Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК
программ и заданий

**Физтех-школа физики и исследований
имени Ландау
(ЛФИ)**

**для студентов 1 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 1 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа физики и исследований имени Ландау. – Москва : МФТИ, 2021. – 40 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика:**
термодинамика и молекулярная физика
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 2 семестр

Диф. зачёт – 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. С.Булыгин
д.ф.-м.н., проф. А. В.Гавриков
д.ф.-м.н., проф. А. А.Катанин
к.ф.-м.н., доц. К. М.Крымский
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. Д. И. Холин
к.ф.-м.н., доц. И. С. Юдин

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 7 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

1. Основные понятия, задачи и методы молекулярной физики. Макроскопические параметры, термодинамическая система, термодинамические параметры, термодинамическое равновесие. Нулевое начало термодинамики. Термическое и калорическое уравнения состояния.

Идеальный газ. Связь давления идеального газа с кинетической энергией молекул. Уравнение состояния идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа. Идеально-газовое определение температуры.

Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и постоянном давлении, соотношение Майера для идеального газа. Адиабатический и политропический процессы. Адиабата и политропа идеального газа.

Скорость звука в газах.

2. Циклические процессы. Тепловые машины. КПД тепловой машины. Цикл Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики. Эквивалентные формулировки второго начала. Неравенство Клаузиуса.

Термодинамическое определение энтропии. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах, закон возрастания энтропии. Энтропия идеального газа. Неравновесное расширение идеального газа в пустоту.

3. Термодинамические функции и их свойства. Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, энергия Гиббса. Преобразования термодинамических функций. Соотношения Максвелла.

Максимальная работа системы при контакте с термостатом. Максимальная полезная работа системы.

4. Применение термодинамических потенциалов. Термодинамика излучения. Адиабатическое растяжение резинового и металлического стержней. Тепловое расширение твёрдых тел.

Поверхностные явления. Краевые углы, смачивание и несмачивание. Формула Лапласа. Свободная и внутренняя энергия поверхности.

5. Фаза и агрегатное состояние. Классификация фазовых переходов (I и II рода). Экстенсивные и интенсивные величины. Химический потенциал. Условия равновесия фаз для переходов I рода. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кривая фазового равновесия «жидкость–пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Фазовые диаграммы. Тройная точка. Диаграмма состояния «лёд–вода–пар». Критическая точка.

Метастабильные состояния. Перегретая жидкость и переохлаждённый пар. Зависимость давления пара от кривизны поверхности жидкости. Кипение. Роль зародышей в образовании фазы.

6. Газ Ван-дер-Ваальса как модель реального газа. Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса и их связь с изотермами реальной системы. Правило Максвелла (правило рычага). Критические параметры и приведённое уравнение состояния. Адиабата газа Ван-дер-Ваальса. Неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в пустоту.

7. Элементы гидродинамики идеальной жидкости. Линии тока, стационарное ламинарное течение. Уравнение Бернулли для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Изоэнтропическое течение идеального газа, истечение газа из отверстия. Эффект Джоуля–Томсона, температура инверсии.

8. Элементы теории вероятностей. Дискретные и непрерывные случайные величины, плотность вероятности. Условие нормировки. Средние величины и дисперсия. Независимые случайные величины. Нормальный закон распределения как предел распределения для суммы большого числа независимых слагаемых (без вывода). Зависимость дисперсии суммы независимых слагаемых от их числа («закон $\sqrt{N}$»).

9. Распределение Максвелла: распределения частиц по компонентам скорости и абсолютным значениям скорости. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. Распределение Максвелла по энергиям.

Элементы молекулярно-кинетической теории. Плотность потока частиц, движущихся в заданном направлении. Среднее число и средняя энергия частиц, вылетающих в вакуум через малое отверстие в сосуде.

Распределение Больцмана в поле внешних сил. Барометрическая формула. Распределение Максвелла—Больцмана.

10. Элементы статистической физики классических идеальных систем. Фазовое пространство, макро- и микросостояния, статистический вес макросостояния. Статистическое определение энтропии. Статистическая сумма. Аддитивность энтропии независимых подсистем. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики (теорема Нернста). Распределение Гиббса–Больцмана для идеального газа. Понятие о каноническом распределении Гиббса.

Зависимость статистического веса и энтропии от числа частиц в системе. Изменение энтропии при смешении газов, парадокс Гиббса.

11. Приложения статистической физики. Статистическая сумма. Классическая теория теплоёмкостей: закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы. Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга–Пти). Элементы квантовой теории теплоёмкостей. Замораживание степеней свободы, характеристические температуры. Зависимость теплоёмкости C_V газов от температуры.

Статистическая температура. Свойства двухуровневой системы, инверсная заселённость.

12. Флуктуации. Связь вероятности флуктуации с изменением энтропии системы. Флуктуации аддитивных величин, зависимость флуктуаций от числа частиц. Флуктуация числа частиц в выделенном объёме. Флуктуация энергии системы в жёсткой термостатированной оболочке. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов (пружинные весы, газовый термометр).

13. Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Распределение молекул по длинам свободного пробега. Число столкновений молекул в единице объёма.

Явления молекулярного переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Законы Фика, Фурье и Ньютона. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение диффузии и теплопроводности. Температуропроводность. Стационарные и квазистационарные распределения концентрации и температуры.

14. Диффузия как процесс случайных блужданий. Задача о случайных блужданиях, среднеквадратичное смещение частицы при большом числе шагов. Расплывание облака частиц и распространение тепла за счёт теплопроводности.

Броуновское движение макроскопических частиц. Закон Эйнштейна–Смолуховского для смещения броуновской частицы. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна).

15. Стационарное ламинарное течение вязкой жидкости/газа по прямолинейной трубе, формула Пуазейля. Течение разрежённого газа по прямолинейной трубе. Явления переноса в разрежённых газах: эффект Кнудсена (эффузия), зависимость коэффициента теплопроводности разрежённого газа от давления.

Безразмерные параметры и законы подобия для течений. Число Рейнольдса. Число Кнудсена. Эффект Магнуса и подъёмная сила при обтекании крыла (качественное объяснение).

16. Введение в неравновесную термодинамику. Локальное термодинамическое равновесие. Неравновесная термодинамика при малых отклонений от термодинамического равновесия (линейная теория), термодинамические силы и потоки, соотношения взаимности Онзагера, перекрёстные термодинамические явления (термоэлектрический эффект, термомеханический и механокалорический эффекты). Производство энтропии, принципы минимума производства энтропии и наименьшего рассеяния энергии в необратимых термодинамических процессах.

Нелинейная термодинамика, флуктуации в диссипативных системах вдали от положения термодинамического равновесия, "порядок из хаоса" (ячейки Бенара, реакция Белоусова–Жаботинского).

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. *Кириченко Н.А.* Термодинамика, статистическая молекулярная физика. – Москва : Физматкнига, 2012.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Физматлит, 2006.
3. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика / под ред. Ю.М. Ципенюка. Часть V. Главы 1–4. – Москва : Физматлит, 2001.
4. *Белонучкин В.Е.* Краткий курс термодинамики. – Москва : МФТИ, 2010.
5. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1 / под ред. А. Д. Гладуна. – Москва : МФТИ, 2012.
6. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В. А. Овчинкина (3-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2013.

Дополнительная литература

1. *Щёголев И.Ф.* Элементы статистической механики, термодинамики и кинетики. – Москва.: Янус, 1996; Москва : Интеллект, 2008.
2. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. – Москва : Интеллект, 2014 (4-е изд.).
3. *Базаров И.П.* Термодинамика. – Москва : Высшая школа, 1983.
4. *Рейф Ф.* Статистическая физика (Берклеевский курс физики). Т. 5. – Москва : Наука, 1972.
5. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.
6. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – Москва : Мир, 2009.
7. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Высшая школа, 2009.
8. *Прут Э.В., Кленов С.Л., Овсянникова О.Б.* Введение в теорию вероятностей в молекулярной физике. – Москва : МФТИ. 2002. Элементы теории флуктуаций и броуновского движения в молекулярной физике. – Москва : МФТИ, 2002.
9. *Прут Э.В.* Теплофизические свойства твёрдых тел. – Москва : МФТИ, 2009.

10. *Булыгин В.С.* Теоремы Карно. – Москва : МФТИ, 2012; Теплоёмкость и внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса. – Москва : МФТИ, 2012; Некоторые задачи теории теплопроводности. – Москва : МФТИ, 2006; Теплоёмкость идеального газа. – Москва : МФТИ, 2019;
11. *Попов П.В.* Диффузия. – Москва : МФТИ, 2016.

Электронные ресурсы

http://physics.mipt.ru/S_II/method/

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 1-го курса на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ нед.	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	**I**	**II**
1–5 февр.	**1**	Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Адиабатический и политропический процессы.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	1.40 1.54 1.87 2.6	1.100 1.47 1.75 1.83
8–12 февр.	**2**	Тепловые машины. Второе начало термодинамики. Изменение энтропии в обратимых процессах.	$^{0}4$ $^{0}5$ $^{0}6$	3.25 3.43 Т1 4.80	3.52 3.47 4.15 4.78
15–19 февр.	**3**	Изменение энтропии в необратимых процессах. Термодинамические потенциалы.	$^{0}7$ $^{0}8$ $^{0}9$	4.75 4.43/44 5.75 5.38	4.47 Т6 5.32 5.54
22 – 26 февр.	**4**	Применение термодинамических потенциалов. Преобразования термодинамических функций.	1.3 $^{0}10$ $^{0}11$ $^{0}12$	5.16 5.28 12.8 5.42	5.63 5.40 12.9 12.38
1–5 мар.	**5**	Фазовые превращения. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кипение.	$^{0}13$ $^{0}14$ $^{0}15$	11.29 11.16 11.34 12.51	11.36 11.74 11.78 12.48
8–12 мар.	**6**	Реальные газы. Уравнение Бернулли. Эффект Джоуля—Томсона.	$^{0}16$ $^{0}17$ $^{0}18$	6.17 6.52 2.11 6.68/69	6.39 6.41 2.20 6.87
15–19 мар.	**7**	Контрольная работа по 1-му заданию (по группам).			
22–26 мар.	**8**	Сдача 1-го задания.			

29 мар. –2 апр.	**9**	Основы молекулярно-кинетической теории. Распределение Максвелла.	^{0}19 ^{0}20 7.52	7.18 7.14 7.20 7.53	7.70 7.16 7.40 7.80
5–9 апр.	**10**	Распределение Больцмана. Элементы статистической физики.	^{0}21 ^{0}22 ^{0}23 ^{0}24	8.11 8.28 8.56 8.52	8.15 8.25 8.70 8.61
12–16 апр.	**11**	Статистический смысл энтропии. Флуктуации.	^{0}25 ^{0}26 ^{0}27	9.45 Т4 9.6 9.8	8.51 Т2 9.28 9.40
19–23 апр.	**12**	Столкновения, длина свободного пробега. Явления переноса.	10.2 ^{0}28 ^{0}29	10.8 10.15 10.36 10.149	10.38 10.16 10.134 10.143
26–30 апр.	**13**	Явления переноса. Броуновское движение.	^{0}30 ^{0}31	10.106 10.30 Т3 10.92	10.25 10.54 10.98 Т5
3–7 мая	**14**	Течение газов. Явления в разреженных газах.	^{0}32 ^{0}33 ^{0}34	10.82/83 10.68/69 10.120 14.27$^{\text{мех}}$	10.77 10.142 10.102 14.46$^{\text{мех}}$
10–21 мая	**15/16**	Сдача 2-го задания.			

Примечание

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика, термодинамика и молекулярная физика” / под ред. В.А. Овчинкина (**3-е изд**., испр. и доп.). — Москва : Физматкнига, 2013. Задачи с индексом «$^{\text{мех}}$» — из раздела «Механика».

Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

0 — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;

I — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи 0 группы

1. В комнате объёмом V в течение некоторого времени был включён нагреватель. В результате температура воздуха увеличилась от T_1 до T_2. Давление в комнате не изменилось. Найти изменение внутренней ΔU энергии воздуха, содержащегося в комнате.

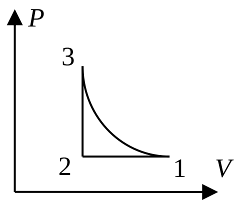
2. Найти работу, которую совершает моль воздуха, расширяясь от объёма V_0 до $V_1 = 2V_0$ в изотермическом процессе при комнатной температуре.

Ответ: 1,7 кДж.

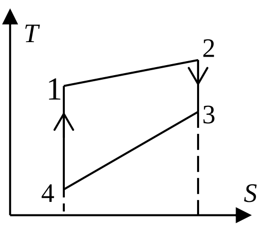
3. Температура воздуха равна $T = 273$ К. Найти изменение скорости звука при изменении температуры на $\Delta T = 1$ К.

Ответ: $\Delta c_s \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} c_s = 0{,}61$ м/с.

4. Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного сжатия, изохорного нагревания и адиабатического расширения, если отношение максимального и минимального объёмов равно 2. Рабочее тело – двухатомный идеальный газ.



Ответ: 0,15.



5. Тепловая машина с неизвестным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рисунке в координатах TS. $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{3}{4}T_1$, $T_4 = \frac{1}{20}T_1$. Найти КПД цикла.

Ответ: 0,68.

6. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу (тепловой насос), отбирает от первого резервуара 65 Дж теплоты и передаёт количество теплоты 80 Дж второму резервуару при T = 320 К. Определить температуру первого резервуара.

Ответ: 260 К.

7. Два теплоизолированных сосуда равного объёма соединены трубкой с краном. В одном сосуде содержится 10 г водорода H_2, второй откачан до высокого вакуума. Кран открывают и газ расширяется на весь объём. Считая газ идеальным, найти изменение его энтропии к моменту установления равновесия.

Ответ: $\Delta S = 28{,}8$ Дж/К.

8. Кусок льда массой 90 г, имеющий температур 0°С, положили в пустую алюминиевую кастрюлю массой 330 г, нагретой до 100°С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Теплота плавления льда 330 Дж/г, теплоёмкость алюминия $0{,}9$ Дж/(г $\cdot$ К).

Ответ: $\Delta S = 16{,}1$ Дж/К.

9. Найти изменение свободной энергии ΔF и термодинамического потенциала Гиббса ΔG для 1 кг водяного пара при изотермическом ($T = 298$ К) увеличении давления от 1,0 до 2,0 мбар. Водяной пар считать идеальным газом.

Ответ: $\Delta G = \Delta F = 95{,}4$ кДж.

10. Уравнение состояния резиновой полосы имеет вид $f = aT\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right]$, где f — натяжение, $a = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/К, l — длина полосы, длина недеформированной полосы $l_0 = 1$ м. Найти изменение свободной и внутренней энергии резины при её изотермическом растяжении до $l_1 = 2$ м. Температура $T = 300$ К.

Ответ: $\Delta F = 3{,}9$ Дж, $\Delta U = 0$.

11. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы разделить сферическую каплю масла массой $m = 1$ г на капельки диаметром $d = 2 \cdot 10^{-4}$ см, если процесс дробления изотермический. Поверхностное натяжение масла $\sigma = 26$ дин/см, плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

Ответ: $8{,}7 \cdot 10^5$ эрг.

12. На какую высоту поднимается вода между двумя плоскими параллельными пластинами, расстояние между которыми $h = 0{,}1$ мм, если краевой угол смачивания $\theta = 60°$. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Ответ: 7,5 см.

13. Молярная теплота парообразования воды в точке кипения при $t = 100$ °С равна $\Lambda = 40{,}7$ кДж/моль. Считая водяной пар идеальным газом, найти разность молярных внутренних энергий жидкой воды и водяного пара при данной температуре.

Ответ: $u_{\text{п}} - u_{\text{ж}} = 37{,}6$ кДж/моль.

14. Определить температуру кипения воды на вершине Эвереста, где атмосферное давление составляет 250 мм рт. ст. Теплоту парообразования воды считать не зависящей от температуры и равной $\Lambda = 2{,}28$ кДж/г.

Ответ: 71 °C.

15. Оценить относительный перепад давления $\Delta P/P$ паров воды на высоте подъёма воды в полностью смачиваемом капилляре диаметром d = 1 мкм. Поверхностное натяжение $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, температура $t = 20$ °C.

Ответ: $\Delta P/P \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

16. Во сколько раз давление газа Ван-дер-Ваальса больше его критического давления, если известно, что его объём в 5 раз, а температура в 5,7 раза больше критических значений этих величин?

Ответ: $\pi = 3{,}14$.

17. Найти изменение энтропии идеального газа, подвергнутого дросселированию через пористую перегородку, если начальное давление равно $P_1 = 4$ атм, конечное $P_2 = 1$ атм.

Ответ: 11,5 Дж/К.

18. Оценить максимально возможную скорость истечения воздуха при нормальных условиях через отверстие, выходящее в вакуум.

Ответ: 740 м/с.

19. Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до v_0. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Ответ: $0{,}5v_0$; $v_0/\sqrt{3}$; $v_0/2\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$.

20. Найти наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул азота при T = 300 К. Сравнить полученные значения со скоростью звука.

Ответ: $v_{\text{н.в.}} = 421$ м/с, $v_{\text{ср}} = 476$ м/с, $v_{\text{кв}} = 517$ м/с; $c_{\text{зв}} = 353$ м/с.

21. Определить, на какой высоте в изотермической атмосфере её плотность уменьшится в 5 раз, если на высоте 5,5 км она уменьшается в 2 раза.

Ответ: 12,8 км.

22. Молекула может находиться на двух энергетических уровнях: основном и возбуждённом. Разность энергий между ними составляет $\Delta E = 6{,}0 \cdot 10^{-21}$ Дж. Какова доля молекул, находящихся в возбуждённом состоянии при $t = 250$ °C?

Ответ: 0,3.

23. Определить температуру, при которой средняя поступательная энергия молекулы H_2 будет равна энергии возбуждения её первого вращательного уровня. Расстояние между атомами равно $d = 0{,}74 \cdot 10^{-8}$ см.

Ответ: 116 К.

24. Собственная частота колебаний атомов в молекуле Cl_2 равна 10^{14} $с^{-1}$. Оценить характеристическую температуру, выше которой колебательную теплоёмкость молекулы можно рассчитывать по классической теории. Какова будет при этом молярная теплоёмкость газа?

Ответ: 760 К, $7R/2$.

25. Два твёрдых тела с температурами 299 К и 300 К приведены в соприкосновение. Оценить, во сколько раз более вероятна передача порции энергии 10^{-11} эрг от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, чем в обратном направлении. Теплоёмкости тел достаточно велики, так что изменением их температуры можно пренебречь.

Ответ: 5.

26. Небольшой груз массой 1 г подвешен на лёгкой нити длиной 1 м. Оценить среднеквадратичное отклонение груза от положения равновесия из-за тепловых флуктуаций при комнатной температуре.

Ответ: $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} \approx 0{,}9$ нм.

27. Оценить среднеквадратичную относительную флуктуацию числа молекул воздуха в объёме 1 $мкм^3$ при нормальных условиях.

Ответ: 0,02%.

28. Вязкость азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Оценить коэффициенты теплопроводности и самодиффузии азота, а также диаметр молекулы азота.

Ответ: $\varkappa \sim 10^{-2}$ Вт/м·К, $D \sim 0{,}15$ $см^2/с$, $d \sim 4 \cdot 10^{-10}$ м.

29. Оценить количество тепла в расчёте на 1 $м^2$, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет. Расстояние между стёклами $h = 23$ мм. Разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta T = 30$ °С. Теплопроводность воздуха $\varkappa = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м·К}}$ считать не зависящей от температуры.

Ответ: $q = 30$ $Вт/м^2$.

30. Оценить коэффициент диффузии капель тумана радиусом $R \sim 10$ мкм в воздухе при нормальных условиях. Вязкость воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ: 10^{-8} $см^2/с$.

31. Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda \sim 10^{-5}$ см.

Ответ: 10^2 с.

32. Два сосуда с идеальным газом соединены трубкой, диаметр которой заметно меньше длины свободного пробега в обоих сосудах. Температура в сосудах поддерживается постоянной и равной соответственно T_1 и $T_2 = 2T_1$. Найти отношение давлений P_2/P_1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

33. Оценить коэффициент диффузии сильно разреженного воздуха по длинной трубке диаметром 1 см при комнатной температуре. Считать, что разрежение таково, что длина пробега молекул ограничивается диаметром трубки (высокий вакуум).

Ответ: ~ 1,6 м^2/с.

34. Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра $d = 2$ см при расходе $Q = 30$ л/мин. Вязкость холодной воды $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с. Будет ли такое течение ламинарным?

Ответ: 10^4.

Текстовые задачи

Т-1. В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ К. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ К. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Ответ: $A \approx 1$ кДж, $T_2 = 450$ К.

Т-2. Найти молярную энтропию кристаллического ^{6}Li при низких температурах, пренебрегая взаимодействием ядер между собой. Момент импульса (спин) ядра ^{6}Li равен $s = 1$ (в единицах постоянной Планка $\hbar$). Согласно квантовой механике, число возможных ориентаций вектора момента импульса равно $2s + 1$.

Ответ: $S = 9{,}1$ Дж/(моль·К).

Т-3. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые $\tau = 4$ с на расстояние $\lambda = 0{,}5$ м в случайном направлении. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положения $\sqrt{\overline{\Delta r^2}}$ за $t = 1$ час и определить коэффициент диффузии D толпы пьяных матросов, не взаимодействующих между собой.

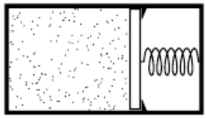
Ответ: $\sqrt{\overline{\Delta r^2}} = 15$ м, $D \approx 56{,}3$ м^2/ч.

Т-4. (5А-2017) Ионы солей иттербия имеют спин $s = 7/2$. Во внешнем магнитном поле B энергия иона зависит от ориентации спина и может принимать значения $E_m = m\mu B$, где μ — известная константа, и $m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. Найти изменение энтропии ΔS и количество теплоты Q, поглощаемое 1 молем соли при её квазистатическом изотермическом размагничивании от очень большого ($B_0 \gg kT/\mu$) до нулевого поля ($B_1 = 0$) при температуре $T = 1$ К. Взаимодействием ионов между собой пренебречь.

Ответ: $\Delta S = 17{,}3$ Дж/К, $Q = 17{,}3$ Дж.

Т-5. (6А-2018) Вертикально расположенная пробирка высотой $h = 5$ см заполнена водой, в которой диспергированы в небольшом количестве сферические наночастицы плотностью $\rho = 4$ г/см^3 каждая. Система исходно находится в равновесии при температуре $T_0 = 300$ К, а отношение максимальной и минимальной концентраций наночастиц равно $n_{max}/n_{min} = 1{,}1$. На дне сосуда размещают адсорбент, поглощающий все попадающие на него наночастицы. Оценить время, требуемое для очистки воды от примеси. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Ответ: ~ 9 мес.



Т-6. (4Б-2018) Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части поршнем, прикреплённым пружиной к правой стенке сосуда (см. рис.). Слева от поршня находится 1 моль азота при комнатной температуре, справа — вакуум. Вначале пружина не деформирована, а поршень удерживается защёлкой. Защёлку убирают, и когда система приходит в равновесие, давление газа оказывается в $n = 3$ раза меньше исходного. Считая газ идеальным, найдите изменение его энтропии в этом процессе.

Ответ: $0{,}75R$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.
2. Мера Лебега. Клеточные множества. Определение верхней меры и ее счетная полуаддитивность. Измеримые по Лебегу множества. Счетная аддитивность меры Лебега. σ-кольцо измеримых множеств. Непрерывность меры Лебега.
3. Измеримые функции. Измеримость линейной комбинации и поточечного предела измеримых функций. Интеграл Лебега для счетно-ступенчатых функций, его линейность и счетная аддитивность.
4. Определение интеграла Лебега и интегрируемости по Лебегу. Связь интегрируемости функции с интегрируемостью ее модуля. Интегральная теорема о среднем. Счетная аддитивность и непрерывность интеграла Лебега по множествам интегрирования.
5. Интеграл с переменным верхним пределом, его непрерывность. Формула Ньютона–Лейбница. Формулы замены переменных в интеграле и интегрирования по частям.
6. Геометрические приложения интеграла: связь интеграла и меры множества под графиком интегрируемой неотрицательной функции. Вычисление длины кривой. Интеграл Римана и его связь с интегралом Лебега.
7. Предельный переход под знаком интеграла: теорема Б. Леви о монотонной сходимости и теорема Лебега об ограниченной сходимости.
8. Исследование интегрируемости функции одной переменной. Признак сравнения и эквивалентность в смысле интегрируемости.
9. Несобственный интеграл. Связь абсолютной сходимости и интерируемости по Лебегу. Критерий Коши. Признаки Дирихле и Абеля.
10. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле, Лейбница и Абеля. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов.
11. Степенные ряды. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Теорема о круге сходимости. Первая теорема Абеля. Теорема о равномерной

сходимости степенного ряда. Вторая теорема Абеля. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Теоремы об интегрировании и дифференцировании степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Достаточное условие регулярности функции. Ряды Тейлора для показательной, гиперболических и тригонометрических функций. Ряд Тейлора комплекснозначной экспоненты. Формулы Эйлера. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Ряды Тейлора для степенной, логарифмической и других функций.

12. Предел числовой функции нескольких переменных. Пределы по совокупности переменных и по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам. Непрерывность функции нескольких переменных.
13. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке. Геометрический смысл градиента и дифференциала. Необходимые условия дифференцируемости. Производные по направлению и частные производные. Достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции.
14. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
15. Теорема о неявной функции для одного уравнения. Теорема Лагранжа о среднем для вектор функции нескольких переменных. Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявной функции для системы уравнений. Теорема об обратном отображении. Теорема о расщеплении отображений.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу, ФОПФ. Ч. 1. `https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki`
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2019.
3. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. `http://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`
4. *Зорич В. Ф.* Математический анализ. Ч. 1. — Москва : МЦНМО, 2012.

Дополнительная

5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

6. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С1**)
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С2**)
3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — **С3**)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 февраля)

I. Неопределенный интеграл

С2, §1: $2(\underline{15}, 16)$; $\underline{12(2)}$; $15(4, \underline{5})$; $17(4)$; $\underline{24(3)}$.

С2, §2: $\underline{1(4)}$; $2(1)$; $\underline{3(2)}$; $\underline{4(2)}$; $6(6)^*$; $8(1)^*$.

С2, §3: $\underline{2(8)}$; $5(1)$; $8(1)^*$; $\underline{18(3)}$; $19(2)$.

С2, §4: $\underline{4(1)}$; $15(6)$; $\underline{16(1)}$; $18(2)^*$; $\underline{21(2)}$.

С2, §5: 144; $\underline{180}$.

II. Числовые ряды

С2, §13: $2(1)$; $\underline{10(2)}$; $\underline{14(3)}$.

С2, §14: $\underline{25(9)}$; $2(6, 7)$; $9(8)$; $12(8)$; $\underline{19(8)}$; $20(1)$; $21(6, \underline{12})$; 38^*.

С2, §15: $3(4, \underline{5})$; $8(\underline{3}, 4)$; $\underline{9(2)}$.

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

Т.1. Верно ли, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится?

Т.2*. Пусть $b_n = \begin{cases} a_{2k-1}, & n = 3k-2, \\ a_{4k-2}, & n = 3k-1, \\ a_{4k}, & n = 3k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ получен перестановкой слагаемых ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Исследовать сходимость этих рядов при $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §1:**	2(15, 16); 12(2); 15(4, 5); 17(4); 24(3).
	С2, §2:	1(4); 2(1); 3(2); 4(2); 6(6)*; 8(1)*.
	С2, §3:	2(8); 5(1); 8(1)*; 18(3); 19(2).
2 неделя	**С2, §4:**	4(1); 15(6); 16(1); 18(2)*; 21(2).
	С2, §5:	144; 180.
	С2, §13:	2(1); 10(2); 14(3).
3 неделя	**С2, §14:**	25(9); 2(6, 7); 9(8); 12(8); 19(8); 20(1); 21(6, 12); 38*.
	С2, §15:	3(4, 5); 8(3,4); 9(2).
		Т.1, Т.2.

$\boxed{39 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 05–10 апреля)

I. Мера Лебега

Т.1. Приведите пример замкнутого подмножества отрезка $[0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру Лебега не менее 0,99.

Т.2. Докажите измеримость множества X, состоящего из всех чисел отрезка $[0, 1]$, десятичная запись которых не содержит цифру 5. Найдите лебегову меру X.

Т.3. Докажите, что у любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ его граница ∂X является измеримым по Лебегу множеством. Приведите пример замкнутого и ограниченного множества $X \subset \mathbb{R}$, граница которого имеет положительную меру Лебега.

Т.4. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ имеет Лебегову меру нуль, функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Докажите, что $f(A)$ тоже имеет Лебегову меру нуль.

T.5*. Докажите, что утверждение предыдущей задачи будет неверно, если заменить непрерывную дифференцируемость f на непрерывность.

T.6. Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – счетный набор измеримых вложенных множеств, $X_{k+1} \subset X_k \subset \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $X = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Верно ли, что $\mu(X) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(X_k)$?

<u>T.7</u>. Докажите, что если множество $X \subset \mathbb{R}$ конечно измеримо, то мера $\mu(X \setminus (X+t))$ стремится к нулю при $t \to 0$. Здесь $X+t$ – это сдвиг множества X на t.

T.8*. Докажите, что объединение произвольного (даже несчетного) семейства невырожденных отрезков измеримо.

II. Измеримые по Лебегу функции

<u>T.9</u>. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по Лебегу, то её график имеет меру Лебега нуль на плоскости.

T.10. Пусть функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу. Докажите измеримость по Лебегу функций:

а) $\min\{f(x), g(x)\}$ и <u>б)</u> $f(x)g(x)$.

T.11. Пусть функции $f_k : X \to \mathbb{R}$ измеримы при всех $k \in \mathbb{N}$. Докажите измеримость функции $f(x) = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$.

T.12*. Приведите пример непрерывной и непостоянной на отрезке функции, у которой производная почти всюду (по мере Лебега) существует и почти всюду равна нулю.

T.13. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема на $\mathbb{R}$. Докажите, что её производная измерима по Лебегу.

III. Интеграл Лебега

<u>T.14</u>. Пусть $f(x) = e^x$, $\varepsilon > 0$. Постройте какие-нибудь конечно-ступенчатые функции $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [0;1] \to \mathbb{R}$ так, что

$$g_\varepsilon(x) \le f(x) \le h_\varepsilon(x) \quad \forall x \in [0,1], \qquad \int\limits_{[0;1]} (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))\, dx < \varepsilon.$$

Покажите, что $\int\limits_{[0;1]} f(x)\, dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{[0;1]} g_\varepsilon(x)\, dx$ и вычислите этот интеграл.

Т.15. Исследуйте интегрируемость по Лебегу на $[0;1]$ и на $\mathbb{R}$ функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Т.16. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ измерима.

а) Могут ли нижний и верхний интегралы Лебега $I_*(f, X)$, $I^*(f, X)$ быть конечными и различными?

б) Могут ли $I_*(f, X)$, $I^*(f, X)$ быть бесконечными и различными?

Т.17. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве X положительной меры Лебега, и $f(x) > 0$ для любого $x \in X$. Докажите, что

$$\int\limits_X f(x)\, dx > 0.$$

Т.18. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ интегрируема. Докажите, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется конечно-ступенчатая интегрируемая функция $f_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$, приближающая функцию f в среднем с точностью ε, т.е. такая, что $\int\limits_X |f_\varepsilon(x) - f(x)|\, dx \le \varepsilon$.

Т.19*. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, то

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)|\, dx = 0.$$

Т.20. Докажите, что если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\omega x}\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad \omega \to \infty.$$

IV. Свойства определенного интеграла и его вычисление

С2, §6: 54(5); 112(1, 2); 117; 126; 197; 108(1).
С2, §10: 44; 50(3).

Т.21. Верно ли, что существует точка $\xi \in [-1;1]$ такая, что

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_{-1}^{1} g(x)\, dx,$$

если $f : [-1; 1] \to \mathbb{R}$ – произвольная непрерывная функция и:

а) $g(x) = x$; б) $g(x) = \cos x^2$?

V. Геометрические приложения определенного интеграла

С2, §7: 4(5); 33(5); 34(2); 69(4); 72(3); 82(3).

VI. Предельный переход под знаком интеграла

Т.22. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ функция $f_k : [0; 1] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Пусть для любого $x \in [0; 1]$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_0^1 f_k(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$

а) в общем случае;

б) если для любого $x \in [0; 1]$ последовательность $\{f_k(x)\}$ монотонна по k;

в) если $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{x\in[0;1]} |f_k(x)| < +\infty$;

г)* если для любого $k \in \mathbb{N}$ функция $f_k(x)$ монотонна по x?

Т.23*. Докажите, что если $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a, b), и её производная ограничена, то

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

VII. Несобственный интеграл

С2, §11: 69; 85; 91; 94; 98.

С2, §12: 90; 99; 104; 120; 125; 135; 139; 141; 183; 218*; 227.

Т.24. Пусть функции $f, g : [1; +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывны, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится абсолютно. Верно ли, что $\int\limits_1^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится?

Т.25*. Пусть функция $f : [1; +\infty) \to [0; +\infty)$ непрерывна.

а) Верно ли, что из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ следует, что $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$?

б) Верно ли обратное?

в) Исследовать эти вопросы при дополнительном условии, что функция f монотонна.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя		Т.1–Т.13.
2 неделя		Т.14–Т.20.
	С2, §6:	54(5); 112(1, 2); 117; 126; 197; 108(1).
	С2, §10:	44; 50(3).
3 неделя		Т.21.
	С2, §7:	4(5); 33(5); 34(2); 69(4); 72(3); 82(3).
		Т.22, Т.23.
	С2, §11:	69; 85; 91; 94; 98.
4 неделя	**С2, §12:**	90; 99; 104; 120; 125; 135; 139; 141; 183; 218*; 227.
		Т.24, Т.25.

$\boxed{49 + 7^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 6(6); 7(5); 8(5); 9(11); 12(10); 17(9).
С2, §18: 18(1); 20(4); 33(5); 36(5); 45*.

Т.1. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0,\, 1]$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Т.2. а) Верно ли, что из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множестве X следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_n)$ для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов X?

б)* Верно ли обратное?

Т.3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,\, 1)$ и $E_2 = (1,\, +\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:
а) $f_n(x) = x \sin \frac{1}{(xn)^2}$; б) $f_n(x) = \frac{\cos nx}{\ln(n+1)}$.

С2, §19: 2; 14; 18; 22.

Т.4. Докажите, что если функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет компактный носитель (равна нулю за пределами некоторого отрезка), а $t_n \to 0$ при $n \to \infty$, то последовательность функций

$$f_n(x) = f(x - t_n)$$

равномерно стремится к f.

II. Степенные ряды

С2, §20: 1(1); 3(1); <u>5(2)</u>; 8(1).
С2, §21: 6(4); 9(6); 11(4); <u>19(7)</u>; 25(4); 32(9); 56(2); <u>80</u>.

III. Частные производные. Дифференциал

С3, §3: <u>3(6)</u>; 18(1); 44(4); 19(2, 4); <u>20(1)</u>.

<u>Т.5</u>. Исследовать на дифференцируемость в точке (0, 0) функцию

а) $f(x, y) = \mathrm{tg}(\sqrt[3]{x^2y^2}) + e^{x+y}$;

<u>б)</u> $f(x, y) = \sin(|x|^{\alpha} y^{\frac{1}{3}})$ при всех $\alpha > 0$.

С3, §4: <u>4</u>; 8(2); 19(1); 25(2); 27(2, 4).

IV. Формула Тейлора

С3, §4: <u>70(2)</u>; 74(5).

V. Гладкие отображения и неявные функции

<u>Т.6</u>. Дано уравнение $y^2 = x^6$

а) Сколько функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?
б) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению?
в) Сколько непрерывных функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?
г) Сколько непрерывных функций $y : [1, 2] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют этому уравнению и условию $y(1) = 1$?

С3, §3: 66; 78; <u>82(1)</u>; 103(1).
С3, §4: 42(1); <u>44(2)</u>.

Т.7. Для отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданного координатными функциями

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y, \end{cases}$$

показать, что якобиан отображения отличен от нуля всюду в $\mathbb{R}^2$, но отображение не является взаимно однозначным. Каково множество значений f?

T.8. Пусть отображение $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ задано координатными функциями

$$\begin{cases} y_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2, \\ y_2(x_1, x_2) = x_2 + x_1^2. \end{cases}$$

В некоторой окрестности точки $(0, 0)$ представьте f в виде суперпозиции $h \circ g$ двух диффеоморфизмов открытых множеств, где диффеоморфизм g меняет лишь первую координату, а диффеоморфизм h – лишь вторую координату.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**C2, §17:** 6(6); 7(5); 8(5); 9(11); 12(10); 17(9). **C2, §18:** 18(1); 20(4); 33(7); 36(6); 45^*. T.1 – T.3.
2 неделя	**C2, §19:** 2; 14; 18; 22. T.4. **C2, §20:** 1(1); 3(1); 5(2); 8(1). **C2, §21:** 6(4); 9(6); 11(4); 19(7); 25(4); 32(9); 56(2); 80.
3 неделя	**C3, §3:** 3(6); 18(1); 44(4). **C3, §3:** 19(2, 4); 20(1). T.5. **C3, §4:** 4; 8(2); 19(1); 25(2); 27(2, 4). **C3, §4:** 70(2); 74(5).
4 неделя	T.6. **C3, §3:** 66; 78; 82(1); 103(1). **C3, §4:** 42(1); 44(2). T.7, T.8.

$\boxed{54 + 2^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ЛФИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент П. А. Кожевников

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

Векторные пространства

1. Векторное пространство. Подпространство. Линейная оболочка системы векторов. Понятие линейно (не)зависимой системы векторов. Ранг системы векторов, его связь с размерностью линейной оболочки.
2. Базис и размерность линейного пространства. Дополнение линейно независимой системы векторов до базиса. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами через координаты. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
3. Подпространства в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма подпространств, её характеризации, прямое дополнение подпространства, проекция на подпространство вдоль прямого дополнения. Связь размерностей суммы и пересечения подпространств. Внешняя прямая сумма. Понятие факторпространства.
4. Понятие аффинного пространства, связь между аффинным и векторным пространством.

Линейные отображения

1. Линейные отображения (гомоморфизмы) и линейные преобразования (линейные операторы) векторного пространства. Изоморфизмы. Теорема об изоморфизме. Операции над линейными отображеними, линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных операторов.
2. Матрицы линейного отображения. Связь операций над матрицами и линейными преобразованиями. Изменение матриц линейного отображения и линейного преобразования при изменении базиса. Группа биективных линейных преобразований и группа $GL_n(\mathbb{R})$.
3. Ядро и образ. Критерий инъективности.
4. Аффинные преобразования плоскости (примеры и основные свойства).

Структура линейного преобразования

1. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения (спектр). Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
2. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
3. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях. Треугольный вид.
4. Теорема Гамильтона–Кэли. Корневые подпространства. Жорданова нормальная форма (ЖНФ), ее существование и единственность. Минимальный многочлен. Связь теории ЖНФ с решением линейных дифференциальных уравнений, линейных рекуррент.

Билинейные формы

1. Билинейные (полуторалинейные) формы. Координатная запись билинейной формы. Матрица билинейной формы и ее изменение при замене базиса.
2. Симметричные билинейные (полуторалинейные) формы. Взаимнооднозначное соответствие с квадратичными (эрмитовыми квадратичными) формами. Приведение квадратичной формы к диагональному и каноническому виду (двойные элементарные преобразования). Закон инерции. Знакоопределенные и полуопределенные формы, их диагональный вид. Критерий Сильвестра.
3. Кососимметричные билинейные формы, приведение их к каноническому виду.

Пространства со скалярным произведением

1. Евклидово и унитарное пространства. Матрица Грама и ее свойства. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца, неравенство треугольника. Метрика. Выражение скалярного произведения в координатах.
2. Ортогональные системы векторов и подпространств. Существование ортонормированных базисов (ОНБ). Изоморфизм евклидовых пространств. Переход от ОНБ к ОНБ. Ортогональные и унитарные матрицы.
3. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта.
4. Преобразование, сопряженное данному. Его существование и единственность, его матрица в ОНБ. Теорема Фредгольма.
5. Самосопряженные линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований, существование ОНБ из собственных векторов.
6. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования. Описание ортогональных преобразований в малых размерностях.
7. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
8. Квадратичные формы в евклидовых (унитарных) пространствах, приведение к диагональному виду. Применение к ортогональной классификации кривых и поверхностей второго порядка. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
9. Понятие о геометрии пространств с не положительно определенным "скалярным произведением".

Сопряженное пространство

1. Линейные функции. Сопряженное (двойственное) пространство, его размерность.

2. Биортогональный (взаимный) базис. Свертка. Канонический изоморфизм пространства и дважды сопряженного к нему. Аннуляторные подпространства, их свойства. Сопряженное отображение.
3. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного.

Тензоры

1. Полилинейные отображения. Определение тензора типа (p, q), изменение координат при замене базиса. Примеры.
2. Основные тензорные операции. Пространство тензоров типа (p, q), умножение, свертка. Метрический тензор и тензоры в евклидовых пространствах.
3. Симметризация и альтернирование тензоров.
4. Кососимметрические тензоры и внешнее произведение.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии илинейной алгебры. — 10-е изд. — Москва : Наука, 2003.
2. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. — Москва : Наука, 1986.
3. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. — Москва : МЦНМО, 2009.
4. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.
5. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — 3-е изд. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. (цитируется — **Б**)
2. *Кострикин А. И.* Сборник задач по алгебре. — Москва : МЦНМО, 2009. (цитируется — **К**)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

Векторные пространства

I. Подпространство. Линейная оболочка. Базис

Б: 20.3(3, 4), 20.4(2), 20.6(2, 3, 5), 20.8(3), 20.14(9), 20.18, 20.20, 20.22(3), 20.23(4), 20.29.

T.1*. В непустой системе $\mathcal{M}$ подмножеств n-элементного множества вместе с любыми двумя подмножествами A, $B \in \mathcal{M}$ содержится их симметрическая разность $A \triangle B$. Докажите, что количество элементов в $\mathcal{M}$ есть степень двойки.

II. Сумма и пересечение. Прямая сумма

Б: 21.2, 21.3(2)*, 21.6(5), 21.7(5, 7), 21.11, 21.12(1, 2).
К: 35.10, 35.13(а, б).

T.2. В условиях задачи 21.7(7) докажите, что пересечение W данных линейных оболочек содержится в подпространстве U, заданном уравнением $x_1 + x_2 - 2x_4 = 0$, и дополните базис в W до базиса в U.

T.3. Пусть $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ – пространство квадратных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{R}$, а U, W, W_1 – его подпространства, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Доказать, что W и W_1 – различные прямые дополнения к U в V. Разложите матрицу A_{233} (см. **Б**) двумя способами, исходя из равенств $V = U \oplus W$, $V = U \oplus W_1$.

T.4. Пусть U, V, W – подпространства некоторого конечномерного векторного пространства.

a) Предположим, что $U \cap V = V \cap W = W \cap U = O$. Верно ли тогда что сумма $U + V + W$ подпространств U, V, W является прямой суммой?

b) Всегда ли верно равенство $\dim(U+V+W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)$?

Линейные отображения

III. Матрица линейного отображения. Ядро, образ

Б: 23.6(5), 23.9(2, 3), 23.14(2, 3), 23.15(1), 23.19(1), 23.24, 23.29(5), 23.30(1), 23.40(1в), 23.44(1), 23.62(3), 23.70(1).

T.5. Записать (в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$) матрицу линейного преобразования φ, заданного равенством $\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$.

T.6*. Пусть φ – линейное преобразование конечномерного пространства V.

a) Доказать, что $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi^2) = \operatorname{Ker}\varphi$.

b) Пусть известно, что $\varphi^2 = \varphi$. Доказать, что φ — это проектор на $\operatorname{Im}\varphi$ вдоль $\operatorname{Ker}\varphi$.

IV. Действия с линейными отображениями

Б: 23.82(1)*, 23.83(1), 23.71(1)*, 23.74(4)*.

V. Аффинные преобразования

Б: 12.28(1, 2*), 12.40(1), 12.53(8), 12.51.

Структура линейного преобразования

VI. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость

Б: 24.13, 24.18, 24.20(2, 3), 24.22(1, 2)*, 24.28(2)*, 24.29*, 24.30(7, 19, 30), 24.37(3)*, 24.42(1), 24.53, 24.55(1), 23.98(2)*, 24.26(1,4*).

К: 40.12(a)*.

T.7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем a) $\mathbb{F}_3$, b) $\mathbb{F}_5$, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

T.8*. Пусть V — n-мерное векторное пространство над бесконечным полем.

a) Предположим, что оператор $\varphi\colon V \to V$ диагонализируем. Тогда собственные значения φ различны тогда и только тогда, когда φ имеет циклический вектор, то есть такой вектор $v \in V$, что $v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v)$ порождают все пространство V.

b) Предположим, что степень минимального многочлена оператора φ равна n, тогда φ имеет циклический вектор.

T.9. Пусть A — матрица (в некотором базисе) поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α. Выразить α через элементы матрицы A.

VII. Инвариантные подпространства

Б: 24.70, 24.68(4), 24.71* (остается ли это утверждение верным в бесконечномерном случае?), 24.74(1, 2*), 24.77, 24.78*.

Т.10. Найти все инвариантные подпространства оператора, матрица которого в некотором базисе равна жордановой клетке.

Т.11*. Доказать, что ограничение диагонализируемого оператора на инвариантное подпространство диагонализируемо. Доказать аналогичное утверждение для фактороператора диагонализируемого оператора по инвариантному подпространству. Построить пример оператора, для которого ограничение на инвариантное подпространство и соответствующий фактороператор диагонализируемы, но сам оператор — нет.

VIII. Теорема Гамильтона–Кэли. Жорданова нормальная форма. Минимальный многочлен

Б: 24.126(5), 24.127(7, 15, 18) (также найти жорданов базис и минимальный многочлен матрицы), 24.141(1).

К: 41.8, 41.17*, 41.18 (над $\mathbb{C}$), 41.30*, 41.15*, 41.45*.

Т.12*. Дана квадратная матрица A порядка n и натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$. Докажите, что матрицы $A^{k_1}, A^{k_2}, \ldots, A^{k_{n+1}}$ линейно зависимы.

Т.13. Напишите возможные ЖНФ оператора φ, зная его характеристический $\chi_\varphi(t) = t^4(t-1)^3$ и минимальный $m_\varphi(t) = t^2(t-1)^2$ многочлены.

Т.14. Найти ЖНФ, жорданов базис, минимальный многочлен оператора трехкратного дифференцирования в пространстве вещественных многочленов степени не выше 9.

Т.15. a) Найдите общую формулу для последовательности, заданной условием $x_{n+1} = 4(x_n - x_{n-1})$ при $n \geq 2$.

b) Найдите явную формулу для последовательности, заданной условиями: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_{n+1} = 4(x_n - x_{n-1})$ при $n \geq 2$.

Т.16*. Пусть L — конечномерное пространство дифференцируемых функций комплексной переменной x, обладающее тем свойством, что если $f \in L$, то $\frac{df}{dx} \in L$. Доказать, что существуют такие комплексные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и целые числа $r_1, \ldots, r_s \geq 1$, что $L = \oplus L_i$, где L_i — пространство функций вида $e^{\lambda_i x} P_i(x)$, где $P_i(x)$ — произвольный многочлен степени $\leq r_i - 1$. (*Указание.* Рассмотреть жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ на L и последовательно вычислить вид входящих в него функций, начиная с нижней строки его диаграммы.)

$\boxed{75 + 31^*}$

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** I.
2 неделя	**:** II.
3 неделя	**:** III, IV.
4 неделя	**:** V, VI.
5-6 неделя	**:** VII, VIII.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10-15 мая)

Билинейные формы

I. Билинейные и квадратичные формы

Б: 32.1(4), <u>32.2(3)</u>, 32.7(2), 15.34, 32.8(9, <u>12</u>), 32.9(9, <u>12</u>), 9.4(2)* (определить только тип кривой), 32.13(3)*, 32.15, 32.18(4), 32.20(2)*, 32.21(1,2*).

К: 37.33(б), 38.24*.

Евклидовы пространства

II. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация

Б: <u>25.7</u>, 25.25(1), 25.21, 25.23, 25.10, 25.34*, 25.35(3), 25.9*.

К: 43.4(б, г)*.

T.1*. Докажите, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Б: 26.6, <u>26.13(4)</u>, 26.14(3), 26.15(2), <u>26.27(2)</u>, 26.28(1), 26.33*, 26.40*, 26.42(1, <u>6</u>), 26.51(1), 27.12(6), 27.28(4), 19.16.

T.2*. Доказать, что в n-мерном евклидовом пространстве квадратная матрица Γ порядка n является матрицей Грама некоторого базиса тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица S такая, что $\Gamma = S^T S$. Чему равен n-мерный объем параллелепипеда, построенного на векторах этого базиса?

III. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования

Б: 28.19(5), 30.7(2), 28.27, 28.28*, 29.5*, 29.7(1)*, 29.15, 29.19(1, 7, 11*), 29.37(1, 2*), 29.47(1), 25.50(1), 29.49, 29.50(2), 30.44(1), 29.53(2), 12.82(7).

К: 46.14*.

Т.3. Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5) а) самосопряженными; б) ортогональными?

Т.4. Описать самосопряженные проекторы.

Т.5*. Описать линейные операторы на вещественном векторном пространстве, которые самосопряжены относительно любого скалярного произведения.

Т.6*. Доказать, что два самосопряженных оператора в евклидовом пространстве коммутируют тогда и только тогда когда они имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

Т.7*. Найти группу изометрий двумерного вещественного пространства с квадратичной формой сигнатуры $(1, 1)$.

Т.8. Выяснить, может ли матрица A являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором (не обязательно ортонормированном) базисе, если

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2)\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad 3)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т.9*. Показать, что оператор двукратного дифференцирования $\mathbf{A} = \frac{d^2}{dx^2}$ является самосопряженным оператором в пространстве V тригонометрических многочленов

$$V = \{a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

с евклидовым скалярным произведением

$$(f,\, g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx.$$

Показать, что функции $1/\sqrt{2}$, $\cos x$, $\sin x$, $\ldots$, $\cos nx$, $\sin nx$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathbf{A}$; найти соответствующие собственные значения.

Т.10*. Преобразование φ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой

$$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,y) f(x)\, dx,$$

где $K : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является самосопряженным?

IV. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

Б: 32.27(3, <u>13</u>), 9.4(2) (составить каноническое уравнение кривой), 32.30*, 32.33(1), 32.39(1), 32.36(3, <u>4</u>), 32.37*, 32.45(4)*.

Сопряженное пространство

V. Линейные функции

Б: <u>31.21</u>, 31.30, 31.31(2), <u>31.35(1)</u>, 31.50*.
К: 36.13*, 36.14.

Т.11. Доказать, что любая линейная функция f на пространстве матриц $\mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ имеет вид $f(X) = \mathrm{tr}\,(AX)$, где $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, причем матрица $A = A_f$ функцией f определяется однозначно.

Т.12. Найти двойственный базис в пространстве $V = \mathbb{R}[x]_2$ вещественных многочленов степени не выше 2 для базиса $\{l_1, l_2, l_3\}$ в V^*, где $l_1(f) = f(0)$, $l_2(f) = f'(0)$, $l_3(f) = f(1)$.

Т.13*. Пусть V — линейное пространство размерности n, а $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор. Доказать, что все $(n-1)$-мерные φ-инвариантные подпространства в V имеют вид $\mathrm{Ker}\, f$ для некоторого собственного вектора f сопряженного оператора φ^*. Обратно, доказать, что любое подпространство вида $\mathrm{Ker}\, f$, где f — некоторый собственный вектор оператора φ^*, инвариантно относительно φ.

Т.14*. Используя предыдущую задачу, найти все $(n-1)$-мерные инвариантные подпространства для вещественного линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тензоры

VI. Операции с тензорами

Б: 35.3(1, 5, 6), 35.4(2, 5, 6), 35.8(1), 35.12(2), 35.14, 35.15, 36.25(2), 36.35(4, 5, 13), 36.36(1).

Т.15. Покажите, что сопоставление каждому базису евклидова пространства матрицы, обратной матрице Грама этого базиса, определяет некоторый тензор типа $(2, 0)$.

Т.16*. Пусть $[\cdot\,,\cdot]\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ – векторное произведение в ориентированном трехмерном пространстве, $\{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ – произвольный базис в $\mathbb{R}^3$. Доказать, что набор коэффициентов a_{ij}^k, определенных равенствами $[e_i,\, e_j] = a_{ij}^k e_k$, образует тензор. Опустив верхний индекс, получите тензор типа (0, 3). Какой трилинейной форме он соответствует? Найдите его тензорные координаты в ортонормированном и произвольном базисе (ответ: $\psi_{ijk} = \mathrm{or}(e)\sqrt{\det G(e)}\varepsilon_{ijk}$, где $\mathrm{or}(e)$ — число, определяемое базисом e и равное 1, если он правый и -1 в противном случае).

Т.17*. Пусть $u,\, v \in V$ — векторы, а $\xi,\, \eta \in V^*$ — ковекторы. Пусть полилинейная функция T определена равенством

$$T(u,\, v,\, \xi,\, \eta) = \det \begin{pmatrix} \xi(u) & \eta(u) \\ \xi(v) & \eta(v) \end{pmatrix}.$$

a) Найти разложение тензора T по базису $\{e^i \otimes e^j \otimes e_k \otimes e_l\}$ в пространстве тензоров $T_2^2(V)$.

b) Пусть $\dim V = n$. Найти полную свертку тензора T.

Т.18. Пусть (e_1, e_2, e_3) — базис в $V = \mathbb{R}^3$, а (e^1, e^2, e^3) — биортогональный базис в V^*. Для тензора $a = (3e^1 + e^2) \otimes (e^2 - 2e^3) \otimes e^2$ найти компоненты a_{122} и a'_{122} в базисах e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3, где $e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = -e_2 + e_3$.

Т.19*. Пусть (e_1, e_2, e_3) — базис в пространстве V, (e^1, e^2, e^3) — биортогональный базис в V^*. Найти значение формы

$$\omega = (e^1 - 2e^2 + 5e^3) \wedge (4e^2 - 2e^3) \wedge (e^3 - 7e^2)$$

на векторах v_1, v_2, v_3, имеющих в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ координатные столбцы $(1, -2, 4)^T$, $(0, 1, 3)^T$, $(-1, 2, 1)^T$ соответственно.

$\boxed{77 + 36^*}$

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**:** I.
2 неделя	**:** II.
3-4 неделя	**:** III, IV.
5 неделя	**:** V.
6 неделя	**:** VI.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к.ф.-м.н., доцент П. А. Кожевников,

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа физики и исследований имени Ландау (ЛФИ)

для студентов 1 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л.2,5. Тираж 190 экз. Заказ № 02.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок