

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ)

**для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ). – Москва : МФТИ, 2021. – 56 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Общая физика: оптика
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: для всех физтех-школ
кафедра: общей физики
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;

физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 4 семестр

Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:

теор. курс – 90 часов

физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. К. М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. Л. М. Колдунов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.т.н., доц. В. А. Овчинкин
к.ф.-м.н., доц. Ю. Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

ОПТИКА

1. Геометрическая оптика. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Полное внутреннее отражение. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических aberrациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения.

Современные применения геометрической оптики в пределах коротких длин волн: рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением.

2. Волновая оптика. Волновое уравнение, монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны, показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет. Степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера.

Нерелятивистский эффект Доплера, поиск экзопланет.

3. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Показатель преломления плазмы. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Групповая скорость. Распространение волнового пакета в неоднородной среде. Различные диапазоны длин волн, их особенности. Метаматериалы.

4. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Просветление оптики. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность, функция временной когерентности, связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера–Хинчина) и с видностью. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределенностей.

5. Интерференция при использовании протяженных источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности, функция пространственной когерентности, связь с распределением интенсивности излучения по источнику (теорема Ван Циттерта–Цернике). Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

6. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля.

Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов, теорема Бабинэ. Дифракция на краю, спираль Корню.

7. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

8. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких пленках и многослойных структурах, зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

9. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённости. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

10. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга–Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

11. Кристаллооптика. Дихроизм, поляроиды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векторов k , E , D , B , направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии. Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц, Рэлееское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Наведенное двулучепреломление. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм. Оптическое выпрямление. Симметрия среды и генерация второй гармоники. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка.

Понятие о комбинационном рассеянии света и вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна.

14. Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. Т. IV. – Москва : Физматлит, 2018.
2. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I, ч. III, гл. 6–11. – Москва : Физматгиз, 2001.
3. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016.
4. *Бутиков Е.И.* Оптика. – Москва : Высшая школа, 1986.
5. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : Издательство МГУ, Наука, 2004.

Дополнительная

1. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959, 2007.
2. *Ландсберг Г.С.* Оптика. – Москва : Физматлит, 2003.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Москва : Наука, 1973.
4. *Козел С.М., Листвин В.И., Локишин Г.Р.* Введение в когерентную оптику и голографию. – Москва : МФТИ, 2000.
5. *Кольер Р.* Оптическая голография. – Москва : Мир, 1973.
6. *Крымский К.М.* Аберрации центрированных оптических систем – теория и расчёт. — Москва : МФТИ, 2015.
7. *Петухов В.А.* Оптические волокна : учебно-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 2-го курса
на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ сем	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
01.02–06.02	1	Принцип Ферма. Геометрическая оптика и элементы фотометрии. Оптические инструменты.	1.4 θ_1 θ_2	1.29 1.22 1.9 1.56	1.15 T1 T2 1.57
08.02–13.02	2	Законы отражения, формулы Френеля. Поляризация. Поток энергии и давление света.	θ_1 11.7 2.3	2.5+2.23 2.26 2.29 2.42	2.1 2.20 2.27 2.45
15.02–22.02	3	Дисперсия. Фазовая и групповая скорости.	10.2 10.5 ^(2,3,5) θ_1	10.8 10.43 10.75 10.77	10.21 10.24 10.35 T3
01.03–06.03	4	Интерференция монохроматических волн.	3.3 θ_1 θ_2	3.5 3.10 3.18 T4	3.16 3.11 3.20 3.35
08.03–13.03	5	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	θ_1 4.2 5.3 θ_2	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 5.13 5.23 5.30
15.03–20.03	6	Дифракция Френеля. Зонные пластинки.	θ_1 θ_2 6.1	6.15 6.20 6.59 6.43	6.16 6.31 6.50 6.64
22.03–27.03	7	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов.	7.5 θ_1 θ_2	7.16 7.48 7.54 7.83	7.10 7.53 7.59 7.33
29.03–04.04	8	Спектральные приборы.	8.2 θ_1 θ_2	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 T5 T6

05.04– 10.04	9	Контрольная работа (по группам)			
12.04– 17.04	10	Сдача 1-го задания			
19.04– 24.04	11	Дифракция на синусои- дальных решётках. Эле- менты фурье-оптики.	φ_1 φ_2 φ_3	9.1 9.15 9.22 9.26	9.11 9.17 9.28 9.79
26.04– 01.05	12	Голография.	φ_1 φ_2 φ_3	9.32 9.35 9.45 9.52	9.33 9.36 9.40 9.78
27.04– 02.05	13	Поляризация света. Элементы кристаллооп- тики.	11.17 11.1 11.12	11.9 11.16 11.54 11.28	11.13 11.60 11.80 11.121
03.05– 08.05	14	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики.	φ_1 φ_2 φ_3	11.125 11.89 11.126 Т8	11.88 11.90 11.128 Т7
10.05– 15.05	15	Сдача 2-го задания.			
17.05– 22.05	16	Зачёт.			

Примечание

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина (4-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2017». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

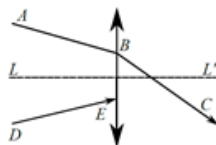
- 0** — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;
- I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи группы 0

Семинар 1

⁰1. На рис. показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC . Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.



⁰2. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 2

⁰1. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n , через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0 .

Семинар 3

⁰1. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10 \text{ МГц}$ ($\lambda > 30 \text{ м}$).

Семинар 4

⁰1. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0,01 \text{ рад}$. Длина волны $\lambda = 500 \text{ нм}$, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рис.).



Ответ: 25 мкм .

⁰2. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{\text{мин}}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

⁰1. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник

света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей $\Delta_{\max}$ и максимальное число интерференционных полос $m_{\max}$, которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

02. Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n , если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

01. Щель ширины $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

02. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ . Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

01. Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

02. Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ — длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0,05$.

Семинар 8

01. На дифракционную решётку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

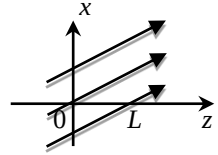
Ответ: $\delta\varphi \approx 1,2 \cdot 10^{-4}$ рад.

02. Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11

⁰1. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости xz под углом α к оси z . Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости $z = 0$. Найти разность фаз между колебаниями в точках $z = 0$ и $z = L$, лежащих на оси z (см. рис.).



⁰2. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A . Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

⁰3. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b .

Семинар 12

⁰1. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

⁰2. Гол로그램 точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластины, записали по схеме Габора на длине волны λ . Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ ?

⁰3. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

⁰1. Пользуясь формулой Рэлея, оцените коэффициент пропускания света слоем воздуха толщиной 8 км в атмосфере вблизи поверхности Земли, для двух длин волн: $\lambda = 400$ нм (фиолетовый свет) и 650 нм (красный свет). Показатель преломления воздуха принять равным $n - 1 = 2,9 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $T_{400} \approx 0,7$, $T_{700} \approx 0,95$.

⁰2. Лазерный пучок проходит сквозь слабопоглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

⁰3. Молекулы некоторой жидкости имеют разную поляризуемость по разным осям. Как будут ориентироваться молекулы в поле световой волны: максимальной поляризуемостью по направлению $\vec{E}$ или перпендикулярно $\vec{E}$? Ответ обосновать.

Текстовые задачи

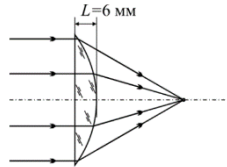
Т1. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для $L_d = 0,5$ м.

б) У некоторого дальнорядного человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» $L_0 = 25$ см. Провести расчет для $L_b = 1$ м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

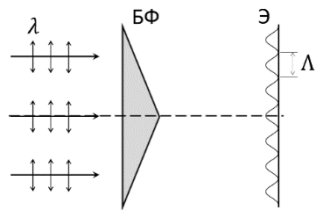
Т2. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера, гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т3. (2019) Параллельный пучок излучения длительно-стью 100 фс и средней длиной волны $\lambda = 500$ нм фокусируется положительной линзой толщиной $L = 6$ мм в центре и близкой к нулю на краях. Пучок заполняет всю линзу. Показатель преломления материала линзы $n = 1,7$, групповая скорость в стекле $v_{гр} = 0,55c$. Оценить длительность импульса в фокусе линзы.



Ответ: $\tau \approx 2,4$ пс.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля БФ плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ . Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ . Определите видность V интерференционной картины.



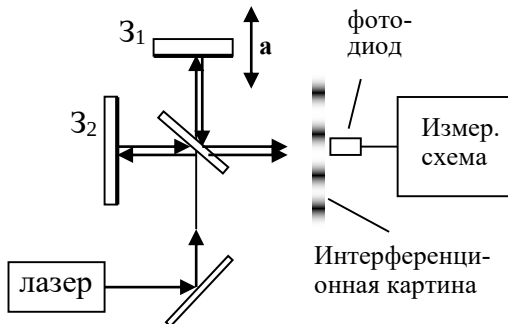
Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\Lambda} \right)^2$.

Т5. Спектральная линия H_α атомарного водорода ($\lambda = 6563$ Å) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda \approx 0,16$ Å. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности $\rho = 0,9$, чтобы с его

помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

Ответ: $L = 0,4$ мм, $\Delta\lambda = 5$ Å, $\theta_1 = 2,3^\circ$, $D = 4 \cdot 10^{-3}$ Å⁻¹.

Т6. Современные фотодиоды обеспечивают огромный диапазон линейности, до 11 порядков по интенсивности света, то есть в этом диапазоне фототок линейно зависит от интенсивности света, падающего на фотодиод. Это позволяет измерять очень малые интенсивности модулированных по амплитуде световых сигналов на фоне гораздо более мощной постоянной засветки.



Излучение хорошо стабилизированного непрерывного лазера с длиной волны 0,6 мкм пропускается через интерферометр Майкельсона, в котором одно из зеркал Z_1 может колебаться с малой амплитудой a . Зеркало Z_2 чуть-чуть наклонено, так что в плоскости фотоприемника получают достаточно широкие (больше размера фотоприемника) интерференционные полосы. Смещение зеркала Z_1 приводит к смещению интерференционных полос. Оцените минимальное значение $a_{\min}$ амплитуды колебаний, которое можно измерить данной схемой, если измерительное устройство позволяет обнаружить периодические колебания фототока, составляющие величину 10^{-10} от величины тока в максимуме интерференционной картины. В каком месте интерференционной картины (в максимуме, минимуме интенсивности или в другом месте) следует располагать фотодиод для получения максимальной чувствительности?

Ответ: $a_{\min} \approx 10^{-16}$ см.

Т7. Кристалл ниобата лития обладает сильной нелинейностью и довольно часто используется для генерации второй гармоники. Показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны этого кристалла сильно зависят от температуры. Для необыкновенной волны $\frac{dn_e}{dT} = 5,4 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$, а для обыкновенной $\frac{dn_o}{dT} = 37,9 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$. Оцените, насколько надо изменить температуру кристалла, чтобы интенсивность генерации второй гармоники стала равной нулю. Считайте, что до изменения

температуры было достигнуто условие фазового синхронизма, длина волны накачки равна $\lambda = 1$ мкм, а длина кристалла $l = 1$ см.

Ответ: $\delta T \approx 1.54^\circ\text{C}$.

Т8. Найти пропускание атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного ($\lambda = 700$ нм) и фиолетового ($\lambda = 400$ нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака,), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен $n_0 = 1,0003$.

Ответ: для $\lambda = 400$ нм $I_{\text{кон}}/I_0 = 5,3 \cdot 10^{-6}$, для $\lambda = 700$ нм $I_{\text{кон}}/I_0 = 0,27$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Гармонический анализ
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: ЛФИ, ФАКТ, ФБМФ, ФРКТ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 3 зач. ед.;

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор О. В. Бесов

д. ф.-м. н., профессор, С. А. Гриценко

д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович

д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев

к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. *Для потока О. В. Бесова: оценка скорости стремления к нулю остатка тригонометрического ряда Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.*
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах. *Для потока В. Ж. Сакбаева: пополнение метрического пространства; пополнение линейного нормированного пространства; теорема о пополнении.*
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированными ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и свойства его образа: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' . Сходимость в пространстве обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Дифференцирование обобщенных функций.

Литература

Основная

1. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу Ч. 2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(5); 11; 14; 30; 42; 45 В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23*; 65; 67; 68; 72; 110; 111(4;3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x$, $x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания

а) x^{10} ; б) x^5 ; в) $(x^2 - \pi^2)^{10}$; г) $(\pi^2 - x^2) \sin^2 x$.

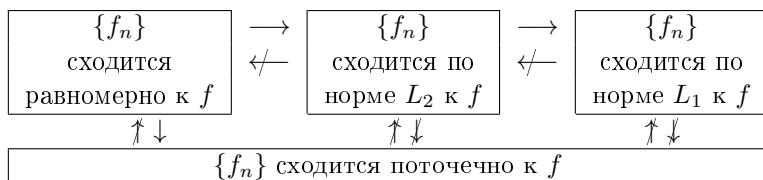
С.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы

рядов: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

С.2. §16: 47*(2); 48(1; 3).

II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если f – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):



С.3. §18: 97; 98*.

4. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

С.3. §19: 116; 126*.

5. Полна ли система функций $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$ в пространстве: а) $C([1; 2])$; б) в пространстве $C([0; 1])$?

6. Полна ли система $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве:

- а) $C[0; \pi/2]$; б) $C[0; 2]$?

30 + 4*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(5); 14(2); 17; 18*(2).

§15: 1(3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1) — исследовать также при $\alpha \in (1; +\infty)$.

1(2) — исследовать также при $\alpha \in (0; 1)$

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3, 5, 6); 8(2).

1. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §15: 1(4); 2(4); 3(2); 5(2); 6(1, 4, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 7(4); 9(3); 12(9); 10*(3).

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 254.

С.3. §17: 1(3); 2(4); 5(2); 6(1); 7(4); 8(1,5); 14(1,3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58*; 60.

2. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$; б) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi \delta(x)$.

С.3. §21: 71; 75*; 77*; 84.

3. Найдите в D'

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

4. Упростите в D' выражения:

а) $(e^{\sin x} + x \cos x) \delta(x)$; б) $\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x \right) \delta'(x)$; в) $e^{x^2} \delta''(x)$.

45 + 6*

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Гармонический анализ
по направлению подготовки: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: ФРКТ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;

лекции — 30 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 54 часа

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор О. В. Бесов

д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко

д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович

д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев

к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. *Для потока О. В. Бесова: оценка скорости стремления к нулю остатка тригонометрического ряда Фурье. Ряд Фурье в комплексной форме.*
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах. *Для потока В. Ж. Сакбаева: пополнение метрического пространства; пополнение линейного нормированного пространства; теорема о пополнении.*
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированными ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и свойства его образа: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' . Сходимость в пространстве обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Дифференцирование обобщенных функций.

Литература

Основная

1. Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. Иванов Г. Е. Лекции по математическому анализу Ч. 2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. Яковлев Г. Н. Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(5); 11; 14; 30; 42; 45 В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23*; 65; 67; 68; 72; 110; 111(4;3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x$, $x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания

а) x^{10} ; б) x^5 ; в) $(x^2 - \pi^2)^{10}$; г) $(\pi^2 - x^2) \sin^2 x$.

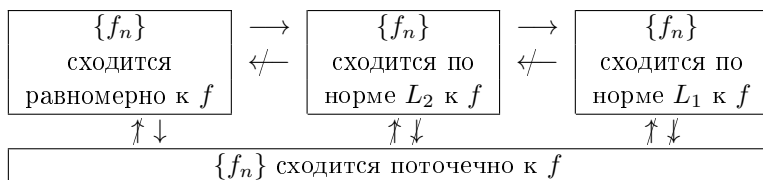
С.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы

рядов: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$.

С.2. §16: 47*(2); 48(1; 3).

II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если f – функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):



С.3. §18: 97; 98*.

4. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a, b]$, $CL_1[a, b]$, $CL_2[a, b]$.

С.3. §19: 116; 126*.

5. Полна ли система функций $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$ в пространстве: а) $C([1; 2])$; б) в пространстве $C([0; 1])$?

6. Полна ли система $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве:

- а) $C[0; \pi/2]$; б) $C[0; 2]$?

30 + 4*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(5); 14(2); 17; 18*(2).

§15: 1(3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1) — исследовать также при $\alpha \in (1; +\infty)$.

1(2) — исследовать также при $\alpha \in (0; 1)$

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3, 5, 6); 8(2).

1. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §15: 1(4); 2(4); 3(2); 5(2); 6(1, 4, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 7(4); 9(3); 12(9); 10*(3).

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 254.

С.3. §17: 1(3); 2(4); 5(2); 6(1); 7(4); 8(1,5); 14(1,3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58*; 60.

2. Докажите, что в D' справедливы равенства:

а) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a}{a^2 + x^2} = \pi \delta(x)$; б) $\lim_{a \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{a} = \pi \delta(x)$.

С.3. §21: 71; 75*; 77*; 84.

3. Найдите в D'

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \frac{x\xi}{(x^2 + \xi^2)^2}.$$

4. Упростите в D' выражения:

а) $(e^{\sin x} + x \cos x) \delta(x)$; б) $\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x \right) \delta'(x)$; в) $e^{x^2} \delta''(x)$.

45 + 6*

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Дифференциальные уравнения
по направлению: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: для всех физтех-школ
кафедра: высшей математики
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыrkова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами (без доказательства).
Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
3. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).
4. **Задача Коши.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n -го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров

и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Особое решение.

5. Автономные системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n -го порядка. Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, <http://bookfi.org/book/791964>.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.

4. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. Умнов А. Е., Умнов Е. А. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, <http://www.umnov.ru>.

Дополнительная

7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, <http://techlibrary.ru/bookpage.htm>.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. Купцов Л. П., Николаев В. С. Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. Ипатова В. М., Пыrkova О. А., Седов В. Н. Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Задача Коши

С. §5: 26; 28а.

С. §6: 36; 49.

Ф.: 1065; 1066; 1067*.

1. Доказать, что при $\alpha > 0$ любое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Рассмотреть уравнение $y'^2 - (y + 1)y' + y = 0$. Показать, что прямая $y = 1$ является дискриминантным множеством для этого уравнения, но не является решением. Показать, что через каждую точку прямой $y = 1$ проходят две интегральные кривые уравнения, имеющие общую касательную. Решить краевую задачу:
 $y'^2 - (y + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = e$. Изобразить график полученного решения.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 649; 664; 667; 668*; 673; 678.

Ф. §22: 47*; 59.

С. §9: 10; 31; 53; 64; 68(a).

3. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: 723; 725*; 726.

С. §10: 2; 3; 6.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - 2xy' + y = 0$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ имеет не более трех нулей.
5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

- б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \rightarrow +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 964; 972*; 973; 974; 975; 978*.

С. §13: 9; 15; 39; 44; 45.

35+7*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 12.

Ф.: 1149.

1. Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

С. §16: 5; 26.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 5; 16; 22; 79; 83.

2. В области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 21; 45; 72; 105.

3. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7 \frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12 \frac{y}{x} \right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

С. §20.1: 9; 12.

4. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 (2y + yy' + x(y')) dx, \quad y(1) = 1.$$

С. §20.2: 5.

С. §20.3: 2.

С. §21: 1.

- 5*. Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

23+1*

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Дифференциальные уравнения
по направлению: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
подготовки: ФРКТ
физтех-школа: высшей математики
кафедра: 2
курс: 4
семестр:

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть — 3 зачет. ед.:

лекции — 30 часов

Экзамен — 4 семестр

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:

теор. курс — 18 часов

Программу и задание составили:

д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев

д. т. н., профессор А. Е. Умнов

д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский

к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская

к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов

к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n -го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами (без доказательства).
Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
3. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).
4. **Задача Коши.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n -го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров

и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Особое решение.

5. Автономные системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n -го порядка в нормальном виде.

Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n -го порядка. Теорема Штурма и следствия из нее.

Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, <http://bookfi.org/book/791964>.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.

4. Романко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. Умнов А. Е., Умнов Е. А. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, <http://www.umnov.ru>.

Дополнительная

7. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, <http://techlibrary.ru/bookpage.htm>.
8. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. Купцов Л. П., Николаев В. С. Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. Ипатова В. М., Пыrkova О. А., Седов В. Н. Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Задача Коши

С. §5: 26; 28а.

С. §6: 36; 49.

Ф.: 1065; 1066; 1067*.

1. Доказать, что при $\alpha > 0$ любое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Рассмотреть уравнение $y'^2 - (y + 1)y' + y = 0$. Показать, что прямая $y = 1$ является дискриминантным множеством для этого уравнения, но не является решением. Показать, что через каждую точку прямой $y = 1$ проходят две интегральные кривые уравнения, имеющие общую касательную. Решить краевую задачу:
 $y'^2 - (y + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = e$. Изобразить график полученного решения.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 649; 664; 667; 668*; 673; 678.

Ф. §22: 47*; 59.

С. §9: 10; 31; 53; 64; 68(a).

3. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: 723; 725*; 726.

С. §10: 2; 3; 6.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - 2xy' + y = 0$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ имеет не более трех нулей.
5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

- б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \rightarrow +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: 964; 972*; 973; 974; 975; 978*.

С. §13: 9; 15; 39; 44; 45.

35+7*

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 12.

Ф.: 1149.

1. Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

С. §16: 5; 26.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 5; 16; 22; 79; 83.

2. В области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 21; 45; 72; 105.

3. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7 \frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12 \frac{y}{x} \right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

С. §20.1: 9; 12.

4. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int_1^2 (2y + yy' + x(y')) dx, \quad y(1) = 1.$$

С. §20.2: 5.

С. §20.3: 2.

С. §21: 1.

- 5*. Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

23+1*

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Аналитическая механика

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФРКТ

кафедра: теоретической механики

курс: 2

семестр: 4

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.

лекции – 30 часов

Экзамен – 4 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задания составили:

к.ф.-м.н., доцент А. В. Фомичев

к.ф.-м.н., доцент И. Ю. Полехин

Программа принята на заседании

кафедры теоретической механики

30 ноября 2020 года

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н.

С. В. Соколов

1. Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия

Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений) и доказательство для стационарной системы. Условия равновесия голономных стационарных систем (в терминах обобщенных сил).

Определение устойчивости по Ляпунову, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия и траектории. Общие теоремы об устойчивости линейных систем. Устойчивость систем с постоянной матрицей. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства). Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению.

Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости, неустойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

Понятие о бифуркации. Случай потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней. Случай нулевого корня в уравнении частот.

Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явления резонанса и антирезонанса (динамическое гашение колебаний). Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты

Преобразование Лежандра. Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Вывод канонических уравнений Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону в задаче с подвижными концами. Вариационный принцип Гамильтона.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Основные понятия теории групп Ли: ядро, оператор и инвариант группы. Теорема Нётер.

Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема системы с нулевой дивергенцией. Сохранение фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуачжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби

Определение канонических преобразований. Критерий каноничности в терминах производящих функций. Виды производящих функций: (q, p) , $(q, \tilde{q})$, $(q, \tilde{p})$ и $(p, \tilde{p})$ -описания. Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовые потоки гамильтоновых систем как однопараметрические семейства канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.
3. Маркеев А.П. Теоретическая механика: учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
4. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела: учеб. пособие. — 2-е изд. — Москва : МФТИ, 2010.
5. Амелькин Н.И. Лагранжева и гамильтонова механика: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2014.
6. Яковенко Г.Н. Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
7. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2004.
8. Трухан Н.М. Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 22 по 27 марта 2021 г.)

Контрольная работа с 15 по 20 марта 2021 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
14.10, 14.23, 14.36, 14.42
2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
17.25
Т1. Используя прямой метод Ляпунова, покажите, что нулевое положение равновесия системы асимптотически устойчиво

$$\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y),$$

где $f_i(z)$ — произвольные гладкие функции такие, что $\operatorname{sgn}(f_i(z)) = \operatorname{sgn}(z)$.

Указание. Функция Ляпунова $V(x, y) = \int_0^x f_3(z) dz + \int_0^y f_2(z) dz$.

Т2. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = 2y^3 - x^5, \quad \dot{y} = -x - y^3 + y^5.$$

Т3. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = xy - x^3 + y^3, \quad \dot{y} = x^2 - y^3.$$

Т4. Исследуйте на устойчивость систему ($\alpha, \beta > 0$)

$$\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2), \quad \dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2).$$

3. Устойчивость равновесия консервативных систем

15.15, 15.18, 15.21, 15.23

4. Малые колебания консервативных систем

16.1, 16.11, 16.33, 16.47, 16.64, 16.107

5. Асимптотическая устойчивость диссипативных систем

17.2, 17.8, 17.11 (а), 17.20, 17.28

6. Вынужденные колебания

18.3, 18.17, 18.31, 18.37, 18.62

Указание. При решении задачи 18.39 используйте нормальные координаты. Отдельно рассмотрите случай $\omega^4 - 3k^2\omega^2 + k^4 = 0$.

Второе задание

(срок сдачи с 10 по 15 мая 2021 г.)

Контрольная работа с 3 по 8 мая 2021 г.

7. Функция Гамильтона и канонические уравнения

19.1, 19.9, 19.15, 19.19, 19.35, 19.77

8. Первые интегралы. Скобки Пуассона

20.1, 20.15, 20.16, 20.30

9. Принцип Гамильтона

21.2, 21.4, 21.12, 21.14, 21.33

10. **Интегральные инварианты**
22.5, 22.15, 22.24, 22.32
11. **Канонические преобразования**
23.1, 23.2, 23.48, 23.116
12. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
24.1, 24.22, 24.60, 24.63, 24.109

Т5. На плоскости рассматриваются два одинаковых неподвижных гравитационных центра, которые действуют на массивную точку M , которая может двигаться без трения по рассматриваемой плоскости. Составьте и решите уравнение Гамильтона–Якоби для этой системы.

Указание. Воспользуйтесь эллиптическими координатами: $\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$, r_i — расстояние от точки M до i -го притягивающего центра.

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1996; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2002.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Компьютерные технологии**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:

вариативная часть – 4 зач. ед.

лекции – 30 часов

практические (семинарские)

занятия – нет

лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – нет

Диф. зачет – 4 семестр

Курсовая работа – 4

Самостоятельная работа – 90 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Программу составил старший преподаватель Д. В. Лунев

Программа принята на заседании
кафедры информатики и вычислительной математики
23 июня 2020 г.

Заведующий кафедрой,
доцент, к.ф.-м.н.

Н. И. Хохлов

1. Процесс написания программ. Оформление текстов, требования к текстам и комментариям. Сопровождение программ. Документация на ПО, *SDP (software development plan* – план разработки ПО).
2. Базовые основы элементарной техники программирования. Технические основы программной реализации формальных структур данных, итераторы. Списки, очереди, стеки, наборы, упорядоченные наборы, массивы, деревья, хранение графов, *hash*-таблицы; примеры использования структур данных, как выбрать структуру, соответствующую задаче. Применение *hash*-таблиц.
3. Безопасность ПО. Написание программ без «дырок». Техника кодирования защищенных программ и типичные ошибки. Переполнение буфера, определение уровня доступа, работа с минимально возможными привилегиями, криптография и ее корректное применение, предохранение секретных данных, работа с входными данными, проблемы разных путей доступа к одним и тем же данным, запросов к базам данных и веб-страницам, а также проблемы поддержки интернационального ПО. Моделирование угроз. Классификация опасностей *STRIDE* – *Spoofing* (подмена данных), *Tampering* (подделка и изменение содержания данных), *Repudiation* (незаконный отказ от проведенной операции), *Information disclosure* (разглашение информации), *Denial of service* (отказ в обслуживании), *Elevation of privilege* (незаконное поднятие привилегий). Методика оценки риска *DREAD* – *Damage potential* (что может быть сломано), *Reproducibility* (повторяемость), *Exploitability* (пригодность угрозы для использования), *Affected users* (на каких пользователей повлияет), *Discoverability* (возможно ли детектировать факт использования).
4. Эволюция современного аппаратного обеспечения и ее влияние на программное обеспечение. Гипертредовые (многопоточные) и многоядерные процессоры, универсальные графические (*GPU*) процессоры и новые возможности по их использованию.
5. Параллельное программирование. Параллельные программы – от работы с разделяемой памятью, использования массивно-параллельных компьютеров и до распределенных расчетов на многих физических компьютерах. Декомпозиция задач на параллельные куски. Параллелизм данных, параллелизм кода. Паттерны параллельного программирования: параллелизм на уровне задач – декомпозиция задачи, «разделяй и властвуй» – декомпозиция задач и данных, геометрическая декомпозиция – декомпозиция данных, конвейерное исполнение – декомпозиция потока данных, «фронт волны» – декомпозиция данных с «многомерными» зависимостями. Пример типового шаблона программирования – пул нитей.
6. Работа с разделяемой памятью. Синхронизационные примитивы (низкоуровневые атомарные команды, критические секции, взаимоисключающая блокировка – *mutex*, рекурсивная блокировка – *lock*, блокировка

чтения-записи – *read/writelock*, многопроцессорная блокировка – *spinlock*, семафоры, барьеры). Реализация одних примитивов через другие, относительная «мощность» примитивов. Задача о консенсусе как способ оценки примитивов.

7. Техническая специфика параллельных программ – производительность, условия «гонки» – *racecondition*, взаимная блокировка – *deadlock*, повторно-входимые программы, потоко-безопасные (*thread-safe*) библиотеки. Неблокирующие примитивы синхронизации, транзакционная память. Организация высоко-производительных параллельных вычислений.

8. Проблемы, специфические для параллельного исполнения многонитевых программ – синхронизация (между несколькими нитями), коммуникация (проблемы полосы пропускания и задержек, связанных с обменом данными между нитями), балансировка нагрузки (между нитями), масштабируемость (эффективность использования многих нитей). Написание высокопроизводительных программ, оценка условий и выбор способов реализации.

9. Принципы и философия ООП в языках, программных системах и операционных системах. Инкапсуляция, полиморфизм и наследование/агрегирование. Динамический и статический подход в описании классов.

10. Краткий обзор ООП реализации в языках C++. Интерфейсы, полиморфизм и перегрузка операторов в C++. Параметризованные классы. Дружественные функции. Потоки ввода-вывода в C++. Наследование как один из вариантов комбинирования объектов.

11. Адресное пространство приложения: куча, стек и статические объекты. Динамическая инициализация и клонирование объектов. Хранение объектов в адресном пространстве. Виртуальные функции. Наследование абстрактных классов в C++, чисто виртуальные функции.

12. Динамическая идентификация и приведение типов (*RTTI*). Обработка исключительных ситуаций. Разные способы «универсализации» алгоритмов – от абстрактных типов данных «*ADT*» до стандартной библиотеки шаблонов (*Standard Template Library*) языка программирования C++ (*STL*).

13. Краткий сравнительный обзор ООП реализации в языках C++ и *ObjectiveC*, позднее и раннее связывание. Техническая организация ООП поддержки языков программирования для позднего связывания.

14. *Event-driven* и *message-driven* программирование на примере *XWindows Widgets*, *Mac OS X Interface Builder* и подсистемы *GDI MS Windows*. Принципы агрегирования *COM*-объектов. Принципы поддержки ООП в операционных системах и языках, общее и различное. Реализация исключений в языке C++ и в *OC Windows*.

Задания

2 задания на семестр и курсовая работа. Задачи для первых двух заданий указаны ниже.

Каждый студент должен сделать по одной задаче из каждого задания.

Тема курсовой работы дается по усмотрению преподавателя (с учетом пожеланий студентов, которые могут предлагать свои темы), результат реализации должен включать взаимодействие с пользователем (пользовательский интерфейс в виде меню, желательно графического, хотя возможны и текстовые версии при условии использования ООП библиотек). Курсовая работа может выполняться коллективно (2–3 чел.), должна включать параллельное исполнение компонент (например, включать нити или несколько взаимодействующих процессов) и использовать примитивы синхронизации (обязательно). Размер курсовой – не менее 600 строк на C# или C++, написанных одним человеком. Также должны использоваться коллекции данных по выбору автора (АТД – *ATL*, *STL* и т.д.).

Тема работы утверждается не позже, чем в феврале.

Требования к оформлению

Текст программы должен быть оформлен профессиональным образом. Отдельно должен быть предоставлен файл (файлы) с текстом решения задачи, тестом на нее (если нужен) и вставляемые файлы заголовков. То есть решение задачи состоит из не менее чем двух файлов (*.h*, *.CPP*), чаще три (включая тест). Запрещается вставка одного *C/CPP* файла в другой, поощряется использование make-файла или проектов (но не обязательно).

Комментарии в тексте программы: обязаны присутствовать в файлах в начале, должны быть отдельно написаны к каждой функции и в коде по тексту (в среднем каждая третья строка должна содержать комментарий); текст должен выглядеть красиво (отступы и т.д. должны быть оформлены нормально, не должно использоваться более 132 символов в строке), программа не должна иметь неиспользуемых или ненужных кусков (закомментированных). Примером оформления являются *samples*, приложенные к соответствующим дистрибутивам компиляторов (примеры *SDKWindows*, *Linuxkernel**sources* и т.д.).

Обязательно:

Необходимо проверять все параметры функций, используя *assert()* или аналоги. Необходимо проверять все коды возврата функций (особенно *malloc* и системных вызовов).

Желательно:

составление для курсовой работы *SoftwareDevelopmentPlan(SDP)* – по усмотрению преподавателя.

Задание 1

(срок сдачи 9–14 марта)

Основная цель – правильное оформление текста задачи, проверка всех требуемых параметров и т.д. Реализовать только на языке C (не C++/C#). Реализовать одну из структур данных, итератор по ней и тест (три файла: алгоритм, файл заголовков, тест). Тест должен демонстрировать работоспособность структуры. Помните, что требуемых структур может быть много (более одного экземпляра!):

- 1) односвязный список;
- 2) двусвязный список;
- 3) очередь;
- 4) очередь с приоритетами;
- 5) стек;
- 6) набор (*set*);
- 7) упорядоченный набор с введением функции отношения;
- 8) массив произвольного размера;
- 9) массив упорядоченный;
- 10) бинарное дерево;
- 11) сбалансированное дерево;
- 12) хэш-таблица с открытой адресацией (хэшировать текстовые строки произвольной длины);
- 13) хэш-таблица с цепочками (алгоритм из книги Д. Кнута «Искусство программирования. Сортировка и поиск», хэшировать бинарные данные произвольной длины типа *BLOB* – *BinaryLargeObject*);
- 14) битовый массив (то есть значения принимаются битами, а адресация – по номеру бита);
- 15) направленный граф (в виде квадратной таблицы отношений $M(i,j) = 1$, если есть путь из i в j узел).

Задание 2

(срок сдачи 6–11 апреля)

Требования к оформлению – такие же. Программа должна быть выполнена на C++ и в обязательном порядке должна использовать чужие библиотеки абстрактных типов данных (например, *BorlandClassLib*, *MS MFC/Atl/Stl*, *GNU libstdc++*, *STL* и др.) – любую из них.

Задачи должны быть выполнены на C++ или C# (для платформы *Windows*) с использованием более одной нити или процесса по выбору студента, согласованному с преподавателем. Для этого под *Windows* может быть использована библиотека функций *Win32 API* (или более высокоуровневые библиотеки). Под *Unix*: *POSIXThreads*.

По желанию студента задача может быть дополнена графическим интерфейсом.

Единицу исполнения (нить или процесс) ниже будем называть *вычислителем*.

Задачи с использованием деревьев

Задачи этого раздела используют класс *Tree* для создания древесной структуры данных.

1. Поиск ключа узла дерева

Исходные данные: дерево, каждый элемент которого хранит уникальный, случайно сгенерированный ключ; ключ, узел с которым требуется найти, количество используемых вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для поиска данного ключа.

Программа должна создать заданное пользователем дерево, считать количество используемых вычислителей и ключ для поиска, найти элемент дерева, содержащий этот ключ, и вывести информацию об этом узле.

2. Поиск максимального элемента дерева

Исходные данные: дерево, каждый элемент которого хранит уникальный, случайно сгенерированный ключ, количество используемых вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для поиска максимального ключа.

Программа должна создать заданное пользователем дерево, считать количество используемых вычислителей, найти элемент дерева, содержащий максимальный из ключей и вывести информацию об этом узле.

Переменная, содержащая максимальный элемент, должна быть общей для всех вычислителей. Доступ к ней – синхронизован.

3. Поиск суммы всех элементов дерева

Исходные данные: дерево, каждый элемент которого хранит уникальный, случайно сгенерированный ключ, количество используемых вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для поиска суммы всех ключей дерева.

Программа должна создать заданное пользователем дерево, считать количество используемых вычислителей, найти и вывести сумму всех ключей дерева.

Переменная, содержащая сумму ключей, должна быть общей для всех вычислителей. Доступ к ней – синхронизован.

4. Поиск количества узлов дерева

Исходные данные: дерево, количество используемых вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для поиска количества узлов в дереве.

Программа должна создать заданное пользователем дерево, считать количество используемых вычислителей, найти и вывести количество всех узлов в дереве.

Переменная, содержащая максимальный элемент, должна быть общей для всех вычислителей. Доступ к ней – синхронизован.

Возможные алгоритмы распараллеливания работы для задач 1–4:

а. Пусть есть N вычислителей. У первого – ссылка на корень дерева. Он берет одно из поддеревьев для поиска себе, остальные раздает свободным вычислителям. Далее вычислители поступают точно так же. Когда свободных вычислителей не остается, каждый выполняет обычный поиск по своему поддереву.

б. Пусть есть N вычислителей, и выбран вычислитель-мастер. Он сам проводит поиск ключа по дереву в ширину до тех пор, пока не найдет N независимых поддеревьев, после чего раздает их для поиска остальным вычислителям.

Усложнение для задач 1–3: пусть каждый узел дерева содержит дополнительную информацию – количество узлов под ним. К основной цели задачи добавляется равномерное распределение загрузки вычислителей: каждый должен получить поддерево (поддеревья) с примерно одинаковым количеством узлов (отличающимся не более чем на единицу).

Вычислительные задачи

5. Вычисление интеграла численными методами

Исходные данные: функция одной переменной, отрезок интегрирования, количество вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для вычисления интеграла от данной функции по данному отрезку.

Программа должна считать функцию, отрезок интегрирования, количество вычислителей, посчитать интеграл в несколько вычислителей, вывести результат.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: использовать параллелизм по отрезку. Каждый вычислитель считает интеграл по своей части отрезка с помощью одного из стандартных методов (трапеции, Симпсона, Ньютона–Лейбница и т.д.). Результаты отдельных вычислителей суммируются.

Численный метод выбирается преподавателем.

6. Вычисление интеграла методом Монте-Карло

Исходные данные: функция одной переменной, отрезок интегрирования, количество вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для вычисления интеграла от данной функции по данному отрезку методом Монте-Карло.

Программа должна считать функцию, отрезок интегрирования, количество вычислителей, посчитать интеграл в несколько вычислителей, вывести результат.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания:

а) Использовать параллелизм по отрезку. Каждый вычислитель считает интеграл по своей части отрезка. Результаты отдельных вычислителей суммируются.

б) Использовать параллелизм по количеству испытаний в методе Монте-Карло. Необходимое количество испытаний делится между N вычислителями. Результаты испытаний обобщаются.

7. Вычисление n -мерного интеграла от функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$ методом Монте-Карло

Исходные данные: функция одной переменной, отрезок интегрирования, количество вычислителей.

Цель: написать параллельную программу для вычисления интеграла от данной функции по данному отрезку методом Монте-Карло.

Программа должна считать функцию, отрезок интегрирования, количество вычислителей, посчитать интеграл в несколько вычислителей, вывести результат.

Вариации:

а) Область имеет вид $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: использовать параллелизм количеству измерений. Каждый вычислитель просто вычисляет свой интеграл.

б) Область имеет произвольный вид.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: использовать параллелизм количеству измерений. В формуле метода Монте-Карло вычислители-рабочие считают значения функций (расчет может быть громоздким) и отсылают их вычислителю-мастеру, который производит суммирование и вычисление окончательного результата.

8. Параллельное перемножение матриц

Исходные данные: две матрицы $n \times m$ и $m \times n$, количество вычислителей.

Цель: написать программу для перемножения матриц параллельно несколькими вычислителями.

Программа должна считать m, n , две матрицы, количество вычислителей; распараллелить процесс их перемножения.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: поскольку каждый элемент матрицы-результата рассчитывается независимо от других, он может быть определен отдельным вычислителем. Вычислитель-мастер занимается распределением работы между остальными. Он хранит базу свободных вычислителей, куда синхронизовано заносятся не имеющие работы и откуда берутся рабочие для вычисления следующего элемента матрицы.

9. Параллельное вычисление детерминанта матрицы заданного размера (параллелизм по дереву рекурсии)

Исходные данные: матрица $n \times n$, количество вычислителей.

Цель: написать программу для расчета детерминанта матрицы параллельно несколькими вычислителями.

Программа должна считать n , матрицу, количество вычислителей; распараллелить процесс вычисления детерминанта матрицы.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: предполагается вычислять определитель методом Гаусса – приведением к верхнетреугольной матрице и далее перемножением элементов диагонали. Надо придумать способ распределения подзадач по вычислителям, например, получив дерево вычислений, оно же дерево рекурсии. А примеры распараллеливания (раздачи элементов дерева вычислителям) описаны в задаче 1 раздела *Задачи с использованием деревьев*.

10. Решение уравнения $Ax = b$ (A – матрица) методом Крамера: параллелизм по элементам столбца решения

Исходные данные: невырожденная матрица $n \times m$, столбец $n \times 1$, количество вычислителей.

Цель: написать программу для расчета решения уравнения $Ax = b$ параллельно несколькими вычислителями.

Программа должна считать m , n , матрицу A , столбец b , количество вычислителей; распараллелить решение уравнения $Ax = b$ методом Крамера.

Предполагаемый алгоритм решения. Методом Крамера каждый элемент столбца-результата вычисляется независимо от остальных. Поэтому его можно передать для расчета отдельному вычислителю.

11. Решение дифференциального уравнения $y' + y = f(x)$ методами вычислительной математики

Исходные данные: функция $f(x)$ (правая часть), отрезок, на котором ищется решение, количество вычислителей.

Цель: написать программу для расчета y решения уравнения $y' + y = f(x)$ параллельно несколькими вычислителями.

Программа должна считать правую часть, отрезок интегрирования; распараллелить процесс решения дифференциального уравнения $y' + y = f(x)$ заданным методом вычислительной математики.

Способ распараллеливания: стандартный, по отрезку. Отрезок делится на количество вычислителей, и каждому отдается своя часть.

Используемый метод вычислительной математики выбирается преподавателем.

Сортировка

12. Сортировка слиянием

Исходные данные: массив объектов, функция для их сравнения, количество вычислителей.

Цель: написать программу для упорядочивания массива параллельно несколькими вычислителями.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: при сортировке слиянием массив делится на две равных по размеру части, которые сортируются

отдельно и сливаются в один. Таким образом, снова получаем дерево рекурсии. Примеры распараллеливания по дереву см. в задаче 1 раздела *Задачи с использованием деревьев*.

Вывод на экран

13. Контроль за выводом на экран нескольких потоков

Исходные данные: нет.

Цель: добиться с помощью средств синхронизации, чтобы несколько вычислителей выводили информацию на экран в строго определенном порядке.

Программа должна создать 26 потоков, каждый из которых выводит свою букву алфавита в бесконечном цикле. Добиться, чтобы все буквы выводились в алфавитном порядке.

Работа с файлами

14. Копирование файла в несколько потоков

Исходные данные: файл, директория его будущего расположения, количество вычислителей.

Цель: написать программу для копирования файла в другое место параллельно несколькими вычислителями.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания:

а) Каждый вычислитель открывает файл отдельно. Они делят файл на равные части, каждый копирует свою часть (читая из копируемого файла и записывая в файл результата блоки данных фиксированного размера).

б) (Для нитей одного процесса.) Файл открывается один раз. Каждый вычислитель также должен скопировать свою часть файла. Но, поскольку файловый указатель общий, доступ к нему должен быть синхронизован. После использования указателя (т.е. копирования очередного блока данных из своей части) вычислитель должен вернуть его в первоначальное положение и снова включиться в борьбу за общий ресурс.

15. Копирование директории вместе со всем ее содержимым (параллелизм по файлам)

Исходные данные: директория для копирования, директория ее будущего расположения.

Цель: написать программу для копирования директории вместе со всем ее содержимым в другое место параллельно несколькими вычислителями.

Предполагаемый алгоритм распараллеливания: снова для операции копирования можно составить дерево рекурсии => распараллеливание по дереву (задача 1 раздела *Задачи с деревьями*).

Моделирование

В данном разделе студентам предлагается смоделировать следующие ситуации:

16. «Тренировка футболистов»

Участвующие вычислители: футболисты.

Общий ресурс: мяч.

Ситуация: команда футболистов отрабатывает индивидуальные действия. Каждый играет за себя. Цель футболиста – завладеть мячом и забить гол. Таким образом, он может выполнять два действия:

а) бороться за мяч.

б) бить по воротам, как только мяч оказался у него.

После удара по воротам вратарь выбивает мяч в поле. Футболист забивает гол с определенной вероятностью. Команда играет определенное время, потом определяется победитель – по забитым мячам.

17. «Семейный автомобиль»

Участвующие вычислители: члены семьи.

Общий ресурс: автомобиль.

Ситуация: семья из 4-х (N) человек: отец, мать, сын и дочь – имеет в распоряжении автомобиль. У каждого из них периодически появляется желание/необходимость использовать его. Пользование длится случайное время. По истечении определенного времени (известного заранее) бензин автомобиля заканчивается, и тот, кто в этот момент пользуется автомобилем, едет его заправлять. Кроме того, сын ответственен за мытье автомобиля. Также по истечению известного заранее времени автомобиль загрязняется. Если сын начинает пользоваться грязным автомобилем, он его моет перед этим.

Итого, все члены семьи «умеют» ездить на автомобиле, заправлять его, ожидать его освобождения. Сын помимо прочего «умеет» мыть автомобиль.

18. «Аэропорт»

Участвующие вычислители: самолет.

Общий ресурс: взлетно-посадочные полосы.

Ситуация: в течение каждого часа в аэропорту появляется 5 самолетов, готовых к вылету, и 5 самолетов, готовых приземлиться (каждый из них в случайное время в пределах этого часа). Чтобы взлететь или приземлиться самолету, требуется 3 минуты. В аэропорту 2 взлетно-посадочные полосы.

19. «Воробьи»

Участвующие вычислители: воробей.

Общий ресурс: хлебные крошки.

Ситуация: бабушка на скамейке периодически (пусть раз в Q минут) бросает воробьям по одной ровно N хлебных крошек. Когда бросают крошку хлеба, первый подлетевший к ней воробей хватается крошку, относит ее в сторону и съедает. За счет этого он пропускает «розыгрыш» следующей крошки. Первоначально у скамейки находится M воробьев. Каждую минуту к стае прилетает еще один воробей. Съев P крошек, воробей наедается и улетает. Чтобы количество воробьев не увеличивалось, должно выполняться соотношение $Q = N/P$.

Итак, воробей может выполнять действия:

- Прилететь (рождение процесса).
- Ждать раздачи крошек.
- Драться за крошку.
- Отлететь с крошкой в сторону и съесть ее.
- Улететь (смерть процесса).

20. «Раздача карт»

Участвующие вычислители: игрок.

Общий ресурс: колода карт.

Ситуация: N игроков тянут карты по одной из лежащей перед ними колоды.

Необходимо обеспечить:

- Очередность доступа к колоде.
- Равномерное распределение карт в колоде.

Можно ради интереса после раздачи посчитать количество очков в вытянутых ими картах и определить победителя.

Литература

(Основная)

1. Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование. – 2-е изд. – Москва : БИНОМ, 1998.
2. Страуструп Б. Язык программирования C++. – 3-е изд. – Москва : БИНОМ, 1999.
3. Секунов Н. Visual C++.NET. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2002.
4. Топп У., Форд У. Структуры данных в C++. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2000.
5. Майерс С. Эффективное использование STL. – Санкт-Петербург : ПИТЕР, 2002.
6. Александреску А. Современное проектирование на C++. Обобщенное программирование и прикладные шаблоны проектирования. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2002.
7. Гамма Э., Хелм Р., Джонсон Р., Влиссидес Дж. Приемы объектно-ориентированного проектирования. Паттерны проектирования. – Санкт-Петербург : Питер, 2003.
8. Влиссидес Дж. Применение паттернов проектирования. Дополнительные штрихи. – Москва : Изд. дом «Вильямс», 2003.

(Дополнительная)

1. Лебланк Д., Ховард М. Защищенный код (WritingSecureCode). – Второе издание. – Издательство: Русская редакция. Серия: Фундаментальные знания. 2005.

Учебное издание

**СБОРНИК
программ и заданий**

**Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований
(ФРКТ)**

**для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 3,5. Тираж 140 экз.
Заказ № 10.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок