

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

**Физтех-школа прикладной математики и
информатики
(ФПМИ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ). – Москва : МФТИ, 2021. – 40 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению: **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,**
подготовки: **09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент С. П. Коновалов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Сопряжённое пространство. Теорема Хана–Банаха. Теорема Рисса–Фреше.
2. Слабая сходимость в банаховом пространстве.
3. Сопряжённые операторы.
4. Ограниченные самосопряжённые операторы.
5. Компактные операторы. Теорема Гильберта–Шмидта. Теорема Фредгольма.
6. Интеграл Лебега и основные функциональные пространства. Преобразование Фурье в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$. Свёртка функций.
7. Элементы нелинейного функционального анализа.

Литература

Основная

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
2. Хатсон В., Пим Д. Приложения функционального анализа и теории операторов. — Москва : Мир, 1983.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1977.
4. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. — Москва : Изд-во МГУ, 1987.
5. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.
6. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В. Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В. Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

1. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса–Фреше. Теорема Хана–Банаха.
§9: 1, 9.
2. Слабая сходимость.
§10: 1, 2, 8, 9.
3. Сопряжённые операторы, самосопряжённые операторы.
§11: 1, 2, 9, 11.
4. Компактные операторы.
§12: 9, 17, 20.
5. Спектр, резольвента.
§7: 1, 7, 12, 13.

6. Интеграл Лебега

§8: 2, 4, 9, 11; §12: 10, 18.

7. Элементы нелинейного анализа.

§13: 1; §14: 2, 3.

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент С. П. Коновалов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
подготовки: **ФПМИ**
физтех-школа: **высшей математики**
кафедра: **3**
курс: **6**
семестр:

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов Экзамен — 6 семестр
практические (семинарские)
занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент С. П. Коновалов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Сопряжённое пространство. Теорема Хана–Банаха. Теорема Рисса–Фреше.
2. Слабая сходимость в банаховом пространстве.
3. Сопряжённые операторы.
4. Ограниченные самосопряжённые операторы.
5. Компактные операторы. Теорема Гильберта–Шмидта. Теорема Фредгольма.
6. Интеграл Лебега и основные функциональные пространства. Преобразование Фурье в пространствах $L_1(\mathbb{R}^n)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$. Свёртка функций.
7. Элементы нелинейного функционального анализа.

Литература

Основная

1. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
2. Хатсон В., Пим Д. Приложения функционального анализа и теории операторов. — Москва : Мир, 1983.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1977.
4. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. — Москва : Изд-во МГУ, 1987.
5. Треногин В. А., Писаревский Б. М., Соболева Т. С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.
6. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В. Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В. Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

1. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса–Фреше. Теорема Хана–Банаха.
§9: 1, 9.
2. Слабая сходимость.
§10: 1, 2, 8, 9.
3. Сопряжённые операторы, самосопряжённые операторы.
§11: 1, 2, 9, 11.
4. Компактные операторы.
§12: 9, 17, 20.
5. Спектр, резольвента.
§7: 1, 7, 12, 13.

6. Интеграл Лебега

§8: 2, 4, 9, 11; §12: 10, 18.

7. Элементы нелинейного анализа.

§13: 1; §14: 2, 3.

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент С. П. Коновалов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению: **03.03.01 «Прикладная математика и физика»,**
подготовки: **19.03.01 «Биотехнология»**
физтех-школы: **ФБМФ, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 5 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские)
занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Т. В. Михайлова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Понятие характеристики.
2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной. Постановка задачи Коши (в частности, локализованной задачи Коши), формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).
Волновое уравнение в случае двух и трёх пространственных переменных. Плоские характеристики волнового уравнения, световой конус. Постановка задачи Коши; единственность решения. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае трёх пространственных переменных (формула Кирхгофа). Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных (формула Пуассона, метод спуска).
Распространение волн в случае двух и трёх пространственных переменных. О диффузии волн. Непрерывная зависимость решения от начальных функций.
3. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Классы единственности решений. Существование решения, формула Пуассона. Бесконечная дифференцируемость решения. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Отсутствие непрерывной зависимости решения для случая «обратной» теплопроводности. Принцип максимума для решения задачи Коши.
4. Смешанная задача для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной. Единственность решения (метод интеграла энергии в случае волнового уравнения; принцип максимума в случае уравнения теплопроводности). Необходимые условия разрешимости задачи (в частности, условия согласования начальных и граничных функций).
Метод Фурье решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье.
5. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы. Формулы Грина. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Принцип максимума. Теорема Лиувилля. Теорема об устранимости особенностей.
6. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия разрешимости. Единственность решения; непрерывная зависимость решения от граничной функции.

Существование решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.

7. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.
Теорема об общем виде решения. Существование решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре.
8. Область внешнего типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в областях внешнего типа.

Литература

Основная

1. Михайлов В. П. Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
2. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — Москва : Наука, 1981. 512 с.
4. Уровев В. М. Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
6. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
7. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1982.
8. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2016.
9. Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.
10. Михайлова Т. В., Хасанов А. А. Некоторые методы решения типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2020.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, характеристики

1. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x, y) , на которых он сохраняется:

a) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xu_{yy} - u_x = 0$.

2. Определить при различных вещественных значениях α и β тип уравнения

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xz} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0.$$

3. 2.1(2).

II. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка в случае двух независимых переменных в области

2.11 (6).

1. Решить задачу Коши:

a) $y^3 u_{xy} - y u_{yy} - 3y^5 u_x + (2 + 3y^3)u_y = 0$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$;

$u|_{y=1} = 1 + 3x$, $u_y|_{y=1} = 3(4 + 3x)$, $x \in \mathbb{R}^1$.

б) $x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3x u_x - 3y u_y = 0$, $x > 1$, $y > 1$;

$u|_{x=y} = y^{2/3}$, $u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}$, $y > 1$.

в) $x^2 u_{xx} - x y u_{xy} - 2y^2 u_{yy} + x u_x - 2y u_y = 9x y^2$, $x > 0$, $y > 0$;

$u|_{x=1} = 3e^y$, $u_x|_{x=1} = -y^2$.

г) $y u_{xx} + (x - y) u_{xy} - x u_{yy} - u_x + u_y = 0$;

$u|_{y=0} = 2x^2$, $u_y|_{y=0} = 2x$, $1 < x < 4$.

д) $y^4 u_{yy} + y^2 u_{xy} - 2u_{xx} + 2y^3 u_y = 0$;

$u|_{y=1} = x^2 + 5$, $u_y|_{y=1} = 2x - 6$, $1 < x < 2$.

2. Решить задачу Гурса:

$$x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + x u_x - 4y u_y = 0, \quad \frac{1}{x^2} < y < x^2, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4.$$

3. Найти максимальную область плоскости (x, y) , в которой решение задачи Коши:

$$u_{yy} - u_{xx} = 0;$$

$u|_{y=0} = u_0(x)$, $u_y|_{y=0} = u_1(x)$, $0 < x < 1$ при $u_0(x) \in C^2(0; 1)$, $u_1(x) \in C_1(0; 1)$, существует и единственно.

III. Волновое уравнение

1. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2 & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

2. Решить задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0$$

со следующими начальными условиями:

а) $u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = 0;$

б) $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \psi(x),$

где $\varphi(x) = \left(1 - \frac{|x|}{l}\right) \theta(l - |x|), \psi(x) = \theta(l - |x|),$

$$l = \text{const} > 0, \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Построить в каждом из случаев графики решений в моменты времени

$$t = \frac{l}{2a}, \quad t = \frac{l}{a}, \quad t = \frac{2l}{a}.$$

3. Решить смешанную задачу на полуоси:

а) 21.2, 21.19;

б) $u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geq 0;$$

$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geq 0;$$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 3\sin(x + t), \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin x + \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2 + \cos x, \quad x \geq 0;$$

$$(u_x - 2u)|_{x=0} = 2 - 4t - 2\sin t + \cos t, \quad t \geq 0;$$

г) $u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \text{sh } x + \text{arctg } x, \quad u_t|_{t=0} = \text{ch } x - \frac{2}{1+x^2}, \quad x \geq 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \text{ch } t + 1, \quad t \geq 0.$$

4. Решить задачу Коши:

а) 12.43(5), 12.44(7);

б) $u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2) \sin t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - y^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

в) $u_{tt} = 8\Delta u + x, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = e^{y-z}, \quad u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

г) $u_{tt} = \Delta u - 81(t + 1)^2 \text{sh}(2x - 2y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = (2x + y - z) \cos y, \quad u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

д) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2 \cos(x + 2y), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

5. Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) = \alpha(r), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) = \beta(r), \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

$$u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3), \quad u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Указание. Искать решение в виде $u(x, t) = \frac{v(r, t)}{r}.$

6. Найдите $u(t, 0, 0, 0)$, $t > 0$, где $u(t, x, y, z)$ — решение задачи Коши,

$$\begin{aligned} 4u_{tt} &= \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \in G, \\ 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases} \\ G &= \{x=(x,y,z): y>0, 0<x<z\}. \end{aligned}$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1. Решить задачи Коши:

а) $u_t = \Delta u + e^{-9t} \cos(2x - y + 2z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = xy^2z^3 + \cos y \cdot \sin(x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

б) $u_t = \frac{1}{4}\Delta u + t^4(x + 1), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = e^{2z-z^2} \cdot \sin(x + y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

в) $u_t = \Delta u + x^2y^2 \sin t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = xyz \cos x.$$

г) 13.5(5,7), 13.6(3).

2*. Пусть $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$ — ограниченное решение задачи Коши,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0.$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^1)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = B$. Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^1$.

II. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье

1. 20.50(1); 20.14(2); 20.3(3).

2. Решить смешанные задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$

$$u|_{x=0} = te^{-9t}, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi x - \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

в) $u_{tt} - 4u_{xx} = 2x + 4 \cos 2t \cdot \sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u|_{x=\pi} = \pi t^2, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{t=0} = (\pi - x)\left(\frac{\pi}{2}x + 1\right), \quad u_t|_{t=0} = 4 \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

г) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1;$

$$u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

III. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области

20.18; 20.19; 20.48.

IV. Краевые задачи для уравнения Пуассона в круге и кольце, шаре и шаровом слое

Решить краевые задачи в $\mathbb{R}^2$ ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$): 16.1 (3). (Решить и внешнюю задачу Дирихле с тем же граничным условием.)

1. $\Delta u = 1$, $r < 2$; $u_r|_{r=2} = 2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) + 1$.

2. $\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi$, $\frac{1}{2} < r < 1$;
 $u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi$, $u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5$.

3. $\Delta u = 24x$, $r < 1$; $(2u + u_r)|_{r=1} = 20 \sin^3 \varphi$.

4. $\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi$, $r > 1$; $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi$.

5. $\Delta u = 4 \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^3}$, $1 < r < 2$;
 $u_r|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(u_r + u)|_{r=2} = \frac{(x+y)^2}{8(x^2+y^2)}$.

6. Исследовать, при каком α задача Неймана

$$\Delta u = y, \quad r < 2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi$$

имеет решение, и найти это решение.

7. Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^3$ ($x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$):

a) $\Delta u = \frac{1}{r^4}$, $r > 2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
 $(u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi)$;

б) $\Delta u = 6z$, $r < 1$, $u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta$.

16.26(3); 16.27(3); 16.28(2); 16.31(1).

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент Т. В. Михайлова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению: **09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»**
подготовки: **ФПМИ**
физтех-школа: **высшей математики**
кафедра: **3**
курс: **6**
семестр:

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 5 зачет. ед.;
лекции — 45 часов Экзамен — 6 семестр
практические (семинарские)
занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90 Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Т. В. Михайлова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Понятие характеристики.
2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной. Постановка задачи Коши (в частности, локализованной задачи Коши), формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).
Волновое уравнение в случае двух и трёх пространственных переменных. Плоские характеристики волнового уравнения, световой конус. Постановка задачи Коши; единственность решения. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае трёх пространственных переменных (формула Кирхгофа). Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных (формула Пуассона, метод спуска).
Распространение волн в случае двух и трёх пространственных переменных. О диффузии волн. Непрерывная зависимость решения от начальных функций.
3. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Классы единственности решений. Существование решения, формула Пуассона. Бесконечная дифференцируемость решения. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Отсутствие непрерывной зависимости решения для случая «обратной» теплопроводности. Принцип максимума для решения задачи Коши.
4. Смешанная задача для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной. Единственность решения (метод интеграла энергии в случае волнового уравнения; принцип максимума в случае уравнения теплопроводности). Необходимые условия разрешимости задачи (в частности, условия согласования начальных и граничных функций).
Метод Фурье решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье.
5. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы. Формулы Грина. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Принцип максимума. Теорема Лиувилля. Теорема об устранимости особенности.
6. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия разрешимости. Единственность решения; непрерывная зависимость решения от граничной функции.

Существование решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.

7. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.
Теорема об общем виде решения. Существование решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре.
8. Область внешнего типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в областях внешнего типа.

Литература

Основная

1. Михайлов В. П. Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
2. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — 4-е изд. — Москва : Наука, 1981. 512 с.
4. Уровев В. М. Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
6. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
7. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1982.
8. Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2016.
9. Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.
10. Михайлова Т. В., Хасанов А. А. Некоторые методы решения типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2020.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, характеристики

1. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x, y) , на которых он сохраняется:

a) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xu_{yy} - u_x = 0$.

2. Определить при различных вещественных значениях α и β тип уравнения

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xz} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0.$$

3. 2.1(2).

II. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка в случае двух независимых переменных в области

2.11 (6).

1. Решить задачу Коши:

a) $y^3 u_{xy} - y u_{yy} - 3y^5 u_x + (2 + 3y^3)u_y = 0, y > 0, x \in \mathbb{R}^1$;

$u|_{y=1} = 1 + 3x, \quad u_y|_{y=1} = 3(4 + 3x), x \in \mathbb{R}^1.$

б) $x^2 u_{xx} - 9y^2 u_{yy} + 3x u_x - 3y u_y = 0, x > 1, y > 1$;

$u|_{x=y} = y^{2/3}, u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}, y > 1.$

в) $x^2 u_{xx} - x y u_{xy} - 2y^2 u_{yy} + x u_x - 2y u_y = 9x y^2, x > 0, y > 0$;

$u|_{x=1} = 3e^y, u_x|_{x=1} = -y^2.$

г) $y u_{xx} + (x - y) u_{xy} - x u_{yy} - u_x + u_y = 0$;

$u|_{y=0} = 2x^2, u_y|_{y=0} = 2x, \quad 1 < x < 4.$

д) $y^4 u_{yy} + y^2 u_{xy} - 2u_{xx} + 2y^3 u_y = 0$;

$u|_{y=1} = x^2 + 5, u_y|_{y=1} = 2x - 6, 1 < x < 2.$

2. Решить задачу Гурса:

$$x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + x u_x - 4y u_y = 0, \quad \frac{1}{x^2} < y < x^2, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4.$$

3. Найти максимальную область плоскости (x, y) , в которой решение задачи Коши:

$$u_{yy} - u_{xx} = 0;$$

$u|_{y=0} = u_0(x), u_y|_{y=0} = u_1(x), 0 < x < 1$ при $u_0(x) \in C^2(0; 1), u_1(x) \in C_1(0; 1)$, существует и единственно.

III. Волновое уравнение

1. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, & (t, x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = e^x, u_t|_{t=0} = x^2 & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

2. Решить задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0$$

со следующими начальными условиями:

а) $u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = 0;$

б) $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \psi(x),$

где $\varphi(x) = \left(1 - \frac{|x|}{l}\right) \theta(l - |x|), \psi(x) = \theta(l - |x|),$

$$l = \text{const} > 0, \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Построить в каждом из случаев графики решений в моменты времени

$$t = \frac{l}{2a}, \quad t = \frac{l}{a}, \quad t = \frac{2l}{a}.$$

3. Решить смешанную задачу на полуоси:

а) 21.2, 21.19;

б) $u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geq 0;$$

$$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2, \quad t \geq 0;$$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 3\sin(x + t), \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \sin x + \sin 2x, \quad u_t|_{t=0} = 2 + \cos x, \quad x \geq 0;$$

$$(u_x - 2u)|_{x=0} = 2 - 4t - 2\sin t + \cos t, \quad t \geq 0;$$

г) $u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0;$

$$u|_{t=0} = \text{sh } x + \text{arctg } x, \quad u_t|_{t=0} = \text{ch } x - \frac{2}{1+x^2}, \quad x \geq 0;$$

$$u_x|_{x=0} = \text{ch } t + 1, \quad t \geq 0.$$

4. Решить задачу Коши:

а) 12.43(5), 12.44(7);

б) $u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2) \sin t, \quad t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - y^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

в) $u_{tt} = 8\Delta u + x, \quad t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = e^{y-z}, u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

г) $u_{tt} = \Delta u - 81(t + 1)^2 \text{sh}(2x - 2y + z), \quad t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = (2x + y - z) \cos y, u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

д) $u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2 \cos(x + 2y), \quad t > 0, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$u|_{t=0} = yz^3, u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

5. Найти решение задачи Коши:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) = \alpha(r), u_t|_{t=0} = u_1(x) = \beta(r), x \in \mathbb{R}^3;$$

$$u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3), u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Указание. Искать решение в виде $u(x, t) = \frac{v(r, t)}{r}.$

6. Найдите $u(t, 0, 0, 0)$, $t > 0$, где $u(t, x, y, z)$ — решение задачи Коши,

$$\begin{aligned} 4u_{tt} &= \Delta u, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2), & (x, y, z) \in G, \\ 0, & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G, \end{cases} \\ G &= \{x=(x,y,z): y>0, 0<x<z\}. \end{aligned}$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности

1. Решить задачи Коши:

а) $u_t = \Delta u + e^{-9t} \cos(2x - y + 2z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = xy^2z^3 + \cos y \cdot \sin(x + y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

б) $u_t = \frac{1}{4}\Delta u + t^4(x + 1), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = e^{2z-z^2} \cdot \sin(x + y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

в) $u_t = \Delta u + x^2y^2 \sin t, \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

$$u|_{t=0} = xyz \cos x.$$

г) 13.5(5,7), 13.6(3).

2*. Пусть $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$ — ограниченное решение задачи Коши,

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0.$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^1)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} u_0(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_0(x) = B$. Найти $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^1$.

II. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье

1. 20.50(1); 20.14(2); 20.3(3).

2. Решить смешанные задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0;$

$$u|_{x=0} = te^{-9t}, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = \pi x - \sin x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

в) $u_{tt} - 4u_{xx} = 2x + 4 \cos 2t \cdot \sin x, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi;$

$$u|_{x=0} = \pi, \quad u|_{x=\pi} = \pi t^2, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{t=0} = (\pi - x)\left(\frac{\pi}{2}x + 1\right), \quad u_t|_{t=0} = 4 \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

г) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1;$

$$u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad t \geq 0;$$

$$u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t + t^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

III. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области

20.18; 20.19; 20.48.

IV. Краевые задачи для уравнения Пуассона в круге и кольце, шаре и шаровом слое

Решить краевые задачи в $\mathbb{R}^2$ ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$): 16.1 (3). (Решить и внешнюю задачу Дирихле с тем же граничным условием.)

1. $\Delta u = 1$, $r < 2$; $u_r|_{r=2} = 2 \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) + 1$.

2. $\Delta u = \frac{18}{r^3} \sin 2\varphi$, $\frac{1}{2} < r < 1$;
 $u_r|_{r=1/2} = 28 \sin^2 \varphi$, $u_r|_{r=1} = 4 \cos^2 \varphi + 5$.

3. $\Delta u = 24x$, $r < 1$; $(2u + u_r)|_{r=1} = 20 \sin^3 \varphi$.

4. $\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi$, $r > 1$; $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi$.

5. $\Delta u = 4 \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^3}$, $1 < r < 2$;
 $u_r|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(u_r + u)|_{r=2} = \frac{(x+y)^2}{8(x^2+y^2)}$.

6. Исследовать, при каком α задача Неймана

$$\Delta u = y, \quad r < 2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi$$

имеет решение, и найти это решение.

7. Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^3$ ($x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$):

a) $\Delta u = \frac{1}{r^4}$, $r > 2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
 $(u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi)$;

б) $\Delta u = 6z$, $r < 1$, $u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta$.

16.26(3); 16.27(3); 16.28(2); 16.31(1).

Составитель задания

к. ф.-м. н., доцент Т. В. Михайлова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Теория поля

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФПМИ

кафедра: теоретической физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.

лекции – 30 часов

Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц. Л. Е. Федичкин

Программа принята на заседании

кафедры теоретической физики

25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Классическая система зарядов в электромагнитном поле.

Скалярный и векторный потенциалы как компоненты 4-вектора. Электрическое и магнитное поля и их выражения через компоненты 4-потенциала. Калибровочная инвариантность. Лоренцева калибровка. Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле, сила Лоренца. Гамильтонова форма уравнений движения, гамильтониан. Связь обобщенного импульса с кинематическим.

2. Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов.

Фундаментальные законы Кулона, Био–Савара, Фарадея и их соответствие уравнениям Максвелла. Волновые уравнения, их вид в лоренцевой и кулоновской калибровках. Энергия электромагнитного поля, закон сохранения энергии, вектор Пойнтинга и тензор напряжений. Функция Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы.

3. Энергия системы зарядов в электромагнитном поле.

Взаимодействие системы зарядов со статическим электрическим полем. Разложение энергии взаимодействия по мультиполям, дипольный и квадрупольный моменты. Поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях, поле диполя и квадруполя. Взаимодействие систем зарядов, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Взаимодействие системы зарядов, совершающей финитное движение с магнитным полем, гиромангнитное отношение и магнитный момент системы зарядов.

4. Свободное электромагнитное поле.

Решение волновых уравнений свободного электромагнитного поля в виде плоской монохроматической волны, поляризация. Энергия свободного электромагнитного поля. Разложение свободного поля по нормальным колебаниям – плоским монохроматическим волнам. Гамильтониан свободного электромагнитного поля.

5. Излучение.

Излучение электромагнитного поля системой зарядов, квазистационарная и волновая зоны. Электрическое дипольное, квадрупольное и магнитное дипольное излучение. Потеря энергии системой зарядов на излучение, сила радиационного трения.

НАЧАЛА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

1. Математический аппарат квантовой механики.

Основные постулаты квантовой механики и их следствия. Векторная (дираковская) формулировка. Состояние и пространство состояний, физические величины (наблюдаемые) и операторы, полнота описания квантовой системы. Принцип суперпозиции состояний и его статистическая интерпретация. Необходимость представления амплитуд вероятности комплексными числами. Скалярное произведение. Ортонормированный базис. Линейные операторы. Матрицы. Прямое и тензорное произведения. Произведение операторов. Понятие представления, координатное и импульсное представление, волновая функция, матричные элементы операторов. Задача на собственные значения. Эрмитовское сопряжение и эрмитовы операторы. Собственные векторы и собственные значения операторов.

2. Гамильтониан и другие основные операторы

Гамильтоновы системы, классический и квантовый гамильтонианы. Уравнение Шредингера. Эволюция физических величин во времени, скобки Пуассона. Квантовые скобки Пуассона. Коммутатор операторов. Соответствие между физическими величинами и операторами. Требования к физическим (наблюдаемым) величинам и их связь с эрмитовыми операторами. Соотношения неопределенностей для квантовых систем. Постулат коммутационного соотношения между операторами координаты и импульса. Представление операторов координаты и импульса в координатном и импульсном представлении. Функция от оператора, уравнение Шредингера в координатном и импульсном представлении.

3. Некоторые свойства операторов

Эволюция состояния во времени, оператор эволюции. Унитарные операторы. Интегралы движения. Условия одновременной измеримости физических величин. Интегралы движения и полный набор физических величин. Вырождение спектра и неоднозначность выбора представления (способа описания) состояния квантовой системы. Понятие симметрии.

4. Гармонический осциллятор

Гамильтониан, трехмерный и одномерный гармонические осцилляторы. Осцилляторные единицы энергии, длины и импульса.

Повышающий $\hat{a}^+$ и понижающий $\hat{a}$ операторы и запись с их помощью гамильтониана. Решение задачи в энергетическом представлении, энергетический спектр осциллятора и состояния. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса в осцилляторе и его минимизация в основном состоянии. Понятие когерентного состояния. Состояния осциллятора в координатном и импульсном представлении.

5. Момент импульса

Изотропия пространства и момент импульса. Оператор поворота и его связь с оператором импульса. Коммутационные соотношения для проекций оператора импульса. Собственные состояния системы, обладающей определенным значением импульса. Значения, которые может принимать момент импульса. Координатное представление оператора момента, собственные функции. Полуцелые значения и понятие спина. Матрицы Паули. Спин $1/2$.

Основная литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — Москва : Физматлит, 2018.
2. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. — Москва : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.
3. Белоусов Ю.М. Методы теоретической физики. Часть 1. — Москва : МФТИ, 2010.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика. — Москва : Физматлит, 2019.
5. Белоусов Ю.М. Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория. — Москва : МФТИ, 2006.

Дополнительная литература

1. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — Москва : Мир, 1965.
2. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. — Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003.
3. *Фомичев С.В., Толоконников С.В.* Излучение заряженных частиц в вакууме : учебно-методическое пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
4. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория : учебно-методическое пособие. — Москва : МФТИ, 2001.
5. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис : Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2005.
6. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2009.
7. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1973.
8. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.
9. *Елютин П.В., Кривченко В.Д.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1976.
10. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. — Москва : Наука, 1976.
11. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. — Москва : Наука, 1981.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

1. Тензорные обозначения и векторный анализ

Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

$\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга.

$e_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный трехмерный тензор третьего ранга:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \quad e_{123} = e_{xyz} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}a_\alpha b_\beta, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}, \quad e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta\gamma} = 6.$$

Усреднение по единичному радиус-вектору $\mathbf{n} \equiv \mathbf{r}/r$:

$$\overline{n_\alpha} = 0; \quad \overline{n_\alpha n_\beta} = \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}; \quad \overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma} = 0;$$

$$\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta} = \frac{1}{15}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}).$$

Векторный оператор дифференцирования:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\Delta = (\nabla \cdot \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}, \quad \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \times \mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta},$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \equiv a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z} = a_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \Delta \mathbf{a}, \quad \text{div } [\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \cdot \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{b},$$

$$\text{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= [\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b}] + [\mathbf{b} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}] + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \\ \operatorname{rot} f \mathbf{a} &= [\operatorname{grad} f \times \mathbf{a}] + f \operatorname{rot} \mathbf{a}, \quad \operatorname{div} f \mathbf{a} = (\operatorname{grad} f \cdot \mathbf{a}) + f \operatorname{div} \mathbf{a}.\end{aligned}$$

Формулы для величин, содержащих радиус-вектор и его модуль $r \equiv |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$$\nabla r = \mathbf{r}/r \equiv \mathbf{n}; \quad \nabla f(r) = df/dr \cdot \mathbf{n}; \quad \operatorname{div} \mathbf{r} = 3; \quad \operatorname{rot} \mathbf{r} = 0;$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{a}; \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{a}; \quad \operatorname{rot}[\mathbf{a} \times \mathbf{r}] = 2\mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \text{const}).$$

Лапласиан от сферически-симметричной функции:

$$\Delta f(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}.$$

Теоремы Гаусса и Стокса:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} = \oint_S (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}); \quad \oint_L (\mathbf{a} \cdot d\mathbf{l}) = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}).$$

Разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \cdot \nabla)^n \mathbf{F}(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{a} \cdot \nabla)} \mathbf{F}(\mathbf{r}).\end{aligned}$$

2. Преобразование Фурье

(разложение по плоским волнам)

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \iiint \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}.$$

3. Разложение плоской волны и кулоновского потенциала по полиномам Лежандра

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (R > r).$$

Здесь $P_l(x)$ — полиномы Лежандра, $j_l(z)$ — сферические функции Бесселя:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Ортогональность полиномов Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \frac{2}{(2l+1)}, \quad P_l(1) = 1.$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$

4. Формула Сохоцкого. Дельта-функция

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x).$$

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x),$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), \quad (f(x_n) = 0).$$

5. Функции Грина

Уравнение Пуассона:

$$\Delta G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{1}{r}.$$

Уравнение Гельмгольца:

$$(\Delta + k^2) G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Волновое уравнение:

$$\square G(\mathbf{r}, t) \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) G(\mathbf{r}, t) = 4\pi\delta(\mathbf{r})\delta(t),$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(t - r/c)}{r}.$$

ЗАДАНИЕ 1

Упражнения

1. Найдите обратное преобразование Лоренца (обратную матрицу) $(L^{-1})^i_k$ и убедитесь, что

$$(L^{-1})^i_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}. \quad (1)$$

- 2.^C Убедитесь, что два последовательно проведенных преобразования Лоренца относительно одной и той же оси $\hat{L}(\beta_1)$ и $\hat{L}(\beta_2)$ также определяются матрицей $\hat{L}(\beta_{12})$. Получите релятивистский закон сложения скоростей. Покажите, что он эквивалентен закону сложения аргументов гиперболических функций.

- 3.* Покажите, что произведение двух полностью антисимметричных тензоров можно представить в виде определителя матрицы:

$$e^{iklm}e^{pqrs} = \det \begin{pmatrix} \delta_p^i & \delta_q^i & \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_p^k & \delta_q^k & \delta_r^k & \delta_s^k \\ \delta_p^l & \delta_q^l & \delta_r^l & \delta_s^l \\ \delta_p^m & \delta_q^m & \delta_r^m & \delta_s^m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

4. Убедитесь в том, что свертка по двум парам индексов двух полностью антисимметричных тензоров равна:

$$e^{ikpq}e_{lmpq} = 2(\delta_l^i\delta_m^k - \delta_m^i\delta_l^k). \quad (3)$$

5. Вычислите свертку

$$e^{ilmn}e_{klmn}. \quad (4)$$

6. Покажите, что надлежащим выбором калибровки всегда можно положить скалярный потенциал $\varphi = 0$, а векторный потенциал может быть положен равным 0 только в случае статического поля.
7. Запишите в инвариантной форме скалярный потенциал однородного электрического поля $\mathcal{E}$ и векторный потенциал однородного магнитного поля $\mathcal{H}$.

ЗАДАЧИ

- 1.^C Для нейтрино, образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса мюона ≈ 105 МэВ), определите энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π -мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит изотропно.
2. Используя закон сохранения 4-импульса при столкновении частиц, определите изменение частоты плоской монохроматической волны (фотона) при рассеянии ее на электроном на угол θ относительно первоначального направления распространения $\mathbf{k}$.
- 3.^C Рассмотрите в четырехмерной форме движение релятивистской заряженной частицы в скрещенных постоянных электрическом $\mathbf{E}$ и магнитном $\mathbf{H}$ полях, угол между которыми равен θ . Чему равна скорость дрейфа в случае $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$ при $E < H$?
4. Найдите тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида вращения с зарядом $-Q$, в центре которого помещен точечный заряд $+Q$ с полуосями a и b . Полуось a совпадает с осью вращения. Определите электрическое поле на больших расстояниях, а также энергию взаимодействия эллипсоида с электрическим диполем $\mathbf{d}$, расположенным на большом расстоянии от него в точке $\mathbf{r}$.
- 5.^C Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e , движущаяся со скоростью $\mathbf{v}$, попадает в однородное магнитное поле $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$. Определите изменение энергии частицы во времени и ее траекторию.
6. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$.
7. Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью электронного облака

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

где e — заряд электрона и $a \sim 10^{-8}$ см — боровский радиус. Найдите энергию взаимодействия электронного облака с ядром:

- а) считая ядро точечным зарядом;
- б) считая ядро сферически-симметричным заряженным шаром

радиуса $r_0 \sim 10^{-13}$ см с плотностью заряда $\rho_{\text{ядра}}(r)$. Получить ответ для частного случая равномерно заряженного шара.

8. Определить электрическое и магнитное поля гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны). Исходя из полученного общего результата, рассмотреть предельные случаи волновой и квазистатической зон.
9. Два одноименных заряда $(e_1, m_1; e_2, m_2; e_1 e_2 > 0)$ испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности $v_\infty \ll c$.

ЗАДАНИЕ 2

Упражнения

1. Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к операторам: а) инверсии $\hat{I}$ и б) трансляции $\hat{T}_a$.
- 2.^C Найдите собственные значения и собственные функции оператора инверсии $\hat{I}$.
- 3.^C Найдите собственные значения и собственные функции оператора трансляции $\hat{T}_a$.
4. Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

5. Раскройте следующие коммутаторы:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}^2], \quad [U(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}], \quad [U(r), \hat{\mathbf{p}}^2],$$

6. Найдите явный вид оператора $e^{i\varphi\hat{I}}$.
7. Постройте оператор, соответствующий физической величине $\varphi =$
 $= (\mathbf{r}\mathbf{p})$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ — соответственно радиус-вектор и импульс частицы.

8. Воспользовавшись повышающим и понижающим операторами $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$, найдите средние значения операторов $\hat{x}^2$, $\hat{x}^4$ и $\hat{x}^{2k+1}$ в n -м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора.

9. Раскройте коммутаторы:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma, \hat{p}_\nu],$$

10. Раскройте следующие коммутаторы:

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{r}}^2], \quad [\hat{l}_\alpha, (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}})],$$

$$[\hat{l}_\alpha, f(r)], \quad [\hat{l}_z, f(\rho)], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

11. Воспользовавшись явным видом матриц Паули, докажите справедливость следующих соотношений:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i e_{klm} \sigma_m,$$

$$(\sigma \mathbf{a})(\sigma \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \mathbf{b}) + i(\sigma [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]),$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – произвольные векторы.

ЗАДАЧИ

1. Частица массы m совершает финитное движение в одномерной “прямоугольной” потенциальной яме конечной глубины:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Исследуйте, существуют ли связанные состояния в “прямоугольной” потенциальной яме фиксированной ширины $2a$, если $U_0 \rightarrow 0$. Согласуется ли результат с соотношением неопределенностей?

Воспользуйтесь полученными результатами для оценки числа уровней электрона в металлическом образце (глубина потенциала $U_0 = 10$ эВ примерно равна работе выхода), если а) $a = 0.1$ нм (“атом”); б) $a = 10$ нм (“наночастица”); в) $a = 1$ см (“макроскопический образец”).

2. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для частицы массы m в одномерной потенциальной яме следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Что здесь можно сказать о связанных состояниях при фиксированном a и $U_0 \rightarrow 0$?

3. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и в области $x > 0$ попадает в область действия потенциала, который имеет вид: а) прямоугольной потенциальной ямы ширины a и глубины U_0 , б) прямоугольного потенциального барьера ширины a и высоты U_0 . Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы от указанных потенциалов; нарисуйте графики. Существуют ли энергии, при которых ямы и барьеры полностью прозрачны для падающих частиц? Если “да”, то сформулируйте, чем определяются эти энергии.

В случае потенциальной ямы предложите способ оценки энергии E_0 , выше которой квантовые ответы практически совпадают с классическими. Какова эта энергия при прохождении электрона сквозь наноскопический слой металла: $a = 10$ нм и $U_0 = 10$ эВ?

- 4.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерной модельной потенциальной яме, вид которой может быть представлен δ -функцией:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \delta(x),$$

где κ_0 – параметр ямы. Покажите, что в этой яме имеется только одно связанное состояние; найдите энергию уровня и волновую функцию частицы в координатном представлении. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии.

- 5.* Как выглядит стационарное уравнение Шредингера в задаче 4 в импульсном представлении? Найдите решение этого уравнения, описывающее связанное состояние частицы. Преобразуйте найденную волновую функцию частицы в импульсном представлении в волновую функцию в координатном представлении и удостоверьтесь в правильности ответа.

- 6.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} (\delta(x+a) + \delta(x-a)),$$

где κ_0 – параметр потенциала. Найдите энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров a и κ_0 ?

Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода H_2 , исследуйте зависимость энергий уровней от a при фиксированном κ_0 .

Покажите, что в случае $\kappa_0 a \gg 1$ связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. В этом же пределе $\kappa_0 a \gg 1$ найдите вероятность нахождения частицы в момент t в правой яме ($x = a$), если при $t = 0$ она находилась в левой яме ($x = -a$).

- 7.^C Частица массы m движется в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где κ_0 и a – параметры потенциала. Исследуйте, при каких отрицательных и положительных энергиях E частицы такое движение возможно. Покажите, что имеются зоны “разрешенных” и “запрещенных” энергий.

Исследуйте, что происходит с шириной зон в предельных случаях $\kappa_0 a \gg 1$ (сильная связь) и $\kappa_0 a \ll 1$ (слабая связь).

8. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ -потенциала (см. задачу 4). Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы; нарисуйте графики.
- 9.^C Частица массы m находится в связанном состоянии в δ -потенциале (см. задачу 4). В момент $t = 0$ происходит мгновенное изменение параметра ямы от κ_0 до κ_1 . Найдите вероятность “ионизации”. Обсудите эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $\kappa_1 = 0$.

- 10.* Частица массы m движется в трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном и бесконечно высокими стенками:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний.

- 11.* Частица массы m движется в мелкой двумерной потенциальной яме с “плоским” дном:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Покажите, что при сколь угодно малом U_0 существует связанное стационарное состояние частицы в этом потенциале. Найдите энергию этого состояния.

Существует ли аналогичное связанное состояние в мелкой трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном? Если “нет”, то каким должно быть U_0 для появления связанного состояния?

12. Постройте матрицы операторов углового момента $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$, а также $\hat{j}^2$, $\hat{j}_+$ и $\hat{j}_-$ для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$. Как выглядят собственные векторы операторов $\hat{j}^2$ и $\hat{j}_z$?

1-я контрольная и сдача 1-го задания:

15.03 — 22.03.2021 г.

2-я контрольная и сдача 2-го задания:

11.05 — 18.05.2021 г.

Учебное издание

**СБОРНИК
программ и заданий**

**Физтех-школа прикладной математики и информатики
(ФПМИ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка: *Н.Е. Кобзева, В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 2,5. Тираж 180 экз.
Заказ № 29.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru