Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

# СБОРНИК

## программ и заданий

**Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ)**

**для студентов 1 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 1 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ). – Москва : МФТИ, 2021. – 68 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: термодинамика и молекулярная физика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 2 семестр
Диф. зачёт – 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. С.Булыгин
д.ф.-м.н., проф. А. В.Гавриков
д.ф.-м.н., проф. А. А.Катанин
к.ф.-м.н., доц. К. М.Крымский
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. Д. И. Холин
к.ф.-м.н., доц. И. С. Юдин

Программа принята на заседании кафедры общей физики 7 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Максимычев

# ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

**1.** Основные понятия, задачи и методы молекулярной физики. Макроскопические параметры, термодинамическая система, термодинамические параметры, термодинамическое равновесие. Нулевое начало термодинамики. Термическое и калорическое уравнения состояния.

Идеальный газ. Связь давления идеального газа с кинетической энергией молекул. Уравнение состояния идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа. Идеально-газовое определение температуры.

Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и постоянном давлении, соотношение Майера для идеального газа. Адиабатический и политропический процессы. Адиабата и политропа идеального газа.

Скорость звука в газах.

**2.** Циклические процессы. Тепловые машины. КПД тепловой машины. Цикл Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики. Эквивалентные формулировки второго начала. Неравенство Клаузиуса.

Термодинамическое определение энтропии. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах, закон возрастания энтропии. Энтропия идеального газа. Неравновесное расширение идеального газа в пустоту.

**3.** Термодинамические функции и их свойства. Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, энергия Гиббса. Преобразования термодинамических функций. Соотношения Максвелла.

Максимальная работа системы при контакте с термостатом. Максимальная полезная работа системы.

**4.** Применение термодинамических потенциалов. Термодинамика излучения. Адиабатическое растяжение резинового и металлического стержней. Тепловое расширение твёрдых тел.

Поверхностные явления. Краевые углы, смачивание и несмачивание. Формула Лапласа. Свободная и внутренняя энергия поверхности.

**5.** Фаза и агрегатное состояние. Классификация фазовых переходов (I и II рода). Экстенсивные и интенсивные величины. Химический потенциал. Условия равновесия фаз для переходов I рода. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кривая фазового равновесия «жидкость–пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Фазовые диаграммы. Тройная точка. Диаграмма состояния «лёд–вода–пар». Критическая точка.

Метастабильные состояния. Перегретая жидкость и переохлаждённый пар. Зависимость давления пара от кривизны поверхности жидкости. Кипение. Роль зародышей в образовании фазы.

**6.** Газ Ван-дер-Ваальса как модель реального газа. Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса и их связь с изотермами реальной системы. Правило Максвелла (правило рычага). Критические параметры и приведённое уравнение состояния. Адиабата газа Ван-дер-Ваальса. Неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в пустоту.

**7.** Элементы гидродинамики идеальной жидкости. Линии тока, стационарное ламинарное течение. Уравнение Бернулли для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Изоэнтропическое течение идеального газа, истечение газа из отверстия. Эффект Джоуля–Томсона, температура инверсии.

**8.** Элементы теории вероятностей. Дискретные и непрерывные случайные величины, плотность вероятности. Условие нормировки. Средние величины и дисперсия. Независимые случайные величины. Нормальный закон распределения как предел распределения для суммы большого числа независимых слагаемых (без вывода). Зависимость дисперсии суммы независимых слагаемых от их числа («закон $\sqrt{N}$»).

**9.** Распределение Максвелла: распределения частиц по компонентам скорости и абсолютным значениям скорости. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. Распределение Максвелла по энергиям.

Элементы молекулярно-кинетической теории. Плотность потока частиц, движущихся в заданном направлении. Среднее число и средняя энергия частиц, вылетающих в вакуум через малое отверстие в сосуде.

Распределение Больцмана в поле внешних сил. Барометрическая формула. Распределение Максвелла—Больцмана.

**10.** Элементы статистической физики классических идеальных систем. Фазовое пространство, макро- и микросостояния, статистический вес макросостояния. Статистическое определение энтропии. Статистическая сумма. Аддитивность энтропии независимых подсистем. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики (теорема Нернста). Распределение Гиббса–Больцмана для идеального газа. Понятие о каноническом распределении Гиббса.

Зависимость статистического веса и энтропии от числа частиц в системе. Изменение энтропии при смешении газов, парадокс Гиббса.

**11.** Приложения статистической физики. Статистическая сумма. Классическая теория теплоёмкостей: закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы. Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга–Пти). Элементы квантовой теории теплоёмкостей. Замораживание степеней свободы, характеристические температуры. Зависимость теплоёмкости $C_V$ газов от температуры.

Статистическая температура. Свойства двухуровневой системы, инверсная заселённость.

**12.** Флуктуации. Связь вероятности флуктуации с изменением энтропии системы. Флуктуации аддитивных величин, зависимость флуктуаций от числа частиц. Флуктуация числа частиц в выделенном объёме. Флуктуация энергии системы в жёсткой термостатированной оболочке. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов (пружинные весы, газовый термометр).

**13.** Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Распределение молекул по длинам свободного пробега. Число столкновений молекул в единице объёма.

Явления молекулярного переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Законы Фика, Фурье и Ньютона. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение диффузии и теплопроводности. Температуропроводность. Стационарные и квазистационарные распределения концентрации и температуры.

**14.** Диффузия как процесс случайных блужданий. Задача о случайных блужданиях, среднеквадратичное смещение частицы при большом числе шагов. Расплывание облака частиц и распространение тепла за счёт теплопроводности.

Броуновское движение макроскопических частиц. Закон Эйнштейна–Смолуховского для смещения броуновской частицы. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна).

**15.** Стационарное ламинарное течение вязкой жидкости/газа по прямолинейной трубе, формула Пуазейля. Течение разрежённого газа по прямолинейной трубе. Явления переноса в разрежённых газах: эффект Кнудсена (эффузия), зависимость коэффициента теплопроводности разрежённого газа от давления.

Безразмерные параметры и законы подобия для течений. Число Рейнольдса. Число Кнудсена. Эффект Магнуса и подъёмная сила при обтекании крыла (качественное объяснение).

**16.** Введение в неравновесную термодинамику. Локальное термодинамическое равновесие. Неравновесная термодинамика при малых отклонений от термодинамического равновесия (линейная теория), термодинамические силы и потоки, соотношения взаимности Онзагера, перекрёстные термодинамические явления (термоэлектрический эффект, термомеханический и механокалорический эффекты). Производство энтропии, принципы минимума производства энтропии и наименьшего рассеяния энергии в необратимых термодинамических процессах.

Нелинейная термодинамика, флуктуации в диссипативных системах вдали от положения термодинамического равновесия, "порядок из хаоса" (ячейки Бенара, реакция Белоусова–Жаботинского).

## ЛИТЕРАТУРА

*Основная литература*

1. *Кириченко Н.А.* Термодинамика, статистическая молекулярная физика. – Москва : Физматкнига, 2012.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Физматлит, 2006.
3. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика / под ред. Ю.М. Ципенюка. Часть V. Главы 1–4. – Москва : Физматлит, 2001.
4. *Белонучкин В.Е.* Краткий курс термодинамики. – Москва : МФТИ, 2010.
5. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1 / под ред. А. Д. Гладуна. – Москва : МФТИ, 2012.
6. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В. А. Овчинкина (3-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2013.

*Дополнительная литература*

1. *Щёголев И.Ф.* Элементы статистической механики, термодинамики и кинетики. – Москва.: Янус, 1996; Москва : Интеллект, 2008.
2. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. – Москва : Интеллект, 2014 (4-е изд.).
3. *Базаров И.П.* Термодинамика. – Москва : Высшая школа, 1983.
4. *Рейф Ф.* Статистическая физика (Берклеевский курс физики). Т. 5. – Москва : Наука, 1972.
5. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.
6. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – Москва : Мир, 2009.
7. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Высшая школа, 2009.
8. *Прут Э.В., Кленов С.Л., Овсянникова О.Б.* Введение в теорию вероятностей в молекулярной физике. – Москва : МФТИ. 2002. Элементы теории флуктуаций и броуновского движения в молекулярной физике. – Москва : МФТИ, 2002.
9. *Прут Э.В.* Теплофизические свойства твёрдых тел. – Москва : МФТИ, 2009.

10. *Булыгин В.С.* Теоремы Карно. – Москва : МФТИ, 2012; Теплоёмкость и внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса. – Москва : МФТИ, 2012; Некоторые задачи теории теплопроводности. – Москва : МФТИ, 2006; Теплоёмкость идеального газа. – Москва : МФТИ, 2019;
11. *Попов П.В.* Диффузия. – Москва : МФТИ, 2016.

*Электронные ресурсы*

http://physics.mipt.ru/S_II/method/

## ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

**для студентов 1-го курса на весенний семестр 2020/2021 учебного года**

| Дата | № нед. | Тема семинарских занятий | Задачи | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | **0** | **I** | **II** |
| 1–5 февр. | **1** | Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Адиабатический и политропический процессы. | $^{0}1$<br>$^{0}2$<br>$^{0}3$ | 1.40<br>1.54<br>1.87<br>2.6 | 1.100<br>1.47<br>1.75<br>1.83 |
| 8–12 февр. | **2** | Тепловые машины. Второе начало термодинамики. Изменение энтропии в обратимых процессах. | $^{0}4$<br>$^{0}5$<br>$^{0}6$ | 3.25<br>3.43<br>Т1<br>4.80 | 3.52<br>3.47<br>4.15<br>4.78 |
| 15–19 февр. | **3** | Изменение энтропии в необратимых процессах.<br>Термодинамические потенциалы. | $^{0}7$<br>$^{0}8$<br>$^{0}9$ | 4.75<br>4.43/44<br>5.75<br>5.38 | 4.47<br>Т6<br>5.32<br>5.54 |
| 22 – 26 февр. | **4** | Применение термодинамических потенциалов. Преобразования термодинамических функций. | 1.3<br>$^{0}10$<br>$^{0}11$<br>$^{0}12$ | 5.16<br>5.28<br>12.8<br>5.42 | 5.63<br>5.40<br>12.9<br>12.38 |
| 1–5 мар. | **5** | Фазовые превращения. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кипение. | $^{0}13$<br>$^{0}14$<br>$^{0}15$ | 11.29<br>11.16<br>11.34<br>12.51 | 11.36<br>11.74<br>11.78<br>12.48 |
| 8–12 мар. | **6** | Реальные газы.<br>Уравнение Бернулли. Эффект Джоуля—Томсона. | $^{0}16$<br>$^{0}17$<br>$^{0}18$ | 6.17<br>6.52<br>2.11<br>6.68/69 | 6.39<br>6.41<br>2.20<br>6.87 |
| 15–19 мар. | **7** | Контрольная работа по 1-му заданию (по группам). | | | |
| 22–26 мар. | **8** | Сдача 1-го задания. | | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 мар. –2 апр. | **9** | Основы молекулярно-кинетической теории. Распределение Максвелла. | $^0$19<br>$^0$20<br>7.52 | 7.18<br>7.14<br>7.20<br>7.53 | 7.70<br>7.16<br>7.40<br>7.80 |
| 5–9 апр. | **10** | Распределение Больцмана. Элементы статистической физики. | $^0$21<br>$^0$22<br>$^0$23<br>$^0$24 | 8.11<br>8.28<br>8.56<br>8.52 | 8.15<br>8.25<br>8.70<br>8.61 |
| 12–16 апр. | **11** | Статистический смысл энтропии. Флуктуации. | $^0$25<br>$^0$26<br>$^0$27 | 9.45<br>T4<br>9.6<br>9.8 | 8.51<br>T2<br>9.28<br>9.40 |
| 19–23 апр. | **12** | Столкновения, длина свободного пробега. Явления переноса. | 10.2<br>$^0$28<br>$^0$29 | 10.8<br>10.15<br>10.36<br>10.149 | 10.38<br>10.16<br>10.134<br>10.143 |
| 26–30 апр. | **13** | Явления переноса. Броуновское движение. | $^0$30<br>$^0$31 | 10.106<br>10.30<br>T3<br>10.92 | 10.25<br>10.54<br>10.98<br>T5 |
| 3–7 мая | **14** | Течение газов. Явления в разреженных газах. | $^0$32<br>$^0$33<br>$^0$34 | 10.82/83<br>10.68/69<br>10.120<br>14.27$^{мех}$ | 10.77<br>10.142<br>10.102<br>14.46$^{мех}$ |
| 10–21 мая | **15/16** | Сдача 2-го задания. | | | |

### ***Примечание***

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика, термодинамика и молекулярная физика” / под ред. В.А. Овчинкина (**3-е изд**., испр. и доп.). — Москва : Физматкнига, 2013. Задачи с индексом «$^{мех}$» — из раздела «Механика».

Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

**0** — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;

**I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

**II** — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

## Задачи 0 группы

**1.** В комнате объёмом $V$ в течение некоторого времени был включён нагреватель. В результате температура воздуха увеличилась от $T_1$ до $T_2$. Давление в комнате не изменилось. Найти изменение внутренней $\Delta U$ энергии воздуха, содержащегося в комнате.

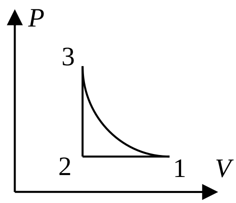
**2.** Найти работу, которую совершает моль воздуха, расширяясь от объёма $V_0$ до $V_1 = 2V_0$ в изотермическом процессе при комнатной температуре.

Ответ: 1,7 кДж.

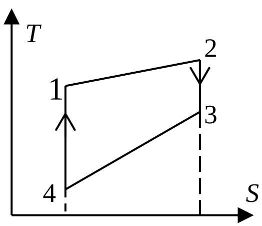
**3.** Температура воздуха равна $T = 273$ К. Найти изменение скорости звука при изменении температуры на $\Delta T = 1$ К.

Ответ: $\Delta c_s \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} c_s = 0{,}61$ м/с.

**4.** Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного сжатия, изохорного нагревания и адиабатического расширения, если отношение максимального и минимального объёмов равно 2. Рабочее тело – двухатомный идеальный газ.




Ответ: 0,15.




**5.** Тепловая машина с неизвестным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рисунке в координатах $TS$. $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{3}{4}T_1$, $T_4 = \frac{1}{20}T_1$. Найти КПД цикла.

Ответ: 0,68.

**6.** Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу (тепловой насос), отбирает от первого резервуара 65 Дж теплоты и передаёт количество теплоты 80 Дж второму резервуару при $T$ = 320 К. Определить температуру первого резервуара.

Ответ: 260 К.

**7.** Два теплоизолированных сосуда равного объёма соединены трубкой с краном. В одном сосуде содержится 10 г водорода $H_2$, второй откачан до высокого вакуума. Кран открывают и газ расширяется на весь объём. Считая газ идеальным, найти изменение его энтропии к моменту установления равновесия.

Ответ: $\Delta S = 28{,}8$ Дж/К.

**8.** Кусок льда массой 90 г, имеющий температур 0°С, положили в пустую алюминиевую кастрюлю массой 330 г, нагретой до 100°С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Теплота плавления льда $330$ Дж/г, теплоёмкость алюминия $0{,}9$ Дж/(г · К).

Ответ: $\Delta S = 16{,}1$ Дж/К.

**9.** Найти изменение свободной энергии $\Delta F$ и термодинамического потенциала Гиббса $\Delta G$ для 1 кг водяного пара при изотермическом ($T = 298$ К) увеличении давления от 1,0 до 2,0 мбар. Водяной пар считать идеальным газом.

Ответ: $\Delta G = \Delta F = 95{,}4$ кДж.

**10.** Уравнение состояния резиновой полосы имеет вид $f = aT\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right]$, где $f$ — натяжение, $a = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/К, $l$ — длина полосы, длина недеформированной полосы $l_0 = 1$ м. Найти изменение свободной и внутренней энергии резины при её изотермическом растяжении до $l_1 = 2$ м. Температура $T = 300$ К.

Ответ: $\Delta F = 3{,}9$ Дж, $\Delta U = 0$.

**11.** Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы разделить сферическую каплю масла массой $m = 1$ г на капельки диаметром $d = 2 \cdot 10^{-4}$ см, если процесс дробления изотермический. Поверхностное натяжение масла $\sigma = 26$ дин/см, плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см$^3$.

Ответ: $8{,}7 \cdot 10^5$ эрг.

**12.** На какую высоту поднимается вода между двумя плоскими параллельными пластинами, расстояние между которыми $h = 0{,}1$ мм, если краевой угол смачивания $\theta = 60°$. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м.

Ответ: 7,5 см.

**13.** Молярная теплота парообразования воды в точке кипения при $t = 100$ °С равна $\Lambda = 40{,}7$ кДж/моль. Считая водяной пар идеальным газом, найти разность молярных внутренних энергий жидкой воды и водяного пара при данной температуре.

Ответ: $u_п - u_ж = 37{,}6$ кДж/моль.

**14.** Определить температуру кипения воды на вершине Эвереста, где атмосферное давление составляет 250 мм рт. ст. Теплоту парообразования воды считать не зависящей от температуры и равной $\Lambda = 2{,}28$ кДж/г.

Ответ: $71$ °С.

**15.** Оценить относительный перепад давления $\Delta P/P$ паров воды на высоте подъёма воды в полностью смачиваемом капилляре диаметром $d$ = 1 мкм. Поверхностное натяжение $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, температура $t = 20$ °C.

Ответ: $\Delta P/P \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

**16.** Во сколько раз давление газа Ван-дер-Ваальса больше его критического давления, если известно, что его объём в 5 раз, а температура в 5,7 раза больше критических значений этих величин?

Ответ: $\pi = 3{,}14$.

**17.** Найти изменение энтропии идеального газа, подвергнутого дросселированию через пористую перегородку, если начальное давление равно $P_1 = 4$ атм, конечное $P_2 = 1$ атм.

Ответ: 11,5 Дж/К.

**18.** Оценить максимально возможную скорость истечения воздуха при нормальных условиях через отверстие, выходящее в вакуум.

Ответ: 740 м/с.

**19.** Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до $v_0$. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Ответ: $0{,}5v_0$; $v_0/\sqrt{3}$; $v_0/2\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$.

**20.** Найти наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул азота при $T$ = 300 К. Сравнить полученные значения со скоростью звука.

Ответ: $v_{\text{н.в.}} = 421$ м/с, $v_{\text{ср}} = 476$ м/с, $v_{\text{кв}} = 517$ м/с; $c_{\text{зв}} = 353$ м/с.

**21.** Определить, на какой высоте в изотермической атмосфере её плотность уменьшится в 5 раз, если на высоте 5,5 км она уменьшается в 2 раза.

Ответ: 12,8 км.

**22.** Молекула может находиться на двух энергетических уровнях: основном и возбуждённом. Разность энергий между ними составляет $\Delta E = 6{,}0 \cdot 10^{-21}$ Дж. Какова доля молекул, находящихся в возбуждённом состоянии при $t = 250$ °C?

Ответ: 0,3.

**23.** Определить температуру, при которой средняя поступательная энергия молекулы $H_2$ будет равна энергии возбуждения её первого вращательного уровня. Расстояние между атомами равно $d = 0{,}74 \cdot 10^{-8}$ см.

Ответ: 116 К.

**24.** Собственная частота колебаний атомов в молекуле $Cl_2$ равна $10^{14}$ $с^{-1}$. Оценить характеристическую температуру, выше которой колебательную теплоёмкость молекулы можно рассчитывать по классической теории. Какова будет при этом молярная теплоёмкость газа?

Ответ: 760 К, $7R/2$.

**25.** Два твёрдых тела с температурами 299 К и 300 К приведены в соприкосновение. Оценить, во сколько раз более вероятна передача порции энергии $10^{-11}$ эрг от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, чем в обратном направлении. Теплоёмкости тел достаточно велики, так что изменением их температуры можно пренебречь.

Ответ: 5.

**26.** Небольшой груз массой 1 г подвешен на лёгкой нити длиной 1 м. Оценить среднеквадратичное отклонение груза от положения равновесия из-за тепловых флуктуаций при комнатной температуре.

Ответ: $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} \approx 0{,}9$ нм.

**27.** Оценить среднеквадратичную относительную флуктуацию числа молекул воздуха в объёме 1 $мкм^3$ при нормальных условиях.

Ответ: 0,02%.

**28.** Вязкость азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Оценить коэффициенты теплопроводности и самодиффузии азота, а также диаметр молекулы азота.

Ответ: $\kappa \sim 10^{-2}$ Вт/м·К, $D \sim 0{,}15$ $см^2$/с, $d \sim 4 \cdot 10^{-10}$ м.

**29.** Оценить количество тепла в расчёте на 1 $м^2$, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет. Расстояние между стёклами $h = 23$ мм. Разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta T = 30$ °С. Теплопроводность воздуха $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}$ считать не зависящей от температуры.

Ответ: $q = 30$ Вт/$м^2$.

**30.** Оценить коэффициент диффузии капель тумана радиусом $R \sim 10$ мкм в воздухе при нормальных условиях. Вязкость воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ: $10^{-8}$ $см^2$/с.

**31.** Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda \sim 10^{-5}$ см.

Ответ: $10^2$ с.

**32.** Два сосуда с идеальным газом соединены трубкой, диаметр которой заметно меньше длины свободного пробега в обоих сосудах. Температура в сосудах поддерживается постоянной и равной соответственно $T_1$ и $T_2 = 2T_1$. Найти отношение давлений $P_2/P_1$.

<u>Ответ:</u> $\sqrt{2}$.

**33.** Оценить коэффициент диффузии сильно разреженного воздуха по длинной трубке диаметром 1 см при комнатной температуре. Считать, что разрежение таково, что длина пробега молекул ограничивается диаметром трубки (высокий вакуум).

<u>Ответ:</u> ~ 1,6 м$^2$/с.

**34.** Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра $d = 2$ см при расходе $Q = 30$ л/мин. Вязкость холодной воды $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с. Будет ли такое течение ламинарным?

<u>Ответ</u>: $10^4$.

## Текстовые задачи

**Т-1.** В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ К. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ К. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Ответ: $A \approx 1$ кДж, $T_2 = 450$ К.

**Т-2**. Найти молярную энтропию кристаллического $^6$Li при низких температурах, пренебрегая взаимодействием ядер между собой. Момент импульса (спин) ядра $^6$Li равен $s = 1$ (в единицах постоянной Планка $\hbar$). Согласно квантовой механике, число возможных ориентаций вектора момента импульса равно $2s + 1$.

Ответ: $S = 9{,}1$ Дж/(моль·К).

**Т-3**. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые $\tau = 4$ с на расстояние $\lambda = 0{,}5$ м в случайном направлении. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положения $\sqrt{\overline{\Delta r^2}}$ за $t = 1$ час и определить коэффициент диффузии $D$ толпы пьяных матросов, не взаимодействующих между собой.

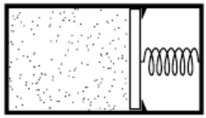
Ответ: $\sqrt{\overline{\Delta r^2}} = 15$ м, $D \approx 56{,}3$ м$^2$/ч.

**Т-4.** (5А-2017) Ионы солей иттербия имеют спин $s = 7/2$. Во внешнем магнитном поле $B$ энергия иона зависит от ориентации спина и может принимать значения $E_m = m\mu B$, где $\mu$ — известная константа, и $m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. Найти изменение энтропии $\Delta S$ и количество теплоты $Q$, поглощаемое 1 молем соли при её квазистатическом изотермическом размагничивании от очень большого ($B_0 \gg kT/\mu$) до нулевого поля ($B_1 = 0$) при температуре $T = 1$ К. Взаимодействием ионов между собой пренебречь.

Ответ: $\Delta S = 17{,}3$ Дж/К, $Q = 17{,}3$ Дж.

**Т-5.** (6А-2018) Вертикально расположенная пробирка высотой $h$ = 5 см заполнена водой, в которой диспергированы в небольшом количестве сферические наночастицы плотностью $\rho$ = 4 г/см$^3$ каждая. Система исходно находится в равновесии при температуре $T_0$ = 300 К, а отношение максимальной и минимальной концентраций наночастиц равно $n_{max}/n_{min}$ = 1,1. На дне сосуда размещают адсорбент, поглощающий все попадающие на него наночастицы. Оценить время, требуемое для очистки воды от примеси. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Ответ: ~ 9 мес.



**Т-6.** (4Б-2018) Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части поршнем, прикреплённым пружиной к правой стенке сосуда (см. рис.). Слева от поршня находится 1 моль азота при комнатной температуре, справа — вакуум. Вначале пружина не деформирована, а поршень удерживается защёлкой. Защёлку убирают, и когда система приходит в равновесие, давление газа оказывается в $n = 3$ раза меньше исходного. Считая газ идеальным, найдите изменение его энтропии в этом процессе.

Ответ: $0{,}75R$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 19.03.01 «Биотехнология», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **для всех (кроме ЛФИ)**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зачет. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
д. ф.-м. н., профессор А. П. Черняев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Точечное $n$–мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в $n$–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.
3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.
5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
6. Мера Жордана в $n$–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.
7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференци-

руемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции $e^z$.

## Литература

*Основная*

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

*Дополнительная*

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.

# ЗАДАНИЯ

## Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2012. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

## Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные $^*$, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 марта)

### I. Неопределённый интеграл

**С2, §1:** 2(4, 17); <u>10(7)</u>; 11(5); 12(8)$^*$; <u>15(6)</u>; 20(7); 21(3); <u>24(4)</u>.

**С2, §2:** <u>2(4)</u>; 3(1); 4(1); 6(5)$^*$; 8(1); 9(4)$^*$.

**С2, §3:** <u>2(7)</u>; 4(3); 5(3); <u>18(5)</u>; 19(1).

**С2, §4:** 1(5); <u>4(3)</u>; 15(5); 17(1)$^*$; 18(4); 21(2).

**С2, §5:** 131; 139; <u>182</u>; 188.

**Т.1.** Вычислите интегралы: **а)**$^*$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx$.

## II. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах.

**С3, §1:** <u>14</u>; 18; 24; 36; 38.

**С3, §2:** <u>9(2, 6)</u> (а, б, г); 12(6); 20(4).

**Т.2.** Для множества $A = [1,2) \cup \{3\} \cup \big([4,5) \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$ найдите все: **а)** граничные точки; **б)** предельные точки; **в)** внутренние точки; **г)** точки прикосновения.

**Т.3*.** Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$, имеющее лишь конечное число предельных точек, не более чем счетно.

**<u>Т.4</u>.** Является ли множество

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в $\mathbb{R}^4$: **а)** открытым; **б)** замкнутым; **в)** областью?

Б) Предел и непрерывность.

**С3, §2:** <u>37(8)</u>; 45; <u>48(7)</u>; <u>54</u>; 62(5); 77(3).

В) Частные производные, дифференциал.

**С3, §3:** 2(4); 19(<u>1</u>, 4); 20(3, <u>5</u>); 21(2$^*$, 10); 40(4).

**С3, §4:** 1(3); 4; 14(2); 39(6).

Г) Формула Тейлора.

**С3, §4:** <u>71(2)</u>; 74(5).

### Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С2, §1:** 2(4, 17); <u>10(7)</u>; 11(5); 12(8)$^*$; <u>15(6)</u>; 20(7); 21(3); <u>24(4)</u>.<br>**С2, §2:** 2(<u>4</u>); 3(1); 4(1); 6(5)$^*$; <u>8(1)</u>; 9(4)$^*$.<br>**С2, §3:** <u>2(7)</u>; 4(3); 5(3); <u>18(5)</u>; 19(1). |
| 2 неделя | **С2, §4:** 1(5); <u>4(3)</u>; 15(5); 17(1)$^*$; 18(4); 21(2).<br>**С2, §5:** 131; 139; <u>182</u>; 188; Т.1 (а), б)).<br>**С3, §1:** <u>14</u>; 18; 24; 36; 38. |
| 3 неделя | **С3, §2:** 9(2, 6); 12(6); 20(4); Т.2; Т.3$^*$; Т.4.<br>**С3, §2:** 37(<u>8</u>); 45; <u>48(7)</u>; <u>54</u>; 62(5); 77(3).<br>**С3, §3:** 2(4); 19(1, 4); <u>20(3, 5)</u>; 21(2$^*$, 10); 40(4). |
| 4 неделя | **С3, §4:** 1(3); 4; 14(2); 39(6).<br>**С3, §4:** <u>71(2)</u>; 74(5). |

$\boxed{57 + 6^*}$

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 апреля)

## I. Мера Жордана

**С3, §7:** 16; 22; 24(2); 40(2).

**Т.1.** Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на отрезке функции равна нулю.

**Т.2.** Измеримо ли множество нулей функции

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

в круге $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$ радиуса $R > 0$?

## II. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление.

**С2, §6:** 7; 11; 24; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192$^*$.

**С2, §10:** 49(2).

**Т.3.** Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

**Т.4.** Пусть функция $f$ ограничена на полуинтервале $(a,\,b]$ и при любом $\varepsilon \in (0,\,b-a)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\varepsilon,\,b]$. Доказать, что при любом доопределении функции $f$ в точке $x = a$, функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,\,b]$ и справедливо следующее равенство: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

**Т.5.** а) Функция $f$ имеет первообразную $F$ на отрезке $[a,\,b]$. Верно ли, что $f$ интегрируема на отрезке $[a,\,b]$?

б) Функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,\,b]$. Верно ли, что $f$ имеет первообразную на отрезке $[a,\,b]$?

в) Пусть функция $f$ интегрируема на $[a,\,b]$ и имеет первообразную $F$ на отрезке $[a,\,b]$. Доказать, что верно равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

**Т.6*.** Докажите, что разрывная функция $f(x) = \mathrm{sign}\Big(\sin\dfrac{\pi}{x}\Big)$ интегрируема на отрезке $[0,1]$.

**Т.7*.** Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $y = f(g(x))$ также интегрируема?

**Т.8*.** Пусть $f \in C\big([0,+\infty)\big)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\,dx$?

Б) Геометрические приложения определенного интеграла.

**С2, §7:** 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2).

**С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4).

**III. Криволинейный интеграл**

**С3, §10:** 1(3); 6(1); 17; 21(2) 27(3); 43.

**IV. Несобственный интеграл**

**С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 100.

**С2, §12:** 89; 91; 98; 100; <u>104</u>; 118; 120; 136; <u>137</u>; <u>182</u>; 230.

**Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям**

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С3, §7:** 16; <u>22</u>; 24(2); 40(2); Т.1; Т.2.<br>**С2, §6:** 7; 11; <u>24</u>; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192*. |
| 2 неделя | **С2, §10:** <u>49(2)</u>; Т.3; Т.4; Т.5 (а, б, в); Т6*; Т7*; Т8*.<br>**С2, §7:** 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2).<br>**С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4). |
| 3 неделя | **С3, §10:** 1(3); 6(1); 17; 21(2); 27(3); 43.<br>**С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 100. |
| 4 неделя | **С2, §12:** 89; 91; 98; 100; <u>104</u>; 118; 120; 136; <u>137</u>; <u>182</u>; 230. |

$\boxed{51 + 4^*}$

## ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 мая)

**I. Числовые ряды**

А) Ряды с неотрицательными членами.

**С2, §13:** 2(2); 5(6)*; <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20(1).

**С2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*.

**<u>Т.1</u>.** Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ если при $p = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

Б) Знакопеременные ряды.

**С2, §15:** 3(2); 4(5); 8(4); 9(2).

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

**Т.2.** Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что сходятся ряды

**а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ ?

## II. Функциональные последовательности и ряды

**С2, §17:** 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10).
**С2, §18:** 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*.
**С2, §19:** 4; 6; 14; <u>22</u>.

**Т.3.** Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

**Т.4.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $A = (0,1)$ и $B = (1,+\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:

$$\text{а) } f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \qquad \text{б) } f_n(x) = n\Bigl(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\Bigr).$$

## III. Степенные ряды

**С2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*.
**С2, §21:** 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>.

**Т.5.** Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

## Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С2, §13:** 2(2); 5(6)*; <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20(1).<br>**С2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*; Т.1. |
| 2 неделя | **С2, §15:** 3(2); <u>4(5)</u>; 8(4); 9(2); Т.2(а, б).<br>**С2, §17:** 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10). |
| 3 неделя | **С2, §18:** 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*.<br>**С2, §19:** 4; 6; 14; <u>22</u>; Т.3; Т.4 (а, б). |
| 4 неделя | **С2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*.<br>**С2, §21:** 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>; Т.5. |

$\boxed{49 + 7^*}$

Составитель задания ассистент А. И. Корчагин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 5 зачет. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
д. ф.-м. н., профессор А. П. Черняев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Точечное $n$–мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в $n$–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.
3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.
5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
6. Мера Жордана в $n$–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.
7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференци-

руемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции $e^z$.

## Литература

*Основная*

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

*Дополнительная*

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.

# ЗАДАНИЯ

## Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2012. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

## Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 марта)

### I. Неопределённый интеграл

**С2, §1:** 2(4, 17); <u>10(7)</u>; 11(5); 12(8)*; <u>15(6)</u>; 20(7); 21(3); <u>24(4)</u>.

**С2, §2:** <u>2(4)</u>; 3(1); 4(1); 6(5)*; 8(1); 9(4)*.

**С2, §3:** <u>2(7)</u>; 4(3); 5(3); <u>18(5)</u>; 19(1).

**С2, §4:** 1(5); <u>4(3)</u>; 15(5); 17(1)*; 18(4); 21(2).

**С2, §5:** 131; 139; <u>182</u>; 188.

**Т.1.** Вычислите интегралы: **а)**$^*$ $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx$.

## II. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах.

**С3, §1:** $\underline{14}$; 18; 24; 36; 38.

**С3, §2:** $\underline{9(2,6)}$ (а, б, г); 12(6); 20(4).

**Т.2.** Для множества $A = [1,2) \cup \{3\} \cup \big([4,5) \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$ найдите все: **а)** граничные точки; **б)** предельные точки; **в)** внутренние точки; **г)** точки прикосновения.

**Т.3$^*$.** Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$, имеющее лишь конечное число предельных точек, не более чем счетно.

**$\underline{\text{Т.4}}$.** Является ли множество

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в $\mathbb{R}^4$: **а)** открытым; **б)** замкнутым; **в)** областью?

Б) Предел и непрерывность.

**С3, §2:** $\underline{37(8)}$; 45; $\underline{48(7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3).

В) Частные производные, дифференциал.

**С3, §3:** 2(4); 19($\underline{1}$, 4); 20(3, $\underline{5}$); 21(2$^*$, 10); 40(4).

**С3, §4:** 1(3); 4; 14(2); 39(6).

Г) Формула Тейлора.

**С3, §4:** $\underline{71(2)}$; 74(5).

### Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С2, §1:** 2(4, 17); $\underline{10(7)}$; 11(5); 12(8)$^*$; $\underline{15(6)}$; 20(7); 21(3); $\underline{24(4)}$.<br>**С2, §2:** 2($\underline{4}$); 3(1); 4(1); 6(5)$^*$; $\underline{8(1)}$; 9(4)$^*$.<br>**С2, §3:** $\underline{2(7)}$; 4(3); 5(3); $\underline{18(5)}$; 19(1). |
| 2 неделя | **С2, §4:** 1(5); $\underline{4(3)}$; 15(5); 17(1)$^*$; 18(4); 21(2).<br>**С2, §5:** 131; 139; $\underline{182}$; 188; Т.1 (а), б)).<br>**С3, §1:** $\underline{14}$; 18; 24; 36; 38. |
| 3 неделя | **С3, §2:** 9(2, 6); 12(6); 20(4); Т.2; Т.3$^*$; Т.4.<br>**С3, §2:** 37($\underline{8}$); 45; $\underline{48(7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3).<br>**С3, §3:** 2(4); 19(1, 4); $\underline{20(3,5)}$; 21(2$^*$, 10); 40(4). |
| 4 неделя | **С3, §4:** 1(3); 4; 14(2); 39(6).<br>**С3, §4:** $\underline{71(2)}$; 74(5). |

$\boxed{57 + 6^*}$

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 апреля)

## I. Мера Жордана

**С3, §7:** 16; <u>22</u>; 24(2); 40(2).

**Т.1.** Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на отрезке функции равна нулю.

**Т.2.** Измеримо ли множество нулей функции

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

в круге $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$ радиуса $R > 0$?

## II. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление.

**С2, §6:** 7; 11; <u>24</u>; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192*.

**С2, §10:** <u>49(2)</u>.

**<u>Т.3</u>.** Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

**<u>Т.4</u>.** Пусть функция $f$ ограничена на полуинтервале $(a,\, b]$ и при любом $\varepsilon \in (0,\, b-a)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\varepsilon,\, b]$. Доказать, что при любом доопределении функции $f$ в точке $x = a$, функция $f$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,\, b]$ и справедливо следующее равенство: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

**<u>Т.5</u>.** а) Функция $f$ имеет первообразную $F$ на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что $f$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$?

б) Функция $f$ интегрируема на отрезке $[a,\, b]$. Верно ли, что $f$ имеет первообразную на отрезке $[a,\, b]$?

в) Пусть функция $f$ интегрируема на $[a,\, b]$ и имеет первообразную $F$ на отрезке $[a,\, b]$. Доказать, что верно равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

**Т.6*.** Докажите, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$.

**Т.7*.** Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $y = f(g(x))$ также интегрируема?

**T.8***. Пусть $f \in C\big([0,+\infty)\big)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\,dx$?

Б) Геометрические приложения определенного интеграла.

**С2, §7:** 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2).

**С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4).

**III. Криволинейный интеграл**

**С3, §10:** 1(3); 6(1); 17; 21(2) 27(3); 43.

**IV. Несобственный интеграл**

**С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 100.

**С2, §12:** 89; 91; 98; 100; 104; 118; 120; 136; 137; 182; 230.

**Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям**

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С3, §7:** 16; 22; 24(2); 40(2); Т.1; Т.2.<br>**С2, §6:** 7; 11; 24; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192*. |
| 2 неделя | **С2, §10:** 49(2); Т.3; Т.4; Т.5 (а, б, в); Т6*; Т7*; Т8*.<br>**С2, §7:** 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2).<br>**С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4). |
| 3 неделя | **С3, §10:** 1(3); 6(1); 17; 21(2); 27(3); 43.<br>**С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 100. |
| 4 неделя | **С2, §12:** 89; 91; 98; 100; 104; 118; 120; 136; 137; 182; 230. |

$\boxed{51 + 4^*}$

## ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 мая)

**I. Числовые ряды**

А) Ряды с неотрицательными членами.

**С2, §13:** 2(2); 5(6)*; 10(1); 11(6); 13(2); 14(3); 20(1).

**С2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); 19(10); 21(12); 27(7)*.

**Т.1**. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ если при $p = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

Б) Знакопеременные ряды.

**С2, §15:** 3(2); 4(5); 8(4); 9(2).

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

**T.2.** Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что сходятся ряды

**а)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$ ?

## II. Функциональные последовательности и ряды

**C2, §17:** 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10).
**C2, §18:** 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*.
**C2, §19:** 4; 6; 14; <u>22</u>.

**T.3.** Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

**T.4.** Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $A = (0,1)$ и $B = (1,+\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:

$$\textbf{а)}\ f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \qquad \textbf{б)}\ f_n(x) = n\Big(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\Big).$$

## III. Степенные ряды

**C2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*.
**C2, §21:** 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>.

**T.5.** Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

## Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **C2, §13:** 2(2); 5(6)*; <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20(1).<br>**C2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*; Т.1. |
| 2 неделя | **C2, §15:** 3(2); <u>4(5)</u>; 8(4); 9(2); Т.2(а, б).<br>**C2, §17:** 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10). |
| 3 неделя | **C2, §18:** 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*.<br>**C2, §19:** 4; 6; 14; <u>22</u>; Т.3; Т.4 (а, б). |
| 4 неделя | **C2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*.<br>**C2, §21:** 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>; Т.5. |

$\boxed{49 + 7^*}$

Составитель задания ассистент А. И. Корчагин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **для всех (кроме ЛФИ)**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., ст. преподаватель О. Г. Прончева
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.
2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.
4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.
5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.
6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).
7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.
10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Второе сопряженное пространство[1].

[1] Для потока И.А. Чубарова.

11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями[2].
13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования[3].
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение[4].
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной. Применение к классификации поверхностей второго порядка[5].

21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.

22* Основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

---

[2]Кроме потока И.А. Чубарова.
[3]Для потока И.А. Чубарова.
[4]Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова.
[5]Для потока И.А. Чубарова.

## Литература

*Основная*

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Москва : Наука, Физматлит, 2008.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

# ЗАДАНИЯ

## Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В.,Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

## Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные $^*$, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

## I. Матрицы

**Т.1.** Вычислите $c_{104}^T(A_{207} + A_{209})A_{140}$.

1. Обратная матрица.
   **С:** 15.45($1, \underline{2}$); 15.48(4); 15.56$^*$; 15.58; 15.65($\underline{1}, 5$); 15.54(3)$^*$.
2. Ранг матрицы.
   **С:** 16.18(17); $\underline{16.19(3)}$; 16.41$^*$; 16.33$^*$.

**Т.2.** Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

## II. Системы линейных уравнений

**С:** $\underline{17.1(4)}$; 18.1(7, 9); 19.6($4, \underline{20}, 25$); 18.17(4); 19.29(1)$^*$.

## III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис.

**C:** $\underline{20.3(4)}$; 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); $\underline{20.18}$; 20.21; $\underline{20.22(3)}$; $\underline{20.23(4)}$; 20.29; $18.13^*$.

2. Сумма и пересечение; прямая сумма.
   **C:** $\underline{15.94}$; 15.95(1); 21.2; $\underline{21.6(5)}$; $21.7(5,\underline{7})$; $21.12^*$.

## IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ.
   **C:** $23.8(\underline{2},5)$; $23.9(\underline{2},3)$; $23.14(2,3)$; $\underline{23.15(1)}$; $\underline{23.29(5)}$; 23.30(1); $\underline{23.40(1\text{в})}$; 23.44(1); 23.62(3); 23.70(1).

**T.3*.** Приведите примеры линейных отображений $\varphi\colon V \to V$ таких, что:

а) $V \neq \ker\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$;
б) $\ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$;
в) $\varphi^3 = 0$, но $\varphi^2 \neq 0$.

2. Действия с линейными отображениями.
   **C:** 23.82(1); 23.83(1).

3. Линейные функции.
   **C:** $\underline{31.21}$; 31.31(2); $\underline{31.35(1)}$.

### Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **C:** T.1; 15.45(1, 2); 15.48(4); $15.56^*$; 15.58; 15.65(1, 5); $15.54(3)^*$.<br>**C:** 16.18(17); 16.19(3); $16.41^*$; $16.33^*$; T.2. |
| 2 неделя | **C:** 17.1(4); 18.1(7, 9); 19.6(4, 20, 25); 18.17(4); $19.29(1)^*$. |
| 3 неделя | **C:** 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18.<br>**C:** 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; $18.13^*$. |
| 4 неделя | **C:** 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); $21.12^*$.<br>**C:** 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3). |
| 5 неделя | **C:** 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1).<br>**C:** 23.62(3); 23.70(1); T.3*. |
| 6 неделя | **C:** 23.82(1); 23.83(1).<br>**C:** 31.21; 31.31(2); 31.35(1). |

$\boxed{50 + 8^*}$

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

## I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость.

   **С:** $24.14(2)^*$; $24.20(\underline{2}, 3)$; $24.28(2)^*$; $24.30(7, 19, \underline{30})$; $24.42(1)$; $\underline{24.55(1)}$.

2. Инвариантные подпространства.

   **С:** $\underline{24.70}$; $24.71^*$; $\underline{24.72(2)}$; $24.82(1)$.

## II. Билинейные и квадратичные функции

**С:** $32.1(4)$; $\underline{32.2(3)}$; $32.7(2)$; $15.34$; $32.8(9, \underline{12})$; $32.9(9, \underline{12})$; $32.15$; $32.18(4)$.

## III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация.

   **С:** $\underline{25.7}$; $25.25(2)$; $\underline{26.13(4)}$; $26.14(3)$; $26.15(2)$; $26.17(1)$; $\underline{26.27(2)}$; $26.28(1)$; $26.42(1, \underline{6})$; $26.44(2)$; $19.16^*$.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования.

   **С:** $29.5^*$; $29.7(1)^*$; $29.14(2)$; $29.19(1, \underline{7}, 11^*)$; $29.37(2)^*$; $\underline{29.47(1)}$; $25.50(2)$; $29.49^*$; $29.53(3)^*$.

**Т.1.** Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5) а) самосопряженными; б) ортогональными?

**Т.2.** Преобразование $\varphi$ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой:

$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,y)f(x)\,dx$, где $K : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на $K$ преобразование $\varphi$ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах.

   **С:** $32.27(3, \underline{13})$; $32.39(1)$; $32.36(3, \underline{4})$.

## IV$^*$. Тензоры

**С:** $35.3(6)$; $35.4(5)$; $35.8(1)$; $35.12(2)$; $36.25(2)$; $36.35(13)$; $36.36(1)$.

**Рекомендации по решению**
**второго домашнего задания по неделям**

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С:** 24.14(2)$^*$; 24.20(2, 3); 24.28(2)$^*$; 24.30(7, 19, 30). |
| 2 неделя | **С:** 24.42(1); 24.55(1).<br>**С:** 24.70; 24.71$^*$; 24.72(2); 24.82(1). |
| 3 неделя | **С:** 32.1(4); 32.2(3); 32.7(2); 15.34; 32.8(9, 12); 32.9(9, 12); 32.15; 32.18(4). |
| 4 неделя | **С:** 25.7; 25.25(2); 26.13(4); 26.14(3).<br>**С:** 26.15(2); 26.17(1); 26.27(2); 26.28(1); 26.42(1, 6); 26.44(2); 19.16$^*$. |
| 5 неделя | **С:** 29.5$^*$; 29.7(1)$^*$; 29.14(2); 29.19(1, 7, 11$^*$); 29.37(2)$^*$; 29.47(1).<br>**С:** ; 25.50(2); 29.49$^*$; 29.53(3)$^*$; Т.1; Т.2. |
| 6 неделя | **С:** 32.27(3, 13); 32.39(1); 32.36(3, 4).<br>**С:** 35.3(6)$^*$; 35.4(5)$^*$; 35.8(1)$^*$; 35.12(2)$^*$; 36.25(2)$^*$; 36.35(13)$^*$; 36.36(1)$^*$. |

$\boxed{43 + 17^*}$

Составитель задания ассистент Ю. В. Кузьменко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 54 часа

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., ст. преподаватель О. Г. Прончева
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.

3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.

4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.

10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Второе сопряженное пространство[1].

[1] Для потока И.А. Чубарова.

11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями[2].
13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования[3].
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение[4].
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной. Применение к классификации поверхностей второго порядка[5].

21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.

22* Основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

---

[2] Кроме потока И.А. Чубарова.
[3] Для потока И.А. Чубарова.
[4] Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова.
[5] Для потока И.А. Чубарова.

## Литература

*Основная*


1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Москва : Наука, Физматлит, 2008.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.


# ЗАДАНИЯ

## Литература


1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В.,Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)


## Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные $^*$, являются необязательными для всех студентов.

# ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

### I. Матрицы

**Т.1.** Вычислите $c_{104}^T(A_{207} + A_{209})A_{140}$.

1. Обратная матрица.

   **С:** 15.45(1, $\underline{2}$); 15.48(4); 15.56$^*$; 15.58; 15.65($\underline{1}$, 5); 15.54(3)$^*$.

2. Ранг матрицы.

   **С:** 16.18(17); $\underline{16.19(3)}$; 16.41$^*$; 16.33$^*$.

**Т.2.** Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

### II. Системы линейных уравнений

**С:** $\underline{17.1(4)}$; 18.1(7, 9); 19.6(4, $\underline{20}$, 25); 18.17(4); 19.29(1)$^*$.

### III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис.

**С:** $\underline{20.3(4)}$; 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); $\underline{20.18}$; 20.21; $\underline{20.22(3)}$; $\underline{20.23(4)}$; 20.29; $18.13^*$.

2. Сумма и пересечение; прямая сумма.
   **С:** $\underline{15.94}$; 15.95(1); 21.2; $\underline{21.6(5)}$; $21.7(5,\underline{7})$; $21.12^*$.

## IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ.
   **С:** $23.8(\underline{2},5)$; $23.9(\underline{2},3)$; 23.14(2,3); $\underline{23.15(1)}$; $\underline{23.29(5)}$; 23.30(1); $\underline{23.40(1в)}$; 23.44(1); 23.62(3); 23.70(1).

**Т.3*.** Приведите примеры линейных отображений $\varphi\colon V \to V$ таких, что:

а) $V \neq \ker\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$;
б) $\ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$;
в) $\varphi^3 = 0$, но $\varphi^2 \neq 0$.

2. Действия с линейными отображениями.
   **С:** 23.82(1); 23.83(1).

3. Линейные функции.
   **С:** $\underline{31.21}$; 31.31(2); $\underline{31.35(1)}$.

### Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С:** Т.1; 15.45(1, 2); 15.48(4); $15.56^*$; 15.58; 15.65(1, 5); $15.54(3)^*$.<br>**С:** 16.18(17); 16.19(3); $16.41^*$; $16.33^*$; Т.2. |
| 2 неделя | **С:** 17.1(4); 18.1(7, 9); 19.6(4, 20, 25); 18.17(4); $19.29(1)^*$. |
| 3 неделя | **С:** 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18.<br>**С:** 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; $18.13^*$. |
| 4 неделя | **С:** 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); $21.12^*$.<br>**С:** 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3). |
| 5 неделя | **С:** 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1).<br>**С:** 23.62(3); 23.70(1); Т.3*. |
| 6 неделя | **С:** 23.82(1); 23.83(1).<br>**С:** 31.21; 31.31(2); 31.35(1). |

$\boxed{50 + 8^*}$

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

## I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость.

   **С:** $24.14(2)^*$; $24.20(\underline{2},3)$; $24.28(2)^*$; $24.30(7,19,\underline{30})$; $24.42(1)$; $\underline{24.55(1)}$.

2. Инвариантные подпространства.

   **С:** $\underline{24.70}$; $24.71^*$; $\underline{24.72(2)}$; $24.82(1)$.

## II. Билинейные и квадратичные функции

**С:** $32.1(4)$; $\underline{32.2(3)}$; $32.7(2)$; $15.34$; $32.8(9,\underline{12})$; $32.9(9,\underline{12})$; $32.15$; $32.18(4)$.

## III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация.

   **С:** $\underline{25.7}$; $25.25(2)$; $\underline{26.13(4)}$; $26.14(3)$; $26.15(2)$; $26.17(1)$; $\underline{26.27(2)}$; $26.28(1)$; $26.42(1,\underline{6})$; $26.44(2)$; $19.16^*$.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования.

   **С:** $29.5^*$; $29.7(1)^*$; $29.14(2)$; $29.19(1,\underline{7},11^*)$; $29.37(2)^*$; $\underline{29.47(1)}$; $25.50(2)$; $29.49^*$; $29.53(3)^*$.

**Т.1.** Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5) а) самосопряженными; б) ортогональными?

**Т.2.** Преобразование $\varphi$ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой:

$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,y)f(x)\,dx$, где $K : [-1,1]\times[-1,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на $K$ преобразование $\varphi$ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах.

   **С:** $32.27(3,\underline{13})$; $32.39(1)$; $32.36(3,\underline{4})$.

## IV$^*$. Тензоры

**С:** $35.3(6)$; $35.4(5)$; $35.8(1)$; $35.12(2)$; $36.25(2)$; $36.35(13)$; $36.36(1)$.

**Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям**

| | |
|---|---|
| 1 неделя | **С:** 24.14(2)$^*$; 24.20(2, 3); 24.28(2)$^*$; 24.30(7, 19, 30). |
| 2 неделя | **С:** 24.42(1); 24.55(1).<br>**С:** 24.70; 24.71$^*$; 24.72(2); 24.82(1). |
| 3 неделя | **С:** 32.1(4); 32.2(3); 32.7(2); 15.34; 32.8(9, 12); 32.9(9, 12); 32.15; 32.18(4). |
| 4 неделя | **С:** 25.7; 25.25(2); 26.13(4); 26.14(3).<br>**С:** 26.15(2); 26.17(1); 26.27(2); 26.28(1); 26.42(1, 6); 26.44(2); 19.16$^*$. |
| 5 неделя | **С:** 29.5$^*$; 29.7(1)$^*$; 29.14(2); 29.19(1, 7, 11$^*$); 29.37(2)$^*$; 29.47(1).<br>**С:** ; 25.50(2); 29.49$^*$; 29.53(3)$^*$; Т.1; Т.2. |
| 6 неделя | **С:** 32.27(3, 13); 32.39(1); 32.36(3, 4).<br>**С:** 35.3(6)$^*$; 35.4(5)$^*$; 35.8(1)$^*$; 35.12(2)$^*$; 36.25(2)$^*$; 36.35(13)$^*$; 36.36(1)$^*$. |

$\boxed{43 + 17^*}$

Составитель задания ассистент Ю. В. Кузьменко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 2 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Пространство элементарных событий. Вероятность.** Теоретико-множественная модель событий. Способы определения вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрические вероятности.

2. **Алгебры событий и свойства вероятности.** Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий. Теорема сложения.

3. **Условная вероятность и независимость.** Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.

4. **Последовательность независимых испытаний.** Схема Бернулли. Вероятностное пространство, описывающее схему Бернулли, и биномиальное распределение. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа. Полиномиальная схема и полиномиальное распределение.

5. **Дискретные случайные величины.** Индикаторы и их свойства. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Независимость случайных величин и мультипликативное свойство математического ожидания. Совместное распределение и ковариация. Свойства ковариации и коэффициента корреляции. Ковариационная матрица. Задача линейного оценивания и уравнение регрессии. Целочисленные случайные величины и производящие функции.

6. **Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства.** Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Общее определение случайной величины, функция распределения и плотность. Совместные функция распределения и плотность. Условия независимости случайных величин. Вычисление математического ожидания и дисперсии.

7. **Неравенство Чебышёва.** Неравенства Маркова и Чебышёва. Правило трех сигм. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышёва. Теорема Бернштейна о приближении полиномами непрерывной функции.

8. **Характеристические функции и центральная предельная теорема.** Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости (без доказательства). Центральная предельная теорема.

9. **Виды сходимости последовательностей случайных величин.** Теорема о видах сходимости последовательностей случайных величин. Закон больших чисел в форме Хинчина.
10. **Цепи Маркова.** Условия марковости и однородности в терминах переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова — Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
11. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона — Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией процесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.

### Литература


1. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.
2. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
3. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
4. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1987.
5. *Ширяев А. Н.* Вероятность — 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.
7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.


## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

### I. Комбинации событий

**Т.1.** Пусть $A$, $B$, $C$ — три события. Найти выражения для событий:

а) произошло только $A$;

б) произошли $A$ и $B$, а $C$ не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из них;

д) произошло только одно из них;

е) ни одно из них не произошло;

ж) произошло не более двух из них.

**Т.2.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

**Т.3.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что $AX = AB$.

**Т.4.** Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

## II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

**Т.5.** Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

**Т.6.** Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

**Т.7.** Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет подряд два раза одной стороной. Описать пространство элементарных исходов. Используя соображения симметрии, найти:

а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до шестого бросания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

**Т.8.** Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

**Т.9.** Что вероятнее, выиграть у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

**Т.10.** Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

**Т.11.** Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число девушек и юношей?

**Т.12.** Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

**Т.13.** В $n$ конвертов разложено по одному письму $n$ адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из $n$ адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

**Т.14.** Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

**Т.15.** На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

**Т.16.** На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми $L$, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

**Т.17*.** На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

## III. Условные вероятности. Формула полной вероятности

**Т.18.** Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

**Т.19.** Пусть $A$, $B$ и $A$, $C$ образуют пары независимых событий и $C \subset B$. Покажите, что $A$ и $B \setminus C$ также независимы.

**Т.20.** В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

**Т.21.** По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

**Т.22.** Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

**Т.23.** Из урны, содержащей $M$ белых и $N$ черных шаров, утеряно $r$ шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

**Т.24.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

**Т.25.** Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой $n$ торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью $p$. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из $m$ отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

**Т.26.** Стрелок $A$ поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6, стрелок $B$ — с вероятностью 0,5 и стрелок $C$ — с вероятностью 0,7. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее, попал $C$ в цель или нет?

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

## I. Случайные величины и их характеристики

**Т.1.** Пусть $S_n$ — число выпадений «герба» при $n$ бросаниях монеты. Найти $\mathsf{E}S_n$ и $\mathsf{D}S_n$.

**Т.2.** Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть $\xi$ — число бросаний. Найти распределение вероятностей $\xi$, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leqslant 5$?

**Т.3.** В $N$ ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются $n$ частиц. Пусть $\xi$ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

**Т.4.** Подбрасываются две игральные кости. Пусть $\xi_1$ — число очков, выпавших на первой игральной кости, а $\xi_2$ — на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$.

**Т.5.** Игральная кость подбрасывается $n$ раз. Пусть $\xi$ — число появлений единицы, а $\eta$ — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

**Т.6.** Пусть $\xi_k$, $k = 1, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение $\xi_1$, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

**T.7.** Пусть $\xi_k$, $k = 1, 2$, — независимые случайные величины, принимающие лишь целые неотрицательные значения, причем $\mathsf{P}(\xi_i = n) = pq^n$; $n = 0, 1, \ldots$; $i = 1, 2$; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$. Найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ и условное распределение $\xi_1$, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

**T.8.** Совместное распределение случайных величин $\xi$ и $\eta$ определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

**T.9.** Привести примеры трех случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, удовлетворяющих условиям:

$$\text{(a)} \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j, \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 \neq \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3;$$

$$\text{(b)} \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3, \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j \neq \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j.$$

**T.10.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы; $\xi$ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

**T.11.** В квадрат $\{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

**T.12.** Точка $(\xi, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

**T.13.** Точка $(\xi, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi, \eta\}$.

**T.14.** Известно, что случайная величина $\xi$ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

## II. Закон больших чисел. Предельные теоремы. Характеристические и производящие функции. Цепи Маркова

**T.15.** Случайная величина $\xi$ имеет распределение, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \geq 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

**Т.16.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

**Т.17.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать $n$ так, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,1.$$

**Т.18.** По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

**Т.19.** Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

**Т.20.** Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

**Т.21.** Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t; \quad \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

**Т.22.** Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x), \quad \alpha > 0.$$

**Т.23*.** Случайная величина $\xi_\lambda$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda$. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$.

**Т.24.** Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

**Т.25*.** Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-ой подгруппе было 20% населения, во 2-ой подгруппе — 30%, и в 3-ей подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

**Т.26*.** В биологических приложениях процессов Гальтона — Ватсона используется производящая функция

$$f(x) = px^2 + (1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Найти

а) при каких значениях параметра $p$ процесс является докритическим, критическим, надкритическим;

б) математическое ожидание и дисперсию $n$-го поколения;

в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

**Т.27*.** Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за $n$ шагов и финальные вероятности.

---

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 10.05.01 «Компьютерная безопасность»
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 48 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Пространство элементарных событий. Вероятность.** Теоретико-множественная модель событий. Способы определения вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрические вероятности.

2. **Алгебры событий и свойства вероятности.** Алгебры множеств и разбиения. Простейшие свойства вероятности на конечной алгебре событий. Теорема сложения.

3. **Условная вероятность и независимость.** Теорема умножения, формула полной вероятности, формула Байеса. Определения независимости событий и классов событий. Теорема о независимости алгебр, порожденных разбиениями.

4. **Последовательность независимых испытаний.** Схема Бернулли. Вероятностное пространство, описывающее схему Бернулли, и биномиальное распределение. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа. Полиномиальная схема и полиномиальное распределение.

5. **Дискретные случайные величины.** Индикаторы и их свойства. Определение и свойства математического ожидания и дисперсии. Независимость случайных величин и мультипликативное свойство математического ожидания. Совместное распределение и ковариация. Свойства ковариации и коэффициента корреляции. Ковариационная матрица. Задача линейного оценивания и уравнение регрессии. Целочисленные случайные величины и производящие функции.

6. **Пространство с мерой и общая модель вероятностного пространства.** Последовательности множеств, верхний и нижний пределы. Сигма-алгебры множеств. Счетная аддитивность и непрерывность функции множеств. Общее определение случайной величины, функция распределения и плотность. Совместные функция распределения и плотность. Условия независимости случайных величин. Вычисление математического ожидания и дисперсии.

7. **Неравенство Чебышёва.** Неравенства Маркова и Чебышёва. Правило трех сигм. Закон больших чисел в форме Бернулли и форме Чебышёва. Теорема Бернштейна о приближении полиномами непрерывной функции.

8. **Характеристические функции и центральная предельная теорема.** Определение и свойства характеристических функций. Характеристические функции некоторых распределений. Формула обращения и теорема сходимости (без доказательства). Центральная предельная теорема.

9. **Виды сходимости последовательностей случайных величин.** Теорема о видах сходимости последовательностей случайных величин. Закон больших чисел в форме Хинчина.
10. **Цепи Маркова.** Условия марковости и однородности в терминах переходных вероятностей. Уравнения Колмогорова — Чепмена. Теорема о предельных вероятностях (стационарное распределение).
11. **Ветвящиеся процессы.** Описание модели Гальтона — Ватсона и производящая функция процесса. Вероятность вырождения процесса, её выражение через производящую функцию и связь с классификацией процесса. Примеры процессов с геометрическим распределением числа потомков от одной частицы в следующем поколении.

### Литература


1. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983.
2. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
3. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Москва : Наука, 1982.
4. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Наука, 1987.
5. *Ширяев А. Н.* Вероятность — 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах/ пер. с англ. Т. 1. — 3-е изд. — Москва : Мир, 1984.
7. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теория вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.


## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

### I. Комбинации событий

**Т.1.** Пусть $A$, $B$, $C$ — три события. Найти выражения для событий:

а) произошло только $A$;

б) произошли $A$ и $B$, а $C$ не произошло;

в) все три события произошли;

г) произошло хотя бы одно из них;

д) произошло только одно из них;

е) ни одно из них не произошло;

ж) произошло не более двух из них.

**Т.2.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что

$$\overline{(X \cup A)} \cup \overline{(X \cup \overline{A})} = B.$$

**Т.3.** Пусть $A$, $B$ — два события. Найти все события $X$ такие, что $AX = AB$.

**Т.4.** Найти простые выражения для событий

а) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$; б) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$; в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

## II. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

**Т.5.** Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

**Т.6.** Объяснить, почему при подбрасывании трёх игральных костей 11 очков выпадают чаще, чем 12 очков.

**Т.7.** Монета подбрасывается до тех пор, пока не выпадет подряд два раза одной стороной. Описать пространство элементарных исходов. Используя соображения симметрии, найти:

а) распределение вероятностей;

б) вероятность события, что эксперимент закончится до шестого бросания;

в) вероятность того, что потребуется чётное число бросаний.

**Т.8.** Из колоды в 52 карты наудачу берется 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут представительницы всех четырех мастей?

**Т.9.** Что вероятнее, выиграть у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

**Т.10.** Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

**Т.11.** Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число девушек и юношей?

**Т.12.** Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года.

**Т.13.** В $n$ конвертов разложено по одному письму $n$ адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из $n$ адресов. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо пойдет по назначению.

**Т.14.** Расстояние от пункта А до пункта В автобус проходит за 2 минуты, а пешеход — за 15 минут. Интервал движения автобусов 25 минут. Пешеход в случайный момент времени подходит к пункту А и отправляется в В пешком. Найти вероятность того, что в пути пешехода догонит очередной автобус.

**Т.15.** На отрезке наудачу выбираются две точки. Какова вероятность того, что из получившихся трех отрезков можно составить треугольник?

**Т.16.** На плоскость, разлинованную параллельными линиями, расстояние между которыми $L$, бросают иглу длины $l \leqslant L$. Какова вероятность того, что игла пересечет линию?

**Т.17*.** На отрезок наудачу последовательно одну за другой бросают три точки. Какова вероятность того, что третья по счету точка попадет между двумя первыми?

### III. Условные вероятности. Формула полной вероятности

**Т.18.** Трое игроков по очереди подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше появится «герб». Найти вероятности выигрыша каждого игрока.

**Т.19.** Пусть $A$, $B$ и $A$, $C$ образуют пары независимых событий и $C \subset B$. Покажите, что $A$ и $B \setminus C$ также независимы.

**Т.20.** В ящике находится 10 теннисных мячей, из которых 6 новые. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут 2 мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

**Т.21.** По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$, причем априорные вероятности равны 0,3, 0,4 и 0,3 соответственно. Известно, что действие шумов на приемное устройство уменьшает вероятность правильного приема каждой из переданных букв до 0,6, а вероятность приема переданной буквы за две другие увеличивается до 0,2 и 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что была передана последовательность $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ACAB$.

**Т.22.** Имеется три телефонных автомата, которые принимают специальные жетоны. Один из них никогда не работает, второй работает всегда, а третий работает с вероятностью $1/2$. Некто имеет три жетона и пытается выяснить, какой из автоматов исправный (работает всегда). Он делает попытку на одном из автоматов, которая оказывается неудачной. Затем переходит к другому автомату, на котором две подряд попытки оказываются удачными. Какова вероятность, что этот автомат исправный?

**Т.23.** Из урны, содержащей $M$ белых и $N$ черных шаров, утеряно $r$ шаров. Какова вероятность извлечения белого шара?

**Т.24.** Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на второй кости выпало очков не меньше, чем на первой?

**Т.25.** Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой $n$ торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью $p$. При попадании торпеды с вероятностью $\frac{1}{m}$ затопляется один из $m$ отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

**Т.26.** Стрелок $A$ поражает мишень при некоторых условиях стрельбы с вероятностью 0,6, стрелок $B$ — с вероятностью 0,5 и стрелок $C$ — с вероятностью 0,7. Стрелки дали залп по мишени, и две пули попали в цель. Что вероятнее, попал $C$ в цель или нет?

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

### I. Случайные величины и их характеристики

**Т.1.** Пусть $S_n$ — число выпадений «герба» при $n$ бросаниях монеты. Найти $\mathsf{E}S_n$ и $\mathsf{D}S_n$.

**Т.2.** Игральная кость бросается до первого появления шестёрки. Пусть $\xi$ — число бросаний. Найти распределение вероятностей $\xi$, $\mathsf{E}\xi$, $\mathsf{D}\xi$. Чему равна вероятность того, что $\xi \leqslant 5$?

**Т.3.** В $N$ ячеек случайно в соответствии со статистикой Бозе–Эйнштейна (частицы неразличимы и размещение без ограничений) размещаются $n$ частиц. Пусть $\xi$ — число пустых ячеек. Найти $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

**Т.4.** Подбрасываются две игральные кости. Пусть $\xi_1$ — число очков, выпавших на первой игральной кости, а $\xi_2$ — на второй. Определим $\xi = \max\{\xi_1, \xi_2\}$, $\eta = \min\{\xi_1, \xi_2\}$. Найти $\mathsf{cov}(\xi, \eta)$.

**Т.5.** Игральная кость подбрасывается $n$ раз. Пусть $\xi$ — число появлений единицы, а $\eta$ — число появлений шестёрки. Найти коэффициент корреляции этих случайных величин.

**Т.6.** Пусть $\xi_k$, $k = 1, 2,$ — независимые случайные величины с распределением Пуассона. Найти распределение их суммы и условное распределение $\xi_1$, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

**Т.7.** Пусть $\xi_k$, $k = 1, 2,$ — независимые случайные величины, принимающие лишь целые неотрицательные значения, причем $\mathsf{P}(\xi_i = n) = pq^n$; $n = 0, 1, \ldots$; $i = 1, 2$; $0 < p < 1$; $q = 1 - p$. Найти распределение суммы $\xi_1 + \xi_2$ и условное распределение $\xi_1$, если известна сумма $\xi_1 + \xi_2$.

**Т.8.** Совместное распределение случайных величин $\xi$ и $\eta$ определяется условиями $\mathsf{P}(\xi\eta = 0) = 1$; $\mathsf{P}(\xi = 1) = \mathsf{P}(\xi = -1) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{4}$. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию этих случайных величин.

**Т.9.** Привести примеры трех случайных величин $\xi_1, \xi_2, \xi_3$, удовлетворяющих условиям:

$$\text{(a)}\quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j = \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j, \quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 \neq \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3;$$

$$\text{(b)}\quad \mathsf{E}\xi_1\xi_2\xi_3 = \mathsf{E}\xi_1\mathsf{E}\xi_2\mathsf{E}\xi_3, \quad \mathsf{E}\xi_i\xi_j \neq \mathsf{E}\xi_i\mathsf{E}\xi_j,\ i \neq j.$$

**Т.10.** Случайные величины $\xi$ и $\eta$ независимы; $\xi$ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$, а $\mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \mathsf{P}(\eta = -1) = \frac{1}{3}$. Найти закон распределения случайной величины $\xi + \eta$.

**Т.11.** В квадрат $\{(x_1, x_2)\colon 0 \leqslant x_i \leqslant 1;\ i = 1, 2\}$ наудачу брошена точка. Пусть $\xi_1$, $\xi_2$ — ее координаты. Найти функцию распределения и плотность вероятности случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

**Т.12.** Точка $(\xi, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\zeta = |\xi - \eta|$.

**Т.13.** Точка $(\xi, \eta)$ имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Вычислить распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\theta = \min\{\xi, \eta\}$.

**Т.14.** Известно, что случайная величина $\xi$ имеет строго возрастающую непрерывную функцию распределения $F_\xi(x)$. Найти распределение случайной величины $\eta = F_\xi(\xi)$.

## II. Закон больших чисел. Предельные теоремы. Характеристические и производящие функции. Цепи Маркова

**Т.15.** Случайная величина $\xi$ имеет распределение, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Сравнить точное значение вероятности $\mathsf{P}(|\xi| \geq 4)$ с её оценкой, полученной по неравенству Чебышёва.

**T.16.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| > \epsilon\right), \quad \epsilon > 0.$$

**T.17.** Пусть $\xi_n$ — случайная величина, равная сумме очков, появившихся при $n$ бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать $n$ так, чтобы

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geqslant 0,1\right) \leqslant 0,1.$$

**T.18.** По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти приближенное значение вероятности того, что будет искажено не более трех знаков.

**T.19.** Книга в 500 страниц содержит 50 опечаток. Используя схему Бернулли, оценить вероятность того, что на определенной странице не менее трех опечаток. Сравнить полученный результат с пуассоновским приближением этой вероятности.

**T.20.** Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

**T.21.** Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t; \quad \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}; \quad \frac{1}{2 - e^{-it}}.$$

**T.22.** Найти характеристическую функцию треугольного распределения, которое определяется плотностью

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - \frac{|x|}{\alpha}\right)\mathbb{1}_{[-\alpha,\alpha]}(x), \quad \alpha > 0.$$

**T.23*.** Случайная величина $\xi_\lambda$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda$. Найти $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathsf{P}\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right)$.

**Т.24.** Пусть положительные независимые случайные величины $\xi_{m,n}$; $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ одинаково распределены с плотностью $\alpha_n e^{-\alpha_n x}$, $x > 0$, где $\alpha_n = \lambda n$ и $\lambda > 0$. Найти предельное при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \xi_{m,n}$.

**Т.25*.** Население региона делится по некоторому социально-экономическому признаку на три подгруппы. Следующее поколение с вероятностями 0,4; 0,6 и 0,2, соответственно, остается в своей подгруппе, а если не остается, то с равными вероятностями переходит в любую из остальных подгрупп. Найти:

а) распределение населения по данному социально-экономическому признаку в следующем поколении, если в настоящем поколении в 1-ой подгруппе было 20% населения, во 2-ой подгруппе — 30%, и в 3-ей подгруппе — 50%;

б) предельное распределение по данному признаку, которое не меняется при смене поколений.

**Т.26*.** В биологических приложениях процессов Гальтона — Ватсона используется производящая функция

$$f(x) = px^2 + (1-p), \qquad 0 < p < 1.$$

Найти

а) при каких значениях параметра $p$ процесс является докритическим, критическим, надкритическим;

б) математическое ожидание и дисперсию $n$-го поколения;

в) вероятность вырождения в надкритическом случае.

**Т.27*.** Пусть матрица вероятностей перехода за один шаг цепи Маркова с двумя состояниями имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1.$$

Найти вероятности перехода за $n$ шагов и финальные вероятности.

---

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор В. В. Горяйнов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

# ПРОГРАММА

по дисциплине: **Информатика. Продвинутый курс**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ, ФРКТ**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоемкость:
Базовая часть – 4 зачет. ед.;

| | |
|---|---|
| лекции: – 30 часов | Экзамен – нет |
| практические (семинарские) занятия: – нет | Зачет диф. – 2 семестр |
| | 1 контрольная работа |
| лабораторные занятия: – 60 часов | Самостоятельная работа – 90 часов |

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90

Программу составили: старший преподаватель Д. А. Подлесных

Программа принята на заседании
кафедры информатики и вычислительной математики
23 июня 2020 г.

Заведующий кафедрой,
доцент, к.ф.-м.н. Н. И. Хохлов

**Представление натуральных чисел.** Системы счисления. Двоичная, восьмеричная, шестнадцатеричная. Перевод между ними. Кольца вычетов по модулю.

**Представление чисел со знаком.** Дополнительный код.

**Порядок байтов.** Порядок от старшего к младшему, от младшего к старшему, переключаемый, смешанный. Выравнивание данных.

**Представление чисел с плавающей точкой.** Мантисса и порядок. Машинная точность. Нормализованные числа. Влияние порядка действий на результат.

**Архитектура процессора.** RISC, CISC, VLIW, VISC. FPGA. Суперскалярная архитектура. Архитектура Load-Store. Принципы фон Неймана. Гарвардская архитектура. Микроконтроллеры.

**Регистры процессора.** Регистры общего и специального назначения. Флаги (предикаты).

**Команды**. Командное слово. Условное исполнение команд.

**Переходы.** Безусловные и условные переходы. Ветвления. Циклы. Влияние переходов на производительность.

**Процедуры.** Соглашение о вызове. Соглашения на примере cdecl, fastcall, stdcall, ARM EABI. ABI и API. Соглашение об именовании объектов. Соглашения об обработке исключений. Хранение адреса возврата. Использование стека. Пролог и эпилог функции. Стековые фреймы.

**Сложные типы данных.** Массивы. Многомерные массивы.

**Оптимизация программ.** Использование конвеера. Оптимизирующий компилятор. Разворачивание циклов. Изменение порядка операций. Предсказание ветвлений.

**Иерархия памятей.** Регистры, кэш. Память с произвольным доступом. Энергонезависимая память. Дисковые накопители. Хранение на на магнитных лентах.

**Этапы компиляции.** Препроцессирование, компиляция, ассемблирование, статическая компоновка. Статические и динамические библиотеки. Динамическая компоновка и запуск программы. Кросс-компиляция.

**Многопроцессная работа.** Виртуальная память. Процессы. Потоки. Виртуальная память. Задачи ядра операционной системы.

## Литература


(*Основная*)

1. *Брайант Р., О`Халларон Д.* Компьютерные системы: архитектура и программирование. Взгляд программиста. СанктПетербург : “БХВ-Петербург”, 2005. ISBN 5-94157-433-9.

(*Дополнительная*)

1. *Фило В.* Теоретический минимум по Computer Science. Все что нужно программисту и разработчику. СанктПетербург : Питер, 2018. ISBN: 978-5-4461-0587-8.

## Электронные ресурсы

1. *http://cs.mipt.ru*
2. *http://acm.mipt.ru*
3. *http://judge.mipt.ru*
4. *http://kpm8.mipt.ru*
5. *datalab.vdi.mipt.ru*
6. *bomblab.vdi.mipt.ru*

## ЗАДАНИЕ 1

(*срок сдачи 15-20 марта*)

Задачи должны быть написаны на С с учётом рекомендаций по стилю кода, компилироваться без предупреждений. Valgrind и address sanitizer не должны находить проблем в программе. Проверка осуществляется на системе ejudge.

1. Напишите на С программу, которая будет переводить число из десятичной системы счисления в восьмеричную.
2. Напишите на С программу, которая будет переводить число из шестнадцатеричной системы счисления в двоичную. В числе до миллиона шестнадцатеричных цифр.
3. Напишите на С программу, которая будет выводить запись числа в дополнительном коде.
4. Вычислите экспериментально, сколько бит содержит мантисса каждого из чисел с плавающей точкой, доступных на Вашем компьютере.
5. Напишите на С программу, которая будет выводить побитовое представление числа с плавающей точкой.
6. Напишите на С программу, которая будет вычислять сумму чисел с плавающей точкой с максимальной точностью.
7. Напишите эмулятор RISC-процессора с несколькими регистрами общего назначения и командами сложения и вычитания.
8. Добавьте к эмулятору флаг и условное исполнение некоторых команд, сохранив обратную совместимость.
9. Напишите на С программу умножения матриц. Экспериментально оцените выигрыш от эффективного использования кэша.

Дополнения к заданиям для конкретных групп выдаются в виде контестов на http://judge.mipt.ru

## ЗАДАНИЕ 2

(*срок сдачи 2–7 декабря*)

Конкретная архитектура (ARM, x86, x86_64, GPGPU, «Эльбрус» выбирается преподавателем группы.

1. Напишите на языке ассемблера программу вычисления факториала целого неотрицательного числа.
2. Напишите на языке ассемблера программу сложения двух векторов с насыщением.
3. Напишите на языке ассемблера программу, вычисляющую модуль числа с плавающей точкой.
4. Напишите на языке ассемблера функцию, которая вычисляет корни кубического уравнения, коэффициенты передаются в качестве аргументов в соответствии с соглашением о вызове для Вашей архитектуры.
5. Напишите на языке ассемблера функцию, которая вычисляет корни кубического уравнения, коэффициенты передаются в качестве аргументов в соответствии с соглашением о вызове для Вашей архитектуры.
6. Напишите на языке ассемблера функцию, которая вычисляет сумму ряда, значения которого лежат в оперативной памяти. Указатель и количество чисел передаются в качестве аргументов.
7. Напишите программу, которая модифицирует исполняемый файл, изменив условие перехода в ветвлении на противоположное.
8. Напишите программу, которая модифицирует исполняемый файл, изменив условный переход на безусловный.
9. Выясните, при каком аргументе функция из библиотеки вернёт ненулевое значение.
10. Напишите программу, которая с помощью dlopen выясняет, есть ли в системе библиотека с определённым названием.
11. Выполните лабораторную работу datalab.
12. Выполните лабораторную работу bomblab.

Дополнения к заданиям для конкретных групп выдаются в виде контестов на http://judge.mipt.ru

Учебное издание

# СБОРНИК
# программ и заданий

## Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ)

**для студентов 1 курса**
**на весенний семестр**
**2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 4,25. Тираж 140 экз.
Заказ № 01.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru