные волны электромагнитного поля, инвариантность скорости, принцип относительности, метрика Минковского. Изометрии пространства Минковского, лоренцев буст, поднимание и опускание индексов. Интервал, собственное время, растяжение времени, сжатие продольного размера. Сложение скоростей, аберрация света, эффект Доплера.

3. **Механика релятивистской частицы.** Действие свободной частицы из теоремы Нётер, парадокс близнецов. Энергия-импульс, 4-скорость. Столкновения, инварианты, пороговая энергия, распады.

4. **Взаимодействие релятивистской частицы с векторным полем.** Первая пара уравнений Максвелла и потенциалы $(A_0, \boldsymbol{A})$, калибровочные преобразования. Локальное взаимодействие частицы с 4-вектором A^μ, обобщенный 4-импульс, 4-мерная форма уравнений движения заряженной частицы в векторном поле. Тензор напряженности поля, дуальное преобразование. 4-мерная форма уравнений Максвелла. Инварианты поля. Тензоры и псевдотензоры. Преобразование электрического и магнитного полей при лоренцевых бустах. Движение в постоянных полях, дрейф.

5. **Динамика электромагнитного поля.** Действие для поля, гауссовы единицы, уравнения Эйлера–Лагранжа. Взаимодействие с током-источником. Формализм первого порядка. Уравнения движения: вторая пара. Представление волнового вектора. Свободные волны. Пропагатор фотона, запаздывающая функция Грина.

6. **Электростатика.** Точечный заряд. Поле системы зарядов: мультипольное разложение, монополь, диполь, квадруполь, октуполь. Аксиальная симметрия. Полиномы Лежандра. Энергия системы зарядов во внешнем поле.

7. **Квазипериодическое движение в магнитном поле.** Периодическое движение и адиабатический инвариант. Теорема Адемолло–Гатто. Магнитный момент. Калибровка Фока–Швингера. Магнитный момент во внешнем поле, прецессия. Заряженная частица в слабо неоднородном магнитном поле: движение вдоль силовой линии, магнитное зеркало, дрейф.

8. **Излучение.** Канонический тензор энергии–импульса из теоремы Нётер. Тензор энергии-импульса частиц, вклад взаимодействия. Компоненты электромагнитного тензора и баланс энергии и импульса поля и частиц. Дипольное излучение: электрическое и магнитное поля, квазистатическая и волновая зоны, интенсивность, критерии применимости. Сила радиационного трения. Естественное время затухания. Магнитное дипольное излучение.

9. **Синхротронное излучение.** Мощность и ее инвариантность. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Угловое распределение. Волновой пакет синхротронного излучения, длина когерентности, несущая частота.

10. **Рассеяние электромагнитных волн.** Задача рассеяния. Квазиупругий диполь: сечение Томсона, классический радиус электрона, релеевское рассеяние света. Тензор поляризации света. Усреднение на сфере и на окружности.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — Москва : Наука, 1973.

2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — Москва : Мир, 1965.

3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : ИД “Интеллект”, 2013.

Дополнительная литература

1. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. 2–е изд., испр. — Ижевск : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005.

2. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория : учеб.-мет. пособие. — Москва : МФТИ, 2001.

3. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2005.

Упражнения

Первое задание

1.^{C} В трёхмерном пространстве вычислить свертки:

$$\delta_{\alpha\alpha},\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma},\ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\beta\gamma}\delta_{\gamma\alpha};$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha'\beta'\gamma},\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha'\beta\gamma},\ e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma}.$$

2.^{C} Показать, что

$$[\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\cdot[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}] = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a},\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]\cdot[[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]] = (\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}])^2.$$

3.^{C} Найти средние значения произведений компонент единичного вектора $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$ на сфере:

$$\langle n_\alpha\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma\rangle,$$

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu\rangle,\ \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu\rangle.$$

4.^{C} (а) Раскрыть выражения: $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, $\operatorname{rot}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{A})$, $\operatorname{div}(f\boldsymbol{A})$, $\operatorname{div}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, где $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и f — функции координат $\boldsymbol{r}$.
(б) Вычислить: $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{r}]$, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{a}$ — постоянные векторы.
(в) Вычислить: $\operatorname{grad} r$, $\operatorname{div}\boldsymbol{r}$, $(\boldsymbol{a},\nabla)\boldsymbol{r}$, $\operatorname{grad} f(r)$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}(r)$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}(r)$, где $r = |\boldsymbol{r}|$.

5.^{C} Показать, что

$$\int\limits_V \nabla f\, d^3r = \oint\limits_S f\, d\boldsymbol{S}, \quad \int\limits_V \operatorname{rot} \boldsymbol{A}\, d^3r = -\oint\limits_S [\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{S}],$$

$$\int\limits_S [\nabla f, d\boldsymbol{S}] = -\oint\limits_\Gamma f\, d\boldsymbol{l}, \quad \oint\limits_S [\nabla, \boldsymbol{A}] \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

Задачи

Первое задание

1.^{C} Система K' движется со скоростью v_x вдоль оси x системы K. Система K'' движется со скоростью v'_y вдоль оси y' системы K'. Скорость v'_y такова, что начало координат системы K'' движется относительно системы K со скоростью $\boldsymbol{v} = (v_x\,, v_y)$. Показать, что направление вектора относительной скорости системы K в системе K'' будет повернуто относительно направления $-\boldsymbol{v}$ на угол θ такой, что

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \gamma \operatorname{tg} \varphi\,, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma - 1)\operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi}\,.$$

2.* На частицу, движущуюся со скоростью $\boldsymbol{v}$, действует сила, сообщающая ей ускорение $\dot{\boldsymbol{v}}$. Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на частицу, не действует на ее спин (прецессия Томаса). Указание: использовать результат задачи 2. Ответ:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)c^2}\, [\dot{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{v}].$$

3.^{C} Найти разность фаз двух волн, обходящих вращающийся с угловой скоростью Ω кольцевой интерферометр радиуса R по и против направления вращения (эффект Саньяка).

4. В ускорителе на встречных пучках идет реакция

$$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^- .$$

Зная энергии сталкивающихся частиц $e^{\pm}$, найти эффективную массу системы и энергии $\mu^{\pm}$. Каков энергетический порог этой реакции? Сравнить пороги в случаях: (а) электроны и позитроны имеют одинаковые энергии; (б) ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

5.^{C} Для получения γ-квантов высокой энергии навстречу пучку электронов с энергией $E = 200$ ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов $\varepsilon = 2$ эВ. Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад?

6.^{C} Для нейтрино, образующихся при распаде π–мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π–мезона ≈ 140 МэВ, масса μ–мезона ≈ 105 МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π–мезона распад $\pi \to \mu + \nu$ происходит изотропно.

7. Найти движение релятивистской частицы массы m и заряда e в перпендикулярных электрическом и магнитном полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Определить скорость дрейфа в нерелятивистском случае.

Второе задание

8.^{C} Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где e — заряд электрона, $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром: (а) считая ядро точечным зарядом; (б) считая ядро равномерно заряженным шаром радиуса $r_0 \sim 10^{-13}$ см.

9. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\boldsymbol{d}_1$ и $\boldsymbol{d}_2$.

10.^{C} Вычислить дипольный момент двух полусфер, разделенных бесконечно тонким изолятором, если их потенциалы равны $\pm\phi_0$ соответственно.

11. Потенциал $V(r,\theta)$ аксиально-симметричной системы зарядов на оси z ($\theta = 0$) имеет вид

$$V(r,0) = V_0 \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{r\sqrt{r^2 + a^2}}\right), \quad r > a\,.$$

Найти два ведущих члена разложения $V(r,\theta)$ в области $r \gg a$.

12.^{C} Частица с массой m и зарядом e движется в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим полем). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2.

13.^{C} На больших расстояниях от Земли её магнитное поле представляет собой поле диполя с магнитным моментом $\mathfrak{m} = 8.1 \cdot 10^{25}$ гаусс $\cdot$ см^3. (а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. (б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли. (в) Найти период дрейфа вокруг Земли протона с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

14. Мюон с импульсом $p = 1$ ГэВ/c и спином, направленным по импульсу, влетает в магнитное поле $H = 10^4$ Гс перпендикулярно его направлению. Определить, на какой угол отклонится спин мюона от его импульса за один оборот в магнитном поле, если гиромагнитное отношение для мюона равно $ge/2mc$, где $g = 2(1 + \alpha/2\pi)$ и $\alpha = 1/137$.

15.^{C} Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте L над идеально проводящей металлической плоскостью. Для случаев $L \ll \lambda$ и $L \gg \lambda$ найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.

16. Два разноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) обращаются один вокруг другого под действием кулоновского притяжения по круговой орбите радиуса R. Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой.

17. Два одноименных заряда (e_1, m_1) и (e_2, m_2) испытывают лобовое столкновение. Определить полную излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$. Рассмотреть дипольный $(e_1/m_1 \neq e_2/m_2)$ и квадрупольный $(e_1/m_1 = = e_2/m_2)$ случаи.

18. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце $5 \cdot 10^{12}$. Оценить характерную длину волны излучения.

19.^{C} Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор, к которому приложено переменное напряжение с частотой ω_0. Найти частоту излучения электронов в зависимости от угла θ между наблюдателем и направлением движения пучка.

20.^{C} Вычислить сечение рассеяния линейно поляризованной электромагнитной волны на идеально проводящем металлическом шарике радиуса $a \ll \lambda$.

21.* Найти угловое распределение синхротронного излучения для нерелятивистской частицы.

22.* Определить критическую светимость I для звезды с массой M, т.е. светимость, при которой её внешняя оболочка, состоящая из водорода, начинает расширяться под действием светового давления. Насколько светимость Солнца ($I_\odot \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек, $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{33}$ г) отличается от критической?

Задачи со значком ^{C} рассматриваются на семинаре, знаком * помечены дополнительные задачи повышенной сложности.

1-я контрольная работа – первая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 16.03 – 23.03.2021 года)

2-я контрольная работа – первая декада мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 12.05 – 18.05.2021 года)

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **физики и исследований им. Ландау**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов Экзамен – 4 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
д.ф.-м.н., профессор А. П. Маркеев
ассистент С. С. Ефимов
к.ф.-м.н., доцент И. Ю. Полехин
к.ф.-м.н., доцент А. В. Сахаров

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
30 ноября 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Малые колебания**

   1.1. Линеаризация уравнений движения консервативной системы в окрестности ее положения равновесия. Нормальные координаты и нормальные колебания.

   1.2. Колебания консервативной системы под действием внешних периодических сил. Резонанс в вынужденных колебаниях.

   1.3. Влияние внешних периодических сил на малые колебания склерономной системы.

2. **Введение в теорию нелинейных колебаний**

   2.1. Фазовая плоскость консервативной системы с одной степенью свободы. Равновесия, периодические движения, сепаратрисы.

   2.2. Классификация особых точек на плоскости. Понятие об автоколебаниях, предельные циклы.

   2.3. Понятие о методе нормальных форм.

   2.4. Элементы теории бифуркаций. Бифуркации «смена устойчивости» и «седло-узел», бифуркация «вилки». Бифуркация рождения цикла (бифуркация Андронова–Хопфа).

   2.5. Понятие о методе усреднения. Построение первого приближения по малому параметру для дифференциальных уравнений в стандартной форме.

3. **Уравнения Гамильтона. Уравнения Рауса. Скобки Пуассона**

   3.1. Обобщенные импульсы. Преобразование Лежандра. Теорема Донкина о преобразовании Лежандра. Канонические уравнения Гамильтона.

   3.2. Физический смысл функции Гамильтона. Уравнения Уиттекера для консервативных и обобщенно консервативных систем.

   3.3. Время и энергия как канонически сопряженные переменные.

   3.4. Уравнения Рауса. Понижение порядка системы дифференциальных уравнений движения при помощи уравнений Рауса в случае существования циклических координат. Приведенный потенциал.

   3.5. Скобки Лагранжа. Скобки Пуассона и их свойства. Скобки Пуассона и первые интегралы. Теорема Якоби–Пуассона.

4. **Канонические преобразования**

   4.1. Понятие канонического преобразования. Обобщенная симплектичность матрицы Якоби — необходимое и достаточное условие каноничности преобразования. Другие критерии каноничности преобразования (выражение их через скобки Лагранжа, через скобки Пуассона, посредством дифференциальной формы).

   4.2. Инвариантность скобок Пуассона при канонических преобразованиях. Канонические преобразования и процесс движения. Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма.

   4.3. Свободное каноническое преобразование и его производящая функция. Канонические преобразования с производящей функцией, зависящей от старых координат и новых импульсов.

5. **Метод Якоби интегрирования уравнений динамики**

   5.1. Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл. Теорема Якоби.

   5.2. Уравнение Гамильтона–Якоби для систем с циклическими координатами. Уравнение Гамильтона–Якоби для консервативных и обобщенно консервативных систем. Разделение переменных.

6. **Классическая теория возмущений. Адиабатические инварианты**

   6.1. Переменные действие–угол для системы с одной степенью свободы. Понятие о переменных действие–угол для систем с несколькими степенями свободы.

   6.2. Классическая теория возмущений. Нерезонансный и резонансный случаи в теории возмущений. Проблема малых знаменателей. Преобразование Биркгофа.

   6.3. Параметрический резонанс в линейной системе Гамильтона. Уравнение Матье.

   6.4. Понятие адиабатического инварианта. Теорема Арнольда о вечном сохранении адиабатического инварианта в периодической по времени гамильтоновой системе с одной степенью свободы.

7. **Интегральные инварианты**

   7.1. Понятие интегрального инварианта.

   7.2. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема, обратная теореме об универсальном интегральном инварианте Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна.

7.3. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана (основной интегральный инвариант механики). Теорема, обратная теореме об интегральном инварианте Пуанкаре–Картана.

8. **Элементы теории детерминированного хаоса**

   8.1. Регулярные и хаотические аттракторы. Эргодичность и перемешиваемость. Экспоненциальное разбегание траекторий и показатели Ляпунова.

   8.2. Метод поверхностей сечения Пуанкаре.

   8.3. Логистическое (квадратичное) отображение. Сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

   8.4. Универсальности Фейгенбаума. Понятие о фрактальной размерности аттрактора.

9. **Интегрируемые и неинтегрируемые системы Гамильтона. Теория КАМ**

   9.1. Понятие интегрируемости гамильтоновых систем. Теорема Лиувилля об интегрируемости. Представление движения на инвариантных торах.

   9.2. Невырожденность и изоэнергетическая невырожденность интегрируемых систем.

   9.3. Формулировка основной теоремы КАМ-теории (теории Колмогорова–Арнольда–Мозера).

   9.4. Механизм разрушения инвариантных торов.

Литература

Основная

1. *Айзерман М.А.* Классическая механика. — Москва : Наука, 2005.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

Дополнительная

5. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. — Москва : Физматлит, 1974.

6. *Голдстейн Г., Пул Ч., Сафко Дж.* Классическая механика. — Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2012.

7. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

8. *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. — Москва : Наука, 1988.

9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. — 5-е изд., стереотип. — Москва : Физматлит, 2012.

10. *Магницкий Н.А., Сидоров С.В.* Новые методы хаотической динамики. — Москва : УРСС, 2004.

11. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. — Москва : УРСС, 2001.

12. *Фомичев А.В.* Элементы теории бифуркаций и динамических систем. Части I и II. — Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЯ

Задачи, отмеченные *, необходимо решить для получения третьего семестрового балла.

Первое задание

(срок сдачи с 8 по 13 марта 2021 г.)

Контрольная работа с 1 по 6 марта 2021 г.

1. **Малые колебания консервативных систем**
   16.11, 16.33, 16.47, 16.64, 16.107*

2. **Диссипативные системы и вынужденные колебания**
   17.8, 17.11 (а), 17.20*, 17.28*, 18.17, 18.31*, 18.37, 18.62*

   Т1. В задаче 17.11 (а) определите расположение корней характеристического уравнения в комплексной плоскости для различных ветвей границы области асимптотической устойчивости на плоскости (α, β).

3. **Элементы теории бифуркаций в нелинейных системах**

Т2. Рассмотрите дифференциальное уравнение, зависящее от параметра a:

$$\dot{x} = (x - a)(x^2 - a).$$

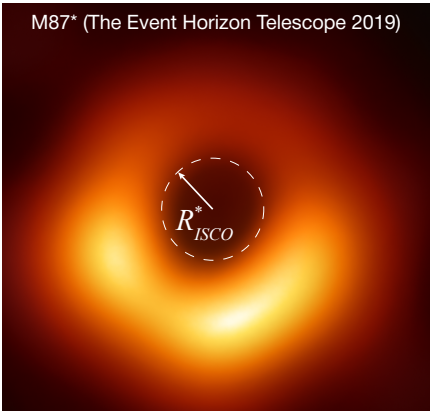
Найдите все возможные фазовые портреты, которые можно получить для этого уравнения, а также интервалы изменения параметра a, соответствующие каждому из портретов.

Т3. Движение находящегося под током провода, закрепленного на упругих пружинах и подверженного действию магнитного поля, описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + k\left(x - \frac{b}{a - x}\right) = 0,$$

где a, b и k — положительные постоянные. Постройте фазовый портрет в плоскости $(x, \dot{x})$. Рассмотрите все возможные случаи: $a^2 > 4b$, $a^2 = 4b$ и $a^2 < 4b$.

Т4*. Постройте бифуркационную диаграмму стационарных точек уравнения Бине для частицы в гравитационном поле чёрной дыры, используя в качестве параметра константу интеграла площадей. Определите диапазон радиусов, при которых круговые орбиты являются устойчивыми.



Т5. Для системы

$$\dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2),$$
$$\dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2)(\mu - 2x^2 - 2y^2)$$

рассмотрите различные типы фазовых портретов, которые получаются, когда параметр μ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Т6*. Покажите, что при $\mu = 0$ система, описываемая уравнениями

$$\dot{x}_1 = -x_2 + \mu x_1 - x_1 x_2^2,$$
$$\dot{x}_2 = \mu x_2 + x_1 - x_2^3,$$

испытывает бифуркацию Хопфа (возникает устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат).

4. **Метод усреднения и метод нормальных форм в теории нелинейных колебаний**

Т7*. Используя метод разделения на два масштаба времени, покажите, что в уравнении Матьё

$$\ddot{x} + (a + \varepsilon \cos t)x = 0,$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, имеет место параметрический резонанс: решение неограниченно растет во времени при

$$1 - \varepsilon^2/12 + O(\varepsilon^4) \leqslant a \leqslant 1 + 5\varepsilon^2/12 + O(\varepsilon^4).$$

Указание: в качестве "быстрого" и "медленного" времени возьмите $\tau = t$, $T = \varepsilon^2 t$; сделайте замену $a = 1 + c\varepsilon^2$, где c порядка $O(1)$.

Т8. Систему уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + c_{20} x_1^2 + c_{11} x_1 x_2 + c_{02} x_2^2,$$
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + d_{20} x_1^2 + d_{11} x_1 x_2 + d_{02} x_2^2$$

приведите к нормальной форме с точностью до членов второй степени. Величины λ_i, c_{ij}, d_{ij} – вещественные постоянные, причём $\lambda_2 = 2\lambda_1$.

Т9. При помощи метода нормальных форм найдите приближенную зависимость частоты ω нелинейных колебаний маятника, описываемых уравнением $\ddot{x} + \sin x = 0$, от амплитуды a.

Т10*. Приведите к нормальной форме уравнение Бине для светового луча в метрике Шварцшильда. Укажите нормализующую замену с точностью до членов третьего порядка.

Второе задание

(срок сдачи с 10 по 15 мая 2021 г.)

Контрольная работа с 3 по 8 мая 2021 г.

5. **Функция Гамильтона и канонические уравнения. Уравнения Рауса**
   19.9, 19.15, 19.32, 19.69*, 19.70*, 19.72*

6. **Первые интегралы. Скобки Пуассона. Теорема Э. Нётер**
   20.10, 20.16, 20.30, 20.57, 20.35, 20.37*

   Т11.* Заряженная частица массы m движется в плоскости Oxy в силовом поле диполя. Потенциальная энергия частицы задается формулой

   $$\Pi = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

   где k — постоянная величина. Делается преобразование подобия

   $$x = \alpha x_*, \quad y = \alpha y_*, \quad t = \beta t_*.$$

   Подберите постоянные коэффициенты α, β так, чтобы это преобразование не изменяло функцию Лагранжа. При помощи теоремы Нётер укажите соответствующий интеграл уравнений движения частицы.

7. **Интегральные инварианты**
   22.1, 22.8, 22.18, 22.23, 22.24*

8. **Канонические преобразования и теория возмущений**
   23.7, 23.22, 23.41, 23.97, 23.106

   Т12. Движение математического маятника при больших значениях постоянной интеграла энергии мало отличается от равномерного вращения и в безразмерных переменных может быть описано системой канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона:

   $$H = \frac{1}{2}p^2 - \varepsilon\cos q, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

   В системе делается унивалентное каноническое преобразование $q, p \to Q, P$, задаваемое производящей функцией $S_1(q, P)$ вида

   $$S_1 = qP + \varepsilon S_1^{(1)}(q, P).$$

а) Подберите функцию $S_1^{(1)}$ так, чтобы в новой функции Гамильтона были уничтожены члены первой степени относительно ε.

б) Пренебрегая членами выше первой степени относительно ε, выпишите решение полученной таким путем новой системы дифференциальных уравнений движения.

в) С точностью до членов порядка ε включительно найдите явную зависимость старых переменных q, p от новых переменных Q, P.

Т13*. Функция Гамильтона системы с одной степенью свободы имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(a^4q^2 + p^2) + b^2q^4,$$

где a и b — отличные от нуля числа. При помощи преобразования Биркгофа найдите нормальную форму этой функции в окрестности положения равновесия $q = 0$, $p = 0$ с точностью до членов четвертой степени включительно. Найдите также приближенную зависимость периода колебаний системы от значения постоянной h интеграла $H(q, p) = h$.

9. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
24.1, 24.15, 24.32, 24.88*

Т14*. Найдите в квадратурах замену переменных

$$Q = Q(q, p), P = P(q, p),$$

которая переводит систему

$$H_1 = \frac{p^2}{2} - \cos q$$

в систему

$$H_2 = \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2}.$$

10. **Адиабатические инварианты**
Т15. Математический маятник находится на гладкой плоскости, образующей угол α с горизонтом. Как изменяется амплитуда a малых колебаний маятника при медленном изменении угла α?

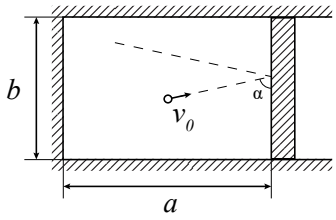
Т16. Упругий шарик подпрыгивает в поле тяжести над плитой, расположенной горизонтально на высоте H от земли. Как меняется высота h подскока шарика над плитой в случаях, если:

1) H медленно изменяется во времени,

2) $H = \text{const}$, но ускорение свободного падения g медленно изменяется?

Т17. Свободная материальная точка массы m движется в прямоугольной области с размерами $a \times b$, ограниченной абсолютно упругими стенками. Начальная скорость точки равна v_0 и составляет угол α с вертикалью. Найдите усреднённую за время большого числа соударений силу, с которой точка действует на правую стенку.

Горизонтальный размер области a начинает медленно изменяться со временем: $a = a(\varepsilon t)$. Найдите выражение для адиабатического инварианта системы и сравните его с уравнением адиабаты для идеального газа.



Т18*. Материальная точка скользит без трения по горизонтальной поверхности круглого стола. Края стола ограничены бортиками, с которыми точка соударяется абсолютно упруго. Радиус стола медленно уменьшается со временем, при этом центр стола остаётся неподвижным.

1) Во сколько раз изменится интервал времени Δt между последовательными ударами точки о бортики к тому моменту, как кинетическая энергия точки E возрастёт в два раза?

2) Во сколько раз изменится абсолютная величина импульса частицы p к тому моменту, как радиус стола уменьшится в два раза?

11. Элементы теории детерминированного хаоса и КАМ-теории

Т19. Для гамильтоновой системы $H_0 = 7I_1 - I_2$ проверьте выполнение условий невырожденности и изоэнергетической невырожденности. Найдите решение уравнений движения $x(t), y(t)$ в

переменных $x = \sqrt{2I_1}\cos\varphi_1$, $y = \sqrt{2I_1}\sin\varphi_1$ при наложении возмущения εH_1:

1) $H_1 = \sqrt{2I_1}\cos\varphi_1\cos 6\varphi_2$,

2) $H_1 = \sqrt{2I_1}\cos\varphi_1\cos 7\varphi_2$.

Т20. Для каждой из гамильтоновых систем H_0 оцените меру множества траекторий устойчивых к возмущениям εH_1 $(0 < \varepsilon \ll 1)$.

1) $H_0 = 42I_1^2 + I_1I_2 + 42I_2^2$, $\quad H_1 = 2I_1\sin(3\varphi_1 - 18\varphi_2)$,

2) $H_0 = 42I_1^2 + I_1I_2 - I_2^2$, $\quad H_1 = 3I_2\cos(2\varphi_1 + 14\varphi_2)$,

3) $H_0 = 36I_1^2 + 12I_1I_2 + I_2^2$,
$$H_1 = \left(42I_1^2 + 13I_1I_2 + I_2^2\right)\cos^3(\varphi_1 - 6\varphi_2),$$

4) $H_0 = 49I_1^2 - 14I_1I_2 + I_2^2 + 6I_1 + I_2$, $\quad H_1 = 4I_2\sin^3(3\varphi_1 + 21\varphi_2)$,

Постройте графики линий уровня гамильтониана $H_0\,(I_1, I_2)$ и отложите на них линии $\omega_1 : \omega_2 = \text{const}$.

*Для каждого случая, в котором имеется неустойчивость, найдите хотя бы одну траекторию, уходящую бесконечно далеко от исходной точки $(I_1(0), I_2(0))$ при $t \to \infty$.

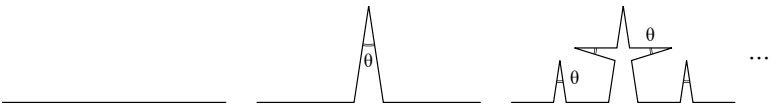
Т21. Для отображения Мандельброта

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}$$

найдите стационарные точки и исследуйте их на устойчивость при значениях параметра $c = 0$ и $c = \frac{1}{4}$.

Т22. Вычислите размерность Хаусдорфа для ломаной линии, получающейся в результате итеративного процесса, изображенного на рисунке, при $n \to \infty$. На каждом шаге середина каждого сегмента ломаной заменяется двумя отрезками, расположенными под углом θ друг к другу так, чтобы в результате все сегменты получающейся ломаной имели одинаковую длину. Отдельно рассмотрите случаи $\theta = \pi$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ и $\theta = 0$.

*Найдите также размерность Хаусдорфа для области, ограниченной получаемой ломаной и отрезком, соединяющим её свободные концы.



Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1996; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2002.

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа физики и исследований имени Ландау
(ЛФИ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,5. Тираж 185 экз.
Заказ № 11.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок