Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

МФТИ

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики
(ФПМИ)

для студентов 1 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 1 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ). – Москва : МФТИ, 2021. – 60 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика:**
термодинамика и молекулярная физика
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 2 семестр
Диф. зачёт – 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:
к.ф.-м.н., проф. В. С.Булыгин
д.ф.-м.н., проф. А. В.Гавриков
д.ф.-м.н., проф. А. А.Катанин
к.ф.-м.н., доц. К. М.Крымский
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. Д. И. Холин
к.ф.-м.н., доц. И. С. Юдин

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 7 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Максимычев

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

1. Основные понятия, задачи и методы молекулярной физики. Макроскопические параметры, термодинамическая система, термодинамические параметры, термодинамическое равновесие. Нулевое начало термодинамики. Термическое и калорическое уравнения состояния.

Идеальный газ. Связь давления идеального газа с кинетической энергией молекул. Уравнение состояния идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа. Идеально-газовое определение температуры.

Работа, внутренняя энергия, теплота. Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Теплоёмкости при постоянном объёме и постоянном давлении, соотношение Майера для идеального газа. Адиабатический и политропический процессы. Адиабата и политропа идеального газа.

Скорость звука в газах.

2. Циклические процессы. Тепловые машины. КПД тепловой машины. Цикл Карно. Теоремы Карно. Холодильная машина и тепловой насос. Обратимые и необратимые процессы. Второе начало термодинамики. Эквивалентные формулировки второго начала. Неравенство Клаузиуса.

Термодинамическое определение энтропии. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах, закон возрастания энтропии. Энтропия идеального газа. Неравновесное расширение идеального газа в пустоту.

3. Термодинамические функции и их свойства. Термодинамические потенциалы: внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия, энергия Гиббса. Преобразования термодинамических функций. Соотношения Максвелла.

Максимальная работа системы при контакте с термостатом. Максимальная полезная работа системы.

4. Применение термодинамических потенциалов. Термодинамика излучения. Адиабатическое растяжение резинового и металлического стержней. Тепловое расширение твёрдых тел.

Поверхностные явления. Краевые углы, смачивание и несмачивание. Формула Лапласа. Свободная и внутренняя энергия поверхности.

5. Фаза и агрегатное состояние. Классификация фазовых переходов (I и II рода). Экстенсивные и интенсивные величины. Химический потенциал. Условия равновесия фаз для переходов I рода. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кривая фазового равновесия «жидкость–пар», зависимость давления насыщенного пара от температуры.

Фазовые диаграммы. Тройная точка. Диаграмма состояния «лёд–вода–пар». Критическая точка.

Метастабильные состояния. Перегретая жидкость и переохлаждённый пар. Зависимость давления пара от кривизны поверхности жидкости. Кипение. Роль зародышей в образовании фазы.

6. Газ Ван-дер-Ваальса как модель реального газа. Внутренняя энергия и энтропия газа Ван-дер-Ваальса. Изотермы газа Ван-дер-Ваальса и их связь с изотермами реальной системы. Правило Максвелла (правило рычага). Критические параметры и приведённое уравнение состояния. Адиабата газа Ван-дер-Ваальса. Неравновесное расширение газа Ван-дер-Ваальса в пустоту.

7. Элементы гидродинамики идеальной жидкости. Линии тока, стационарное ламинарное течение. Уравнение Бернулли для сжимаемой и несжимаемой жидкости. Изоэнтропическое течение идеального газа, истечение газа из отверстия. Эффект Джоуля–Томсона, температура инверсии.

8. Элементы теории вероятностей. Дискретные и непрерывные случайные величины, плотность вероятности. Условие нормировки. Средние величины и дисперсия. Независимые случайные величины. Нормальный закон распределения как предел распределения для суммы большого числа независимых слагаемых (без вывода). Зависимость дисперсии суммы независимых слагаемых от их числа («закон $\sqrt{N}$»).

9. Распределение Максвелла: распределения частиц по компонентам скорости и абсолютным значениям скорости. Наиболее вероятная, средняя и среднеквадратичная скорости. Распределение Максвелла по энергиям.

Элементы молекулярно-кинетической теории. Плотность потока частиц, движущихся в заданном направлении. Среднее число и средняя энергия частиц, вылетающих в вакуум через малое отверстие в сосуде.

Распределение Больцмана в поле внешних сил. Барометрическая формула. Распределение Максвелла—Больцмана.

10. Элементы статистической физики классических идеальных систем. Фазовое пространство, макро- и микросостояния, статистический вес макросостояния. Статистическое определение энтропии. Статистическая сумма. Аддитивность энтропии независимых подсистем. Закон возрастания энтропии. Третье начало термодинамики (теорема Нернста). Распределение Гиббса–Больцмана для идеального газа. Понятие о каноническом распределении Гиббса.

Зависимость статистического веса и энтропии от числа частиц в системе. Изменение энтропии при смешении газов, парадокс Гиббса.

11. Приложения статистической физики. Статистическая сумма. Классическая теория теплоёмкостей: закон равномерного распределения энергии теплового движения по степеням свободы. Теплоёмкость кристаллов (закон Дюлонга–Пти). Элементы квантовой теории теплоёмкостей. Замораживание степеней свободы, характеристические температуры. Зависимость теплоёмкости C_V газов от температуры.

Статистическая температура. Свойства двухуровневой системы, инверсная заселённость.

12. Флуктуации. Связь вероятности флуктуации с изменением энтропии системы. Флуктуации аддитивных величин, зависимость флуктуаций от числа частиц. Флуктуация числа частиц в выделенном объёме. Флуктуация энергии системы в жёсткой термостатированной оболочке. Флуктуация объёма в изотермическом и адиабатическом процессах. Влияние флуктуаций на чувствительность измерительных приборов (пружинные весы, газовый термометр).

13. Столкновения. Эффективное газокинетическое сечение. Длина свободного пробега. Распределение молекул по длинам свободного пробега. Число столкновений молекул в единице объёма.

Явления молекулярного переноса: диффузия, теплопроводность, вязкость. Законы Фика, Фурье и Ньютона. Коэффициенты переноса в газах. Уравнение диффузии и теплопроводности. Температуропроводность. Стационарные и квазистационарные распределения концентрации и температуры.

14. Диффузия как процесс случайных блужданий. Задача о случайных блужданиях, среднеквадратичное смещение частицы при большом числе шагов. Расплывание облака частиц и распространение тепла за счёт теплопроводности.

Броуновское движение макроскопических частиц. Закон Эйнштейна–Смолуховского для смещения броуновской частицы. Связь подвижности частицы и коэффициента диффузии облака частиц (соотношение Эйнштейна).

15. Стационарное ламинарное течение вязкой жидкости/газа по прямолинейной трубе, формула Пуазейля. Течение разрежённого газа по прямолинейной трубе. Явления переноса в разрежённых газах: эффект Кнудсена (эффузия), зависимость коэффициента теплопроводности разрежённого газа от давления.

Безразмерные параметры и законы подобия для течений. Число Рейнольдса. Число Кнудсена. Эффект Магнуса и подъёмная сила при обтекании крыла (качественное объяснение).

16. Введение в неравновесную термодинамику. Локальное термодинамическое равновесие. Неравновесная термодинамика при малых отклонений от термодинамического равновесия (линейная теория), термодинамические силы и потоки, соотношения взаимности Онзагера, перекрёстные термодинамические явления (термоэлектрический эффект, термомеханический и механокалорический эффекты). Производство энтропии, принципы минимума производства энтропии и наименьшего рассеяния энергии в необратимых термодинамических процессах.

Нелинейная термодинамика, флуктуации в диссипативных системах вдали от положения термодинамического равновесия, "порядок из хаоса" (ячейки Бенара, реакция Белоусова–Жаботинского).

ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. *Кириченко Н.А.* Термодинамика, статистическая молекулярная физика. – Москва : Физматкнига, 2012.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. II. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Физматлит, 2006.
3. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика / под ред. Ю.М. Ципенюка. Часть V. Главы 1–4. – Москва : Физматлит, 2001.
4. *Белонучкин В.Е.* Краткий курс термодинамики. – Москва : МФТИ, 2010.
5. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1 / под ред. А. Д. Гладуна. – Москва : МФТИ, 2012.
6. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В. А. Овчинкина (3-е изд., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2013.

Дополнительная литература

1. *Щёголев И.Ф.* Элементы статистической механики, термодинамики и кинетики. – Москва.: Янус, 1996; Москва : Интеллект, 2008.
2. *Ландау Л.Д., Ахиезер А.И., Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. – Москва : Интеллект, 2014 (4-е изд.).
3. *Базаров И.П.* Термодинамика. – Москва : Высшая школа, 1983.
4. *Рейф Ф.* Статистическая физика (Берклеевский курс физики). Т. 5. – Москва : Наука, 1972.
5. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.
6. *Пригожин И., Кондепуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. – Москва : Мир, 2009.
7. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Термодинамика и молекулярная физика. – Москва : Высшая школа, 2009.
8. *Прут Э.В., Кленов С.Л., Овсянникова О.Б.* Введение в теорию вероятностей в молекулярной физике. – Москва : МФТИ. 2002. Элементы теории флуктуаций и броуновского движения в молекулярной физике. – Москва : МФТИ, 2002.
9. *Прут Э.В.* Теплофизические свойства твёрдых тел. – Москва : МФТИ, 2009.

10. *Булыгин В.С.* Теоремы Карно. – Москва : МФТИ, 2012; Теплоёмкость и внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса. – Москва : МФТИ, 2012; Некоторые задачи теории теплопроводности. – Москва : МФТИ, 2006; Теплоёмкость идеального газа. – Москва : МФТИ, 2019;
11. *Попов П.В.* Диффузия. – Москва : МФТИ, 2016.

Электронные ресурсы

http://physics.mipt.ru/S_II/method/

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 1-го курса на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ нед.	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
1–5 февр.	**1**	Первое начало термодинамики. Теплоёмкость. Адиабатический и политропический процессы.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	1.40 1.54 1.87 2.6	1.100 1.47 1.75 1.83
8–12 февр.	**2**	Тепловые машины. Второе начало термодинамики. Изменение энтропии в обратимых процессах.	$^{0}4$ $^{0}5$ $^{0}6$	3.25 3.43 T1 4.80	3.52 3.47 4.15 4.78
15–19 февр.	**3**	Изменение энтропии в необратимых процессах. Термодинамические потенциалы.	$^{0}7$ $^{0}8$ $^{0}9$	4.75 4.43/44 5.75 5.38	4.47 T6 5.32 5.54
22 – 26 февр.	**4**	Применение термодинамических потенциалов. Преобразования термодинамических функций.	1.3 $^{0}10$ $^{0}11$ $^{0}12$	5.16 5.28 12.8 5.42	5.63 5.40 12.9 12.38
1–5 мар.	**5**	Фазовые превращения. Уравнение Клапейрона–Клаузиуса. Кипение.	$^{0}13$ $^{0}14$ $^{0}15$	11.29 11.16 11.34 12.51	11.36 11.74 11.78 12.48
8–12 мар.	**6**	Реальные газы. Уравнение Бернулли. Эффект Джоуля—Томсона.	$^{0}16$ $^{0}17$ $^{0}18$	6.17 6.52 2.11 6.68/69	6.39 6.41 2.20 6.87
15–19 мар.	**7**	Контрольная работа по 1-му заданию (по группам).			
22–26 мар.	**8**	Сдача 1-го задания.			

29 мар. –2 апр.	**9**	Основы молекулярно-кинетической теории. Распределение Максвелла.	$^{0}19$ $^{0}20$ 7.52	7.18 7.14 7.20 7.53	7.70 7.16 7.40 7.80
5–9 апр.	**10**	Распределение Больцмана. Элементы статистической физики.	$^{0}21$ $^{0}22$ $^{0}23$ $^{0}24$	8.11 8.28 8.56 8.52	8.15 8.25 8.70 8.61
12–16 апр.	**11**	Статистический смысл энтропии. Флуктуации.	$^{0}25$ $^{0}26$ $^{0}27$	9.45 Т4 9.6 9.8	8.51 Т2 9.28 9.40
19–23 апр.	**12**	Столкновения, длина свободного пробега. Явления переноса.	10.2 $^{0}28$ $^{0}29$	10.8 10.15 10.36 10.149	10.38 10.16 10.134 10.143
26–30 апр.	**13**	Явления переноса. Броуновское движение.	$^{0}30$ $^{0}31$	10.106 10.30 Т3 10.92	10.25 10.54 10.98 Т5
3–7 мая	**14**	Течение газов. Явления в разреженных газах.	$^{0}32$ $^{0}33$ $^{0}34$	10.82/83 10.68/69 10.120 $14.27^{\text{мех}}$	10.77 10.142 10.102 $14.46^{\text{мех}}$
10–21 мая	**15/16**	Сдача 2-го задания.			

Примечание

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика, термодинамика и молекулярная физика” / под ред. В.А. Овчинкина (**3-е изд**., испр. и доп.). — Москва : Физматкнига, 2013. Задачи с индексом «$^{\text{мех}}$» — из раздела «Механика».

Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

- **0** — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;
- **I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);
- **II** — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи 0 группы

1. В комнате объёмом V в течение некоторого времени был включён нагреватель. В результате температура воздуха увеличилась от T_1 до T_2. Давление в комнате не изменилось. Найти изменение внутренней ΔU энергии воздуха, содержащегося в комнате.

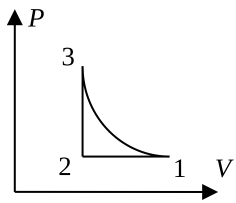
2. Найти работу, которую совершает моль воздуха, расширяясь от объёма V_0 до $V_1 = 2V_0$ в изотермическом процессе при комнатной температуре.

Ответ: 1,7 кДж.

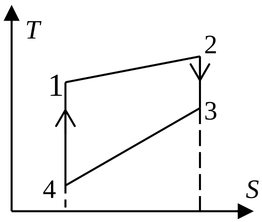
3. Температура воздуха равна $T = 273$ К. Найти изменение скорости звука при изменении температуры на $\Delta T = 1$ К.

Ответ: $\Delta c_s \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T} c_s = 0{,}61$ м/с.

4. Вычислить КПД цикла, состоящего из изобарного сжатия, изохорного нагревания и адиабатического расширения, если отношение максимального и минимального объёмов равно 2. Рабочее тело – двухатомный идеальный газ.



Ответ: 0,15.



5. Тепловая машина с неизвестным веществом в качестве рабочего тела совершает обратимый термодинамический цикл, представленный на рисунке в координатах TS. $T_2 = \frac{3}{2}T_1$, $T_3 = \frac{3}{4}T_1$, $T_4 = \frac{1}{20}T_1$. Найти КПД цикла.

Ответ: 0,68.

6. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу (тепловой насос), отбирает от первого резервуара 65 Дж теплоты и передаёт количество теплоты 80 Дж второму резервуару при T = 320 К. Определить температуру первого резервуара.

Ответ: 260 К.

7. Два теплоизолированных сосуда равного объёма соединены трубкой с краном. В одном сосуде содержится 10 г водорода H_2, второй откачан до высокого вакуума. Кран открывают и газ расширяется на весь объём. Считая газ идеальным, найти изменение его энтропии к моменту установления равновесия.

Ответ: $\Delta S = 28{,}8$ Дж/К.

8. Кусок льда массой 90 г, имеющий температур 0°С, положили в пустую алюминиевую кастрюлю массой 330 г, нагретой до 100°С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой, найти изменение энтропии системы к моменту установления равновесия. Теплота плавления льда 330 Дж/г, теплоёмкость алюминия 0,9 Дж/(г · К).

Ответ: $\Delta S = 16{,}1$ Дж/К.

9. Найти изменение свободной энергии ΔF и термодинамического потенциала Гиббса ΔG для 1 кг водяного пара при изотермическом ($T = 298$ К) увеличении давления от 1,0 до 2,0 мбар. Водяной пар считать идеальным газом.

Ответ: $\Delta G = \Delta F = 95{,}4$ кДж.

10. Уравнение состояния резиновой полосы имеет вид $f = aT\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right]$, где f — натяжение, $a = 1{,}3\cdot10^{-2}$ Н/К, l — длина полосы, длина недеформированной полосы $l_0 = 1$ м. Найти изменение свободной и внутренней энергии резины при её изотермическом растяжении до $l_1 = 2$ м. Температура $T = 300$ К.

Ответ: $\Delta F = 3{,}9$ Дж, $\Delta U = 0$.

11. Определить работу, которую необходимо совершить, чтобы разделить сферическую каплю масла массой $m = 1$ г на капельки диаметром $d = 2\cdot10^{-4}$ см, если процесс дробления изотермический. Поверхностное натяжение масла $\sigma = 26$ дин/см, плотность масла $\rho = 0{,}9$ г/см^3.

Ответ: $8{,}7\cdot10^5$ эрг.

12. На какую высоту поднимается вода между двумя плоскими параллельными пластинами, расстояние между которыми $h = 0{,}1$ мм, если краевой угол смачивания $\theta = 60°$. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73\cdot10^{-3}$ Н/м.

Ответ: 7,5 см.

13. Молярная теплота парообразования воды в точке кипения при $t = 100$ °С равна $\Lambda = 40{,}7$ кДж/моль. Считая водяной пар идеальным газом, найти разность молярных внутренних энергий жидкой воды и водяного пара при данной температуре.

Ответ: $u_п - u_ж = 37{,}6$ кДж/моль.

14. Определить температуру кипения воды на вершине Эвереста, где атмосферное давление составляет 250 мм рт. ст. Теплоту парообразования воды считать не зависящей от температуры и равной $\Lambda = 2{,}28$ кДж/г.

Ответ: 71 °С.

15. Оценить относительный перепад давления $\Delta P/P$ паров воды на высоте подъёма воды в полностью смачиваемом капилляре диаметром d = 1 мкм. Поверхностное натяжение $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м, температура $t = 20\ ^\circ\mathrm{C}$.

Ответ: $\Delta P/P \approx 2 \cdot 10^{-3}$.

16. Во сколько раз давление газа Ван-дер-Ваальса больше его критического давления, если известно, что его объём в 5 раз, а температура в 5,7 раза больше критических значений этих величин?

Ответ: $\pi = 3{,}14$.

17. Найти изменение энтропии идеального газа, подвергнутого дросселированию через пористую перегородку, если начальное давление равно $P_1 = 4$ атм, конечное $P_2 = 1$ атм.

Ответ: 11,5 Дж/К.

18. Оценить максимально возможную скорость истечения воздуха при нормальных условиях через отверстие, выходящее в вакуум.

Ответ: 740 м/с.

19. Скорости частиц с равной вероятностью принимают все значения от 0 до v_0. Определить среднюю и среднеквадратичную скорости частиц, а также абсолютную и относительную среднеквадратичные флуктуации скорости.

Ответ: $0{,}5v_0$; $v_0/\sqrt{3}$; $v_0/2\sqrt{3}$; $1/\sqrt{3}$.

20. Найти наиболее вероятную, среднюю и среднеквадратичную скорости молекул азота при T = 300 К. Сравнить полученные значения со скоростью звука.

Ответ: $v_{\text{н.в.}} = 421$ м/с, $v_{\text{ср}} = 476$ м/с, $v_{\text{кв}} = 517$ м/с; $c_{\text{зв}} = 353$ м/с.

21. Определить, на какой высоте в изотермической атмосфере её плотность уменьшится в 5 раз, если на высоте 5,5 км она уменьшается в 2 раза.

Ответ: 12,8 км.

22. Молекула может находиться на двух энергетических уровнях: основном и возбуждённом. Разность энергий между ними составляет $\Delta E = 6{,}0 \cdot 10^{-21}$ Дж. Какова доля молекул, находящихся в возбуждённом состоянии при $t = 250\ ^\circ\mathrm{C}$?

Ответ: 0,3.

23. Определить температуру, при которой средняя поступательная энергия молекулы H_2 будет равна энергии возбуждения её первого вращательного уровня. Расстояние между атомами равно $d = 0{,}74 \cdot 10^{-8}$ см.

Ответ: 116 К.

24. Собственная частота колебаний атомов в молекуле Cl_2 равна 10^{14} $с^{-1}$. Оценить характеристическую температуру, выше которой колебательную теплоёмкость молекулы можно рассчитывать по классической теории. Какова будет при этом молярная теплоёмкость газа?

Ответ: 760 К, $7R/2$.

25. Два твёрдых тела с температурами 299 К и 300 К приведены в соприкосновение. Оценить, во сколько раз более вероятна передача порции энергии 10^{-11} эрг от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой, чем в обратном направлении. Теплоёмкости тел достаточно велики, так что изменением их температуры можно пренебречь.

Ответ: 5.

26. Небольшой груз массой 1 г подвешен на лёгкой нити длиной 1 м. Оценить среднеквадратичное отклонение груза от положения равновесия из-за тепловых флуктуаций при комнатной температуре.

Ответ: $\sqrt{\langle \Delta r^2 \rangle} \approx 0{,}9$ нм.

27. Оценить среднеквадратичную относительную флуктуацию числа молекул воздуха в объёме 1 $мкм^3$ при нормальных условиях.

Ответ: 0,02%.

28. Вязкость азота при комнатной температуре и атмосферном давлении составляет $\eta = 18 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Оценить коэффициенты теплопроводности и самодиффузии азота, а также диаметр молекулы азота.

Ответ: $\kappa \sim 10^{-2}$ Вт/м·К, $D \sim 0{,}15$ $см^2/с$, $d \sim 4 \cdot 10^{-10}$ м.

29. Оценить количество тепла в расчёте на 1 $м^2$, теряемое комнатой в единицу времени через однокамерный стеклопакет. Расстояние между стёклами $h = 23$ мм. Разность температур между комнатой и улицей составляет $\Delta T = 30$ °С. Теплопроводность воздуха $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{м \cdot К}$ считать не зависящей от температуры.

Ответ: $q = 30$ $Вт/м^2$.

30. Оценить коэффициент диффузии капель тумана радиусом $R \sim 10$ мкм в воздухе при нормальных условиях. Вязкость воздуха $\eta \sim 2 \cdot 10^{-5}$ Па·с.

Ответ: 10^{-8} $см^2/с$.

31. Оценить, за какое время молекула HCN смещается в воздухе при комнатной температуре от исходного положения на расстояние порядка 10 см. Длину свободного пробега принять равной $\lambda \sim 10^{-5}$ см.

Ответ: 10^2 с.

32. Два сосуда с идеальным газом соединены трубкой, диаметр которой заметно меньше длины свободного пробега в обоих сосудах. Температура в сосудах поддерживается постоянной и равной соответственно T_1 и $T_2 = 2T_1$. Найти отношение давлений P_2/P_1.

Ответ: $\sqrt{2}$.

33. Оценить коэффициент диффузии сильно разреженного воздуха по длинной трубке диаметром 1 см при комнатной температуре. Считать, что разрежение таково, что длина пробега молекул ограничивается диаметром трубки (высокий вакуум).

Ответ: ~ 1,6 $м^2/с$.

34. Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра $d = 2$ см при расходе $Q = 30$ л/мин. Вязкость холодной воды $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с. Будет ли такое течение ламинарным?

Ответ: 10^4.

Текстовые задачи

Т-1. В двух одинаковых изолированных сосудах находится по молю воздуха при $T_0 = 300$ К. Сосуды используются в качестве тепловых резервуаров для тепловой машины, работающей по обратному циклу. Найти минимальную работу, которую должна затратить машина, чтобы охладить газ в одном из сосудов до $T_1 = 200$ К. Какова будет конечная температура газа во втором сосуде? Теплоёмкостью сосудов и зависимостью теплоёмкости воздуха от температуры пренебречь.

Ответ: $A \approx 1$ кДж, $T_2 = 450$ К.

Т-2. Найти молярную энтропию кристаллического ^{6}Li при низких температурах, пренебрегая взаимодействием ядер между собой. Момент импульса (спин) ядра ^{6}Li равен $s = 1$ (в единицах постоянной Планка $\hbar$). Согласно квантовой механике, число возможных ориентаций вектора момента импульса равно $2s + 1$.

Ответ: $S = 9{,}1$ Дж/(моль·К).

Т-3. «Пьяный матрос» совершает случайные блуждания по площади, смещаясь каждые $\tau = 4$ с на расстояние $\lambda = 0{,}5$ м в случайном направлении. Найти среднеквадратичное смещение матроса от исходного положения $\sqrt{\overline{\Delta r^2}}$ за $t = 1$ час и определить коэффициент диффузии D толпы пьяных матросов, не взаимодействующих между собой.

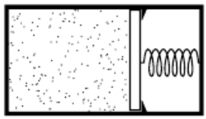
Ответ: $\sqrt{\overline{\Delta r^2}} = 15$ м, $D \approx 56{,}3$ м^2/ч.

Т-4. (5А-2017) Ионы солей иттербия имеют спин $s = 7/2$. Во внешнем магнитном поле B энергия иона зависит от ориентации спина и может принимать значения $E_m = m\mu B$, где μ — известная константа, и $m = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. Найти изменение энтропии ΔS и количество теплоты Q, поглощаемое 1 молем соли при её квазистатическом изотермическом размагничивании от очень большого ($B_0 \gg kT/\mu$) до нулевого поля ($B_1 = 0$) при температуре $T = 1$ К. Взаимодействием ионов между собой пренебречь.

Ответ: $\Delta S = 17{,}3$ Дж/К, $Q = 17{,}3$ Дж.

Т-5. (6А-2018) Вертикально расположенная пробирка высотой $h = 5$ см заполнена водой, в которой диспергированы в небольшом количестве сферические наночастицы плотностью $\rho = 4$ г/см^3 каждая. Система исходно находится в равновесии при температуре $T_0 = 300$ К, а отношение максимальной и минимальной концентраций наночастиц равно $n_{\max}/n_{\min} = 1{,}1$. На дне сосуда размещают адсорбент, поглощающий все попадающие на него наночастицы. Оценить время, требуемое для очистки воды от примеси. Вязкость воды $\eta = 10^{-3}$ Па · с.

Ответ: ~ 9 мес.



Т-6. (4Б-2018) Горизонтально расположенный теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части поршнем, прикреплённым пружиной к правой стенке сосуда (см. рис.). Слева от поршня находится 1 моль азота при комнатной температуре, справа — вакуум. Вначале пружина не деформирована, а поршень удерживается защёлкой. Защёлку убирают, и когда система приходит в равновесие, давление газа оказывается в $n = 3$ раза меньше исходного. Считая газ идеальным, найдите изменение его энтропии в этом процессе.

Ответ: $0{,}75R$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 19.03.01 «Биотехнология», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **для всех (кроме ЛФИ)**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зачет. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент М. О. Голубев
д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев
д. ф.-м. н., профессор Я. М. Дымарский
д. ф.-м. н., профессор Л. Н. Знаменская
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова
д. ф.-м. н., профессор А. П. Черняев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Точечное n–мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.

3. Непрерывность функции нескольких переменных. Непрерывность по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость (точных) нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.

6. Мера Жордана в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

7. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференци-

руемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.

8. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
9. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
10. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций. Признаки сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
11. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.
12. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
13. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
14. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции e^z.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2020.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.
5. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2004.
7. *Кудрявцев Л. Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2004.
8. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — Москва : Наука, 2000.
9. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Т 1, 2. — Москва : Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.
11. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1981.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2012. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 8–13 марта)

I. Неопределённый интеграл

С2, §1: 2(4, 17); <u>10(7)</u>; 11(5); 12(8)*; <u>15(6)</u>; 20(7); 21(3); <u>24(4)</u>.

С2, §2: <u>2(4)</u>; 3(1); 4(1); 6(5)*; 8(1); 9(4)*.

С2, §3: <u>2(7)</u>; 4(3); 5(3); <u>18(5)</u>; 19(1).

С2, §4: 1(5); <u>4(3)</u>; 15(5); 17(1)*; 18(4); 21(2).

С2, §5: 131; 139; <u>182</u>; 188.

Т.1. Вычислите интегралы: **а)*** $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$; **б)** $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\,dx$.

II. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах.

С3, §1: $\underline{14}$; 18; 24; 36; 38.

С3, §2: $\underline{9(2,6)}$ (а, б, г); 12(6); 20(4).

Т.2. Для множества $A = [1,2) \cup \{3\} \cup \big([4,5) \cap \mathbb{Q}\big) \subset \mathbb{R}$ найдите все: **а)** граничные точки; **б)** предельные точки; **в)** внутренние точки; **г)** точки прикосновения.

Т.3*. Докажите, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$, имеющее лишь конечное число предельных точек, не более чем счетно.

$\underline{\text{Т.4}}$. Является ли множество

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$$

в $\mathbb{R}^4$: **а)** открытым; **б)** замкнутым; **в)** областью?

Б) Предел и непрерывность.

С3, §2: $\underline{37(8)}$; 45; $\underline{48(7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3).

В) Частные производные, дифференциал.

С3, §3: 2(4); 19($\underline{1}$, 4); 20(3, $\underline{5}$); 21(2*, 10); 40(4).

С3, §4: 1(3); 4; 14(2); 39(6).

Г) Формула Тейлора.

С3, §4: $\underline{71(2)}$; 74(5).

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §1:** 2(4, 17); $\underline{10(7)}$; 11(5); 12(8)*; $\underline{15(6)}$; 20(7); 21(3); $\underline{24(4)}$. **С2, §2:** 2($\underline{4}$); 3(1); 4(1); 6(5)*; $\underline{8(1)}$; 9(4)*. **С2, §3:** $\underline{2(7)}$; 4(3); 5(3); $\underline{18(5)}$; 19(1).
2 неделя	**С2, §4:** 1(5); $\underline{4(3)}$; 15(5); 17(1)*; 18(4); 21(2). **С2, §5:** 131; 139; $\underline{182}$; 188; Т.1 (а), б)). **С3, §1:** $\underline{14}$; 18; 24; 36; 38.
3 неделя	**С3, §2:** 9(2, 6); 12(6); 20(4); Т.2; Т.3*; Т.4. **С3, §2:** 37($\underline{8}$); 45; $\underline{48(7)}$; $\underline{54}$; 62(5); 77(3). **С3, §3:** 2(4); 19(1, 4); $\underline{20(3,5)}$; 21(2*, 10); 40(4).
4 неделя	**С3, §4:** 1(3); 4; 14(2); 39(6). **С3, §4:** $\underline{71(2)}$; 74(5).

$\boxed{57 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 апреля)

I. Мера Жордана

С3, §7: 16; <u>22</u>; 24(2); 40(2).

Т.1. Доказать, что мера Жордана графика непрерывной на отрезке функции равна нулю.

Т.2. Измеримо ли множество нулей функции

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

в круге $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$ радиуса $R > 0$?

II. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление.

С2, §6: 7; 11; <u>24</u>; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192*.

С2, §10: <u>49(2)</u>.

<u>Т.3</u>. Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

<u>Т.4</u>. Пусть функция f ограничена на полуинтервале $(a,\,b]$ и при любом $\varepsilon \in (0,\,b-a)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a+\varepsilon,\,b]$. Доказать, что при любом доопределении функции f в точке $x = a$, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,\,b]$ и справедливо следующее равенство: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$.

<u>Т.5</u>. а) Функция f имеет первообразную F на отрезке $[a,\,b]$. Верно ли, что f интегрируема на отрезке $[a,\,b]$?

б) Функция f интегрируема на отрезке $[a,\,b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на отрезке $[a,\,b]$?

в) Пусть функция f интегрируема на $[a,\,b]$ и имеет первообразную F на отрезке $[a,\,b]$. Доказать, что верно равенство $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Т.6*. Докажите, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sign}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ интегрируема на отрезке $[0,1]$.

Т.7*. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы, то обязательно ли функция $y = f(g(x))$ также интегрируема?

Т.8*. Пусть $f \in C\big([0,+\infty)\big)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f(nx)\,dx$?

Б) Геометрические приложения определенного интеграла.

С2, §7: 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2).

С2, §8: 12(1); 13(2); 82(4).

III. Криволинейный интеграл

С3, §10: 1(3); 6(1); 17; 21(2) 27(3); 43.

IV. Несобственный интеграл

С2, §11: 70; 76; 85; 94; 100.

С2, §12: 89; 91; 98; 100; <u>104</u>; 118; 120; 136; <u>137</u>; <u>182</u>; 230.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С3, §7:** 16; <u>22</u>; 24(2); 40(2); Т.1; Т.2. **С2, §6:** 7; 11; <u>24</u>; 30; 54(5); 106; 118; 155; 192*.
2 неделя	**С2, §10:** <u>49(2)</u>; Т.3; Т.4; Т.5 (а, б, в); Т6*; Т7*; Т8*. **С2, §7:** 5(6); 26; 33(7); 69(8); 72(1); 82(2). **С2, §8:** 12(1); 13(2); 82(4).
3 неделя	**С3, §10:** 1(3); 6(1); 17; 21(2); 27(3); 43. **С2, §11:** 70; 76; 85; 94; 100.
4 неделя	**С2, §12:** 89; 91; 98; 100; <u>104</u>; 118; 120; 136; <u>137</u>; <u>182</u>; 230.

$\boxed{51 + 4^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 мая)

I. Числовые ряды

А) Ряды с неотрицательными членами.

С2, §13: 2(2); 5(6)*; <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20(1).

С2, §14: 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*.

<u>**Т.1**</u>. Является ли сходящимся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ если при $p = 1, 2, 3, \ldots$ выполняется $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}) = 0$?

Б) Знакопеременные ряды.

С2, §15: 3(2); 4(5); 8(4); 9(2).

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

Т.2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что сходятся ряды

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$; **б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

II. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10).

С2, §18: 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*.

С2, §19: 4; 6; 14; <u>22</u>.

Т.3. Может ли последовательность разрывных функций сходиться равномерно к непрерывной функции?

Т.4. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $A = (0, 1)$ и $B = (1, +\infty)$ функциональные последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:

$$\textbf{а)}\ f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}; \qquad \textbf{б)}\ f_n(x) = n\Bigl(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\Bigr).$$

III. Степенные ряды

С2, §20: 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*.

С2, §21: 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>.

Т.5. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^n}$.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §13:** 2(2); 5(6)*; <u>10(1)</u>; 11(6); <u>13(2)</u>; 14(3); 20(1). **С2, §14:** 2(5); 5(4); 12(2); 14(4); <u>19(10)</u>; <u>21(12)</u>; 27(7)*; Т.1.
2 неделя	**С2, §15:** 3(2); <u>4(5)</u>; 8(4); 9(2); Т.2(а, б). **С2, §17:** 5(4); 8(5); 9(4); 11(6); 12(5); 16(10).
3 неделя	**С2, §18:** 13(6)*; 22(2); 31(9); 33(12); <u>34(1)</u>; <u>37(11)</u>; 49*. **С2, §19:** 4; 6; 14; <u>22</u>; Т.3; Т.4 (а, б).
4 неделя	**С2, §20:** 2(5); 3(1); <u>5(1)</u>; 8(4); 9(4)*; 14(5)*. **С2, §21:** 5(5); 6(4); 11(6); 19(3); 27(1); 29(4)*; <u>56(2)</u>; <u>80</u>; Т.5.

$\boxed{49 + 7^*}$

Составитель задания ассистент А. И. Корчагин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Многомерный анализ, интегралы и ряды**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 6 зач. ед.;
лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Несобственные интегралы Римана и их свойства. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости несобственных интегралов. Интегралы от неотрицательных функций. Признак сравнения и его следствия. Признаки Дирихле и Абеля.
2. Числовые ряды и их свойства. Группировка членов ряда. Критерий Коши. Абсолютная и условная сходимости рядов. Ряды с неотрицательными членами. Признак сравнения и его следствия. Признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля. Признак Лейбница. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.
3. Равномерно сходящиеся функциональные последовательности и ряды, их свойства. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность равномерного предела непрерывных функций и суммы равномерно сходящегося ряда с непрерывными членами. Теорема о производной предела последовательности дифференцируемых функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.
4. Степенные ряды, их радиус сходимости. Формула Коши–Адамара. Равномерная сходимость степенных рядов в круге. Теорема Абеля. Комплексная дифференцируемость суммы степенного ряда. Теорема единственности. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд. Ряды Тейлора показательной, тригонометрических, степенной и логарифмической функций. Комплексная экспонента. Формулы Эйлера.
5. Метрические пространства. Последовательности в метрических пространствах. Полные метрические пространства. Полнота пространства $\mathbb{R}^n$. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Замыкание множества. Компакты и их свойства. Критерий компактности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
6. Предел и непрерывность функции, отображающей метрическое пространство в метрическое пространство. Равносильные определения предела и непрерывности. Непрерывность композиции. Критерий непрерывности через прообраз открытого множества. Непрерывные функции на компактах. Теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Связные множества в метрических пространствах. Непрерывные функции на связных множествах. Теорема о промежуточном значении. Линейно связные множества.
7. Дифференцируемость функции многих переменных в точке. Связь дифференцируемости функции с дифференцируемостью ее координатных

функций. Производная по вектору и частные производные. Необходимые условия дифференцируемости. Градиент. Достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость композиции.

8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости смешанной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции многих переменных.
9. Объем бруса в $\mathbb{R}^n$. Внешняя мера Лебега и ее свойства. Измеримые по Лебегу множества. Измеримость объединения и пересечения двух измеримых множеств. Счетная аддитивность и непрерывность меры Лебега. Измеримость открытых и замкнутых множеств. Критерий измеримости множества. Мера Лебега при линейном преобразовании.
10. Измеримые функции. Согласованность измеримости функций с арифметическими операциями. Измеримость точных граней и предела последовательности измеримых функций. Простые функции. Теорема о приближении неотрицательной измеримой функции простыми.
11. Интеграл Лебега от неотрицательной измеримой функции. Монотонность интеграла по функциям и по множествам. Теорема Б. Леви о монотонной сходимости. Линейность интеграла Лебега от неотрицательной измеримой функции. Неравенство Чебышева. Интегрируемые функции. Монотонность, линейность и счетная аддитивность интеграла Лебега интегрируемых функций. Теорема Лебега об ограниченной сходимости. Связь интеграла Лебега и определенного интеграла Римана.

Литература

Основная

1. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу, ФОПФ. Ч. 1. `https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki`

Дополнительная

2. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. — Москва : Мир, 1967.
3. *Дьяченко М. И., Ульянов П. Л.* Мера и интеграл. — Москва : Факториал, 1998.
4. *Зорич В. А.* Математический анализ. — Москва : МЦНМО, 2012.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 1–6 марта)

I. Геометрические приложения определенного интеграла

С2, §6: 136; 142; 197.
С2, §10: <u>43(1)</u>; 45*; 50(2).

С2, §7: 4(3); 33(3); <u>34(2)</u>; <u>69(11)</u>; 72(1); 82(1).

С2, §8: 12(2); 81(3)*.

II. Несобственные интегралы

С2, §11: 68; <u>84</u>; 94; 98.

С2, §12: <u>87</u>; 91; <u>104</u>; 135; 140; 183; 227; 125; <u>232</u>.

III. Числовые ряды

С2, §13: 2(2); 10(1); 13(3); 14(2).
С2, §14: <u>25(9)</u>; 2(7); 10(2); 18(4); 19(11); 21(7, 14); 24(4); <u>38</u>.

С2, §15: 3(4); 4(5); 8(6); <u>9(2)</u>.
Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость рядов.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С2, §6:** 136; 142; 197. **С2, §10:** 43(1); 45*; 50(2). **С2, §7:** 4(3); 33(3); 34(2); 69(11); 72(1); 82(1). **С2, §8:** 12(2); 81(3)*.
2 неделя	**С2, §11:** 68; 84; 94; 98. **С2, §12:** 87; 91; 104; 135; 140.
3 неделя	**С2, §12:** 183; 227; 125; 232. **С2, §13:** 2(2); 10(1); 13(3); 14(2).
4 неделя	**С2, §14:** 25(9); 2(7); 10(2); 18(4); 19(11); 21(7, 14); 24(4); 38. **С2, §15:** 3(4); 4(5); 8(6); 9(2).

$\boxed{42 + 2^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 29 марта–3 апреля)

I. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 8(3); 9(6); 12(5); 17(10).

<u>Т.1</u>. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0,\,1]$ функциональные последовательности:
а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

С2, §18: 30(9); 35(2, 8); <u>36(5)</u>; 22(1); 45; 46*.

Т.2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,\,1)$ и $E_2 = (1,\,+\infty)$ ряды: <u>а</u>) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x \sin \dfrac{1}{(xn)^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x \ln(nx)}{n^2}$.

С2, §19: 2; <u>14</u>; 22; 34*.

II. Степенные ряды

С2, §20: 2(4); <u>5(3)</u>; 8(4).

С2, §21: 6(4); 9(3); 11(4); 19(4); <u>25(4)</u>; 56(1); <u>80</u>.

III. Множества в метрических пространствах

Т.3. Выяснить, задают ли функции $\rho_1(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ и $\rho_2(x,y) = |x-y|^3$ метрики на $\mathbb{R}$.

<u>Т.4</u>. Пусть (X,ρ) – метрическое простанство, $A \subset X$ непусто. Доказать, что функция $d_A(x) = \inf\limits_{y\in A} \rho(x,y)$ непрерывна на X.

С3, §1: 28; 39(4, 6); 47.

С3, §18: 41; 49; 53.

Т.5. Являются ли множества $E_1 = \{|x_1| + |x_2| + |x_3| < 1,\ x_4 = 0\}$ и $E_2 = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_4^2\}$ областями в пространстве $\mathbb{R}^4$?

Т.6. Пусть X, Y – метрические простанства, причем метрика на X дискретная. Выяснить, какие функции $f\colon X \to Y$ являются непрерывными.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

5 неделя	**С2, §17:** 8(3); 9(6); 12(5); 17(10); Т.1.
6 неделя	**С2, §18:** 30(9); 35(2, 8); 36(5); 22(1); 45; 46*; Т.2. **С2, §19:** 2; 14; 22; 34*.
7 неделя	**С2, §20:** 2(4); 5(3); 8(4). **С2, §21:** 6(4); 9(3); 11(4); 19(4); 25(4); 56(1); 80.
8 неделя	**С3, §1:** 28; 39(4, 6); 47; Т.3; Т.4. **С3, §18:** 41; 49; 53; Т.5 Т.6.

$\boxed{36 + 2^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Предел и непрерывность

С3, §2: 9 а), б), г) (3, 6); 37(5, 8); 48(9); 62(7, 9); 71*.

Т.1. Для функции $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ исследовать существование предела в точке (0, 0). Проверить, что предел по каждому направлению равен нулю.

II. Частные производные. Дифференциал

С3, §3: 3(6); 44(5); 19(8); 20(3); 21(3, 6); 23(1); 12(1, 5).

III. Частные производные высших порядков. Формула Тейлора

С3, §4: 4; 19(1); 27(2); 71(2); 75(2).

IV. Мера Лебега

Т.2. Привести пример замкнутого множества $F \subset [0, 1]$, состоящего только из иррациональных чисел и имеющего меру не менее 0,9.

Т.3. Показать, что если граница $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет внешнюю меру нуль, то множество E измеримо.

Т.4. В кубе $[0,1]^n$ заданы n измеримых множеств $A_1, \ldots, A_n$ таких, что $\mu(A_1)+\ldots+\mu(A_n) > n-1$. Доказать, что $\cap_{k=1}^{n} A_k$ имеет положительную меру.

Т.5. Пусть E – измеримое подмножество $[0,1]$ положительной меры. Доказать, что функция $\varphi(t) = \mu(E \cap [0,t])$ непрерывна на $[0,1]$.

<u>Т.6</u>. Пусть $\mu^*(E) < \infty$. Доказать, что множество E измеримо тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется объединение брусов $C = \cup_{k=1}^{N} B_k$, такое что $\mu^*(E\Delta C) < \varepsilon$.

<u>Т.7</u>. Пусть $\{E_k\}$ – последовательность измеримых подмножеств $\mathbb{R}^n$, таких что $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ сходится. Показать, что множество $E = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in E_k$ для бесконечного множества номеров $k\}$ измеримо и $\mu(E) = 0$ (лемма Бореля–Кантелли).

Т.8*. Пусть множество $A \subset [0,1]$ измеримо и имеет меру нуль, а функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна. Верно ли, что множество $f(A)$ имеет меру нуль?

V. Измеримые по Лебегу функции

Т.9. Пусть функции $f,\ g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ измеримы. Доказать, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) = g(x)\}$ измеримо.

Т.10. Пусть $\{f_k\}$ – последовательность измеримых на E функций. Доказать, что множество $A = \{x \in E : \ \{f_n(x)\}$ ограничена$\}$ измеримо.

<u>Т.11</u>. Пусть функция $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Показать, что измеримости множества $\{x \in [0,1] \colon f(x) = c\}$ для каждого c не достаточно для измеримости f.

Т.12. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}$. Показать, что f' измерима на $\mathbb{R}$.

VI. Интеграл Лебега

Т.13. Вычислить интегралы Лебега а) $\int\limits_{(0,1]} [|\ln x|] d\mu$; б) $\int\limits_{[0,2]^2} [x+y] d\mu$;

в) $\int\limits_{[0,1]} x^2 \cdot I_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} d\mu$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть, I_E – индикатор множества E).

Т.14. Пусть функция f измерима на множестве E положительной меры и $f > 0$ на E. Доказать, что $\int\limits_E f d\mu > 0$.

<u>Т.15</u>. Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на $E = [a, +\infty)$. Доказать, что существование интеграла Лебега $\int\limits_E f d\mu$ равносильно существованию несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Останется ли утверждение верным, если убрать условие неотрицательности фуннкции?

<u>Т.16</u>. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \frac{n\sin(x^{3/2})}{1+n^2x^2}dx = 0$.

Т.17*. Пусть функция f интегрируема на $E = (0, +\infty)$. Доказать, что функция

$$I(t) = \int_E f(x)\frac{\operatorname{arctg}(tx)}{x}d\mu$$

непрерывна на $\mathbb{R}$.

Т.18*. Доказать, что если $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, дифференцируема на (a,b) и ее производная ограничена, то

$$\int_{[a,b]} f'(t)d\mu(t) = f(b) - f(a).$$

Рекомендации по решению
третьего домашнего задания по неделям

10 неделя	**С3, §2:** 9 а), б), г) $(3,6)$; $37(5,8)$; $48(9)$; $62(7,9)$; 71^*; Т.1. **С3, §3:** $3(6)$; $44(5)$.
11 неделя	**С3, §3:** $19(8)$; $20(3)$; $21(3,6)$; $23(1)$; $12(1,5)$. **С3, §4:** 4; $19(1)$; $27(2)$; $71(2)$; $75(2)$.
12 неделя	Т.2–Т.6.
13 неделя	Т.7–Т.12.
14 неделя	Т.13–Т.18.

$\boxed{36+3^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. В. Редкозубов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 19.03.01 «Биотехнология», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **для всех (кроме ЛФИ)**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., ст. преподаватель О. Г. Прончева
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.

3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.

4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.

10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Второе сопряженное пространство[1].

[1] Для потока И.А. Чубарова.

11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями[2].
13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования[3].
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение[4].
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной. Применение к классификации поверхностей второго порядка[5].

21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.

22* Основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

---

[2] Кроме потока И.А. Чубарова.
[3] Для потока И.А. Чубарова.
[4] Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова.
[5] Для потока И.А. Чубарова.

Литература

Основная

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Москва : Наука, Физматлит, 2008.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В.,Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Матрицы

Т.1. Вычислите $c_{104}^T(A_{207} + A_{209})A_{140}$.

1. Обратная матрица.

   С: 15.45(1, $\underline{2}$); 15.48(4); 15.56*; 15.58; 15.65($\underline{1}$, 5); 15.54(3)*.

2. Ранг матрицы.

   С: 16.18(17); $\underline{16.19(3)}$; 16.41*; 16.33*.

Т.2. Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

II. Системы линейных уравнений

С: $\underline{17.1(4)}$; 18.1(7, 9); 19.6(4, $\underline{20}$, 25); 18.17(4); 19.29(1)*.

III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис.

С: 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18; 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; 18.13*.

2. Сумма и пересечение; прямая сумма.
С: 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); 21.12*.

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ.
С: 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3); 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1); 23.62(3); 23.70(1).

Т.3*. Приведите примеры линейных отображений $\varphi\colon V \to V$ таких, что:

а) $V \neq \ker\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$;
б) $\ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$;
в) $\varphi^3 = 0$, но $\varphi^2 \neq 0$.

2. Действия с линейными отображениями.
С: 23.82(1); 23.83(1).

3. Линейные функции.
С: 31.21; 31.31(2); 31.35(1).

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** Т.1; 15.45(1, 2); 15.48(4); 15.56*; 15.58; 15.65(1, 5); 15.54(3)*. **С:** 16.18(17); 16.19(3); 16.41*; 16.33*; Т.2.
2 неделя	**С:** 17.1(4); 18.1(7, 9); 19.6(4, 20, 25); 18.17(4); 19.29(1)*.
3 неделя	**С:** 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18. **С:** 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; 18.13*.
4 неделя	**С:** 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); 21.12*. **С:** 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3).
5 неделя	**С:** 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1). **С:** 23.62(3); 23.70(1); Т.3*.
6 неделя	**С:** 23.82(1); 23.83(1). **С:** 31.21; 31.31(2); 31.35(1).

$\boxed{50 + 8^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость.

   С: $24.14(2)^*$; $24.20(\underline{2}, 3)$; $24.28(2)^*$; $24.30(7, 19, \underline{30})$; $24.42(1)$; $\underline{24.55(1)}$.

2. Инвариантные подпространства.

   С: $\underline{24.70}$; 24.71^*; $\underline{24.72(2)}$; $24.82(1)$.

II. Билинейные и квадратичные функции

С: $32.1(4)$; $\underline{32.2(3)}$; $32.7(2)$; 15.34; $32.8(9, \underline{12})$; $32.9(9, \underline{12})$; 32.15; $32.18(4)$.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация.

   С: $\underline{25.7}$; $25.25(2)$; $\underline{26.13(4)}$; $26.14(3)$; $26.15(2)$; $26.17(1)$; $\underline{26.27(2)}$; $26.28(1)$; $26.42(1, \underline{6})$; $26.44(2)$; 19.16^*.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования.

   С: 29.5^*; $29.7(1)^*$; $29.14(2)$; $29.19(1, \underline{7}, 11^*)$; $29.37(2)^*$; $\underline{29.47(1)}$; $25.50(2)$; 29.49^*; $29.53(3)^*$.

Т.1. Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5) а) самосопряженными; б) ортогональными?

Т.2. Преобразование φ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой:

$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x, y) f(x)\, dx$, где $K : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах.

   С: $32.27(3, \underline{13})$; $32.39(1)$; $32.36(3, \underline{4})$.

IV*. Тензоры

С: $35.3(6)$; $35.4(5)$; $35.8(1)$; $35.12(2)$; $36.25(2)$; $36.35(13)$; $36.36(1)$.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 24.14(2)*; 24.20(2, 3); 24.28(2)*; 24.30(7, 19, 30).
2 неделя	**С:** 24.42(1); 24.55(1). **С:** 24.70; 24.71*; 24.72(2); 24.82(1).
3 неделя	**С:** 32.1(4); 32.2(3); 32.7(2); 15.34; 32.8(9, 12); 32.9(9, 12); 32.15; 32.18(4).
4 неделя	**С:** 25.7; 25.25(2); 26.13(4); 26.14(3). **С:** 26.15(2); 26.17(1); 26.27(2); 26.28(1); 26.42(1, 6); 26.44(2); 19.16*.
5 неделя	**С:** 29.5*; 29.7(1)*; 29.14(2); 29.19(1, 7, 11*); 29.37(2)*; 29.47(1). **С:** ; 25.50(2); 29.49*; 29.53(3)*; Т.1; Т.2.
6 неделя	**С:** 32.27(3, 13); 32.39(1); 32.36(3, 4). **С:** 35.3(6)*; 35.4(5)*; 35.8(1)*; 35.12(2)*; 36.25(2)*; 36.35(13)*; 36.36(1)*.

$\boxed{43 + 17^*}$

Составитель задания — ассистент Ю. В. Кузьменко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Линейная алгебра**
по направлению подготовки: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:

к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент С. Е. Городецкий
к. ф.-м. н., доцент А. В. Ершов
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., ст. преподаватель О. Г. Прончева
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

2. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Теорема Фредгольма.

3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Базис и размерность.

4. Координатное представление векторов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Матрица перехода от одного базиса к другому. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве.

5. Подпространства и способы их задания в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Формула размерности суммы подпространств. Прямая сумма.

6. Линейные отображения линейных пространств и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и образ линейного отображения. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений (преобразований).

7. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в матричной форме. Изменение матрицы линейного отображения (преобразования) при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

8. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.

9. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение, его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Теорема Гамильтона–Кэли.

10. Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Второе сопряженное пространство[1].

[1] Для потока И.А. Чубарова.

11. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема (закон) инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду элементарными преобразованиями[2].
13. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.
14. Процесс ортогонализации в евклидовом пространстве. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства, ортогональное проектирование на подпространство.
15. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряженные преобразования, их свойства. Матрица сопряженного преобразования.
16. Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования. Ортогональное проектирование на подпространство как пример самосопряженного преобразования.
17. Ортогональные преобразования. Их свойства. Ортогональные матрицы. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования[3].
18. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Сингулярное разложение[4].
19. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной. Применение к классификации поверхностей второго порядка[5].

21* *Поток И.А. Чубарова*: унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные матрицы. Унитарные преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований.

22* Основы тензорной алгебры: определение тензора; тензорные обозначения и пространственные матрицы; линейные операции и умножение тензоров; свертывание; транспонирование; симметрирование и альтернирование; симметричные и антисимметричные тензоры.

---

[2] Кроме потока И.А. Чубарова.
[3] Для потока И.А. Чубарова.
[4] Для потоков О.К. Подлипского и И.А. Чубарова.
[5] Для потока И.А. Чубарова.

Литература

Основная

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Москва : Наука, Физматлит, 2008.
2. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. — Москва : МФТИ, 2006.
4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В.,Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : Физматлит, 2014. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Матрицы

Т.1. Вычислите $c_{104}^T(A_{207} + A_{209})A_{140}$.

1. Обратная матрица.
   С: 15.45(1, $\underline{2}$); 15.48(4); 15.56*; 15.58; 15.65($\underline{1}$, 5); 15.54(3)*.
2. Ранг матрицы.
   С: 16.18(17); $\underline{16.19(3)}$; 16.41*; 16.33*.

Т.2. Для матрицы из задачи 16.18(17) укажите некоторую систему базисных строк, систему базисных столбцов, некоторый базисный минор.

II. Системы линейных уравнений

С: $\underline{17.1(4)}$; 18.1(7, 9); 19.6(4, $\underline{20}$, 25); 18.17(4); 19.29(1)*.

III. Линейные пространства

1. Подпространства, линейная оболочка, базис.

С: 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18; 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; 18.13*.

2. Сумма и пересечение; прямая сумма.
   С: 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); 21.12*.

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения; ядро и образ.
   С: 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3); 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1); 23.62(3); 23.70(1).

Т.3*. Приведите примеры линейных отображений $\varphi\colon V \to V$ таких, что:

а) $V \neq \ker\varphi \oplus \mathrm{Im}\varphi$;
б) $\ker\varphi = \mathrm{Im}\varphi$;
в) $\varphi^3 = 0$, но $\varphi^2 \neq 0$.

2. Действия с линейными отображениями.
   С: 23.82(1); 23.83(1).

3. Линейные функции.
   С: 31.21; 31.31(2); 31.35(1).

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** Т.1; 15.45(1, 2); 15.48(4); 15.56*; 15.58; 15.65(1, 5); 15.54(3)*. **С:** 16.18(17); 16.19(3); 16.41*; 16.33*; Т.2.
2 неделя	**С:** 17.1(4); 18.1(7, 9); 19.6(4, 20, 25); 18.17(4); 19.29(1)*.
3 неделя	**С:** 20.3(4); 20.4(2); 20.8(2); 20.14(9); 20.18. **С:** 20.21; 20.22(3); 20.23(4); 20.29; 18.13*.
4 неделя	**С:** 15.94; 15.95(1); 21.2; 21.6(5); 21.7(5, 7); 21.12*. **С:** 23.8(2, 5); 23.9(2, 3); 23.14(2, 3).
5 неделя	**С:** 23.15(1); 23.29(5); 23.30(1); 23.40(1в); 23.44(1). **С:** 23.62(3); 23.70(1); Т.3*.
6 неделя	**С:** 23.82(1); 23.83(1). **С:** 31.21; 31.31(2); 31.35(1).

$\boxed{50 + 8^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения. Диагонализируемость.

С: $24.14(2)^*$; $24.20(\underline{2}, 3)$; $24.28(2)^*$; $24.30(7, 19, \underline{30})$; $24.42(1)$; $\underline{24.55(1)}$.

2. Инвариантные подпространства.

С: $\underline{24.70}$; 24.71^*; $\underline{24.72(2)}$; $24.82(1)$.

II. Билинейные и квадратичные функции

С: $32.1(4)$; $\underline{32.2(3)}$; $32.7(2)$; 15.34; $32.8(9, \underline{12})$; $32.9(9, \underline{12})$; 32.15; $32.18(4)$.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация.

С: $\underline{25.7}$; $25.25(2)$; $\underline{26.13(4)}$; $26.14(3)$; $26.15(2)$; $26.17(1)$; $\underline{26.27(2)}$; $26.28(1)$; $26.42(1, \underline{6})$; $26.44(2)$; 19.16^*.

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования.

С: 29.5^*; $29.7(1)^*$; $29.14(2)$; $29.19(1, \underline{7}, 11^*)$; $29.37(2)^*$; $\underline{29.47(1)}$; $25.50(2)$; 29.49^*; $29.53(3)^*$.

Т.1. Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5) а) самосопряженными; б) ортогональными?

Т.2. Преобразование φ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой:

$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x, y) f(x)\, dx$, где $K : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах.

С: $32.27(3, \underline{13})$; $32.39(1)$; $32.36(3, \underline{4})$.

IV*. Тензоры

С: $35.3(6)$; $35.4(5)$; $35.8(1)$; $35.12(2)$; $36.25(2)$; $36.35(13)$; $36.36(1)$.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 24.14(2)*; 24.20(2, 3); 24.28(2)*; 24.30(7, 19, 30).
2 неделя	**С:** 24.42(1); 24.55(1). **С:** 24.70; 24.71*; 24.72(2); 24.82(1).
3 неделя	**С:** 32.1(4); 32.2(3); 32.7(2); 15.34; 32.8(9, 12); 32.9(9, 12); 32.15; 32.18(4).
4 неделя	**С:** 25.7; 25.25(2); 26.13(4); 26.14(3). **С:** 26.15(2); 26.17(1); 26.27(2); 26.28(1); 26.42(1, 6); 26.44(2); 19.16*.
5 неделя	**С:** 29.5*; 29.7(1)*; 29.14(2); 29.19(1, 7, 11*); 29.37(2)*; 29.47(1). **С:** ; 25.50(2); 29.49*; 29.53(3)*; Т.1; Т.2.
6 неделя	**С:** 32.27(3, 13); 32.39(1); 32.36(3, 4). **С:** 35.3(6)*; 35.4(5)*; 35.8(1)*; 35.12(2)*; 36.25(2)*; 36.35(13)*; 36.36(1)*.

$\boxed{43 + 17^*}$

Составитель задания — ассистент Ю. В. Кузьменко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Кольцо многочленов над полем. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД. Основная теорема арифметики для многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.
2. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона—Кэли. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен линейного преобразования, его связь с жордановой нормальной формой.
5. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях.
6. Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (в случае, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
7. Билинейные функции. Координатная запись билинейной функции. Матрица билинейной функции и её изменение при замене базиса.
8. Симметричные билинейные функции. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Кососимметричные билинейные функции, приведение их к каноническому виду.
9. Полуторалинейные функции в комплексном пространстве. Эрмитовы квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Закон инерции для эрмитовых квадратичных форм.
10. Евклидово и эрмитово пространства. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Существование ортонормированных базисов. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
11. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Объём параллелепипеда.

12. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его свойства. Теорема Фредгольма.
13. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования.
14. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
15. Приведение квадратичной формы к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
16. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовых пространствах.

Литература

Основная

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009.
2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — 10 изд. — Москва : Наука, 2003.
3. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.

Дополнительная

4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. — Москва : Физматлит, 2003, 2006. (цитируется — Б)
2. Сборник задач по алгебре под ред. А. И. Кострикина. — Москва : Изд-во МЦНМО, 2009. (цитируется — К)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Многочлены

К: 25.2(а, г) (также найти линейное выражение НОД); 25.7(б, в); 25.8(а, г); 26.4; 26.5; 26.7(а); 26.8; 26.10*; 27.5*.

II. Собственные векторы и собственные значения. Инвариантные подпространства

Б: 24.72(1, 2); 24.80(3); 24.82(1, 2); 24.90(1); 24.94; 24.106.

Т.1. Пусть φ — линейное преобразование пространства V, p — многочлен. Обозначим $U = \operatorname{Ker} p(\varphi)$. Докажите, что U инвариантно относительно φ.

Б: 24.20(1, 3, 5); 24.19; 24.37(1, 2); 24.29; 24.30(6, 9, 21, 27); 24.32(3).

Т.2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем а) $\mathbb{Z}_3$; б) $\mathbb{Z}_5$, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Б: 24.51; 24.64; 24.54(1, 2).

Т.3. Пусть поворот трехмерного геометрического пространства вокруг некоторой оси на угол α в некотором базисе задан матрицей с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Используя инвариантность следа матрицы, найти угол α.

Т.4. Пусть A и B — квадратные матрицы одного размера. Докажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают, если:

а) A невырождена;

б)* A и B — произвольные.

К: 40.15(е); 40.10(а, б); 40.8(а, б).

III. Теорема Гамильтона—Кэли. Жорданова нормальная форма. Минимальный многочлен

Т.5. Дана квадратная матрица A порядка n и натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$. Докажите, что матрицы A^{k_1}, A^{k_2}, …, $A^{k_{n+1}}$ линейно зависимы.

Т.6. В некотором базисе преобразование φ задано матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу перехода к базису, в котором матрица A' преобразования φ — верхняя треугольная, и выписать матрицу A'.

Б: 24.116(6); 24.118(1, 2); 24.126(6, 9); 24.127(7, 11, 17) (также найти жорданов базис и минимальный многочлен матрицы); 24.140; 24.147*; 24.148*.

К: 41.1(е, ж); 41.16; 41.22(б); 41.27(а, б); 41.30; 41.14*.

Рекомендации по решению первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**К:** 25.2(а, г); 25.7(б, в); 25.8(а, г); 26.4; 26.5; 26.7(а); 26.8; 26.10*; 27.5*.
2 неделя	**Б:** 24.72(1, 2); 24.80(3); 24.82(1, 2); 24.90(1); 24.94; 24.106. Т.1.
3 неделя	**Б:** 24.20(1, 3, 5); 24.19; 24.37(1, 2); 24.29; 24.30(6, 9, 21, 27); 24.32(3). Т.2.
4 неделя	**Б:** 24.51; 24.64; 24.54(1, 2). Т.3, Т.4*. **К:** 40.15(е); 40.10(а, б); 40.8(а, б).
5 неделя	**Б:** 24.116(6); 24.118(1, 2); 24.126(6, 9); 24.127(7, 11, 17). Т.5, Т.6.
6 неделя	**Б:** 24.140; 24.147*; 24.148*. **К:** 41.1(е, ж); 41.16; 41.22(б); 41.27(а, б); 41.30; 41.14*.

$\boxed{60 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Билинейные и квадратичные формы

Б: 32.1(4, 7); 32.8(9, 11, 15); 32.9(9, 11, 15); 32.14; 32.17(2); 32.18(3); 32.21(1).

К: 37.33(б); 37.36*; 37.45(1, 2); 38.9(а).

II. Евклидовы пространства

Б: 25.6; 25.28(1, 2); 25.35(2, 3); 25.34.

Т.1*. Докажите, что матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Б: 26.5(1, 3); 26.11; 26.13(4); 26.17(4); 26.28(4); 26.44(4); 26.41; 27.28(4).

К: 43.25(а, б, в, г).

Т.2*. Пусть A — положительно определённая матрица размера 6×6. Обозначим через A_{12}, A_{34}, A_{56} три её непересекающиеся подматрицы 2×2, содержащие по два элемента главной диагонали каждая. Докажите, что $\det A \le \det A_{12} \cdot \det A_{34} \cdot \det A_{56}$.

III. Линейные преобразования евклидовых пространств

Б: 28.19(3); 28.21(1); 28.32; 28.26; 29.14(1, 3, 4); 29.19(2, 4, 6); 29.45(1, 2); 29.33(3).

Т.3. Являются ли преобразования из задачи (Б) 23.8(2, 8):
а) ортогональными;
б) самосопряжёнными?

Б: 29.47(2, 3); 29.48; 29.53(4); 26.17(4); 36.35.

К: 44.15; 44.16.

IV. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах

Б: 32.27(7, 14); 32.32(1, 2); 32.39(1); 32.36(1, 3).

V*. Тензоры

Б: 35.7; 35.4(1, 4); 36.23(1, 2); 36.25(2); 36.36(4а,б); 36.31.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**Б:** 32.1(4, 7); 32.8(9, 11, 15); 32.9(9, 11, 15); 32.14; 32.17(2); 32.18(3); 32.21(1).
2 неделя	**К:** 37.33(б); 37.36*; 37.45(1, 2); 38.9(а). **Б:** 25.6; 25.28(1, 2); 25.35(2, 3); 25.34. Т.1*.
3 неделя	**Б:** 26.5(1, 3); 26.11; 26.13(4); 26.17(4); 26.28(4); 26.44(4); 26.41; 27.28(4). **К:** 43.25(а, б, в, г). Т.2*.
4 неделя	**Б:** 28.19(3); 28.21(1); 28.32; 28.26; 29.14(1, 3, 4); 29.19(2, 4, 6); 29.45(1, 2); 29.33(3). Т.3.
5 неделя	**Б:** 29.47(2, 3); 29.48; 29.53(4); 26.17(4); 30.35. **К:** 44.15; 44.16.
6 неделя	**Б:** 32.27(7, 14); 32.32(1, 2); 32.39(1); 32.36(1, 3). **Б:** 35.7*; 35.4(1, 4)*; 36.23(1, 2)*; 36.25(2)*; 36.36(4а,б)*; 36.31*.

$\boxed{63 + 11^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Алгебра и геометрия**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 2

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 2 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2019 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Кольцо многочленов над полем. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида, линейное выражение НОД. Основная теорема арифметики для многочленов. Корни многочленов. Теорема Безу. Формальная производная. Кратные корни.
2. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен и его инвариантность. Определитель и след преобразования.
3. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих попарно различным собственным значениям. Алгебраическая и геометрическая кратность собственного значения. Условия диагонализуемости преобразования.
4. Приведение матрицы преобразования к треугольному виду. Теорема Гамильтона—Кэли. Жорданова нормальная форма, её существование и единственность. Минимальный многочлен линейного преобразования, его связь с жордановой нормальной формой.
5. Инвариантные подпространства малой размерности в комплексном и вещественном случаях.
6. Линейные рекурренты. Общий вид линейной рекурренты над произвольным полем (в случае, когда характеристический многочлен раскладывается на линейные множители).
7. Билинейные функции. Координатная запись билинейной функции. Матрица билинейной функции и её изменение при замене базиса.
8. Симметричные билинейные функции. Квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Индексы инерции квадратичной формы. Закон инерции. Положительно определённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Кососимметричные билинейные функции, приведение их к каноническому виду.
9. Полуторалинейные функции в комплексном пространстве. Эрмитовы квадратичные формы. Приведение к каноническому виду. Закон инерции для эрмитовых квадратичных форм.
10. Евклидово и эрмитово пространства. Выражение скалярного произведения в координатах. Свойства матрицы Грама. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Существование ортонормированных базисов. Изоморфизм евклидовых и эрмитовых пространств. Канонический изоморфизм евклидова пространства и сопряжённого к нему.
11. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональное проектирование. Процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Объём параллелепипеда.

12. Преобразование, сопряжённое данному. Его существование и единственность, его свойства. Теорема Фредгольма.
13. Самосопряжённые линейные преобразования. Свойства самосопряжённых преобразований. Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного преобразования.
14. Ортогональные и унитарные преобразования, их свойства. Канонический вид унитарного (ортогонального) преобразования. Полярное разложение линейного преобразования в евклидовом пространстве.
15. Приведение квадратичной формы к главным осям. Одновременное приведение пары квадратичных форм к диагональному виду.
16. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовых пространствах.

Литература

Основная

1. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : МЦНМО, 2009.
2. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — 10 изд. — Москва : Наука, 2003.
3. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. — Москва : Факториал, 2002.

Дополнительная

4. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. — Москва : Физматлит, 2003, 2006. (цитируется — Б)
2. Сборник задач по алгебре под ред. А. И. Кострикина. — Москва : Изд-во МЦНМО, 2009. (цитируется — К)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Многочлены

К: 25.2(а, г) (также найти линейное выражение НОД); 25.7(б, в); 25.8(а, г); 26.4; 26.5; 26.7(а); 26.8; 26.10*; 27.5*.

II. Собственные векторы и собственные значения. Инвариантные подпространства

Б: 24.72(1, 2); 24.80(3); 24.82(1, 2); 24.90(1); 24.94; 24.106.

Т.1. Пусть φ — линейное преобразование пространства V, p — многочлен. Обозначим $U = \operatorname{Ker} p(\varphi)$. Докажите, что U инвариантно относительно φ.

Б: 24.20(1, 3, 5); 24.19; 24.37(1, 2); 24.29; 24.30(6, 9, 21, 27); 24.32(3).

Т.2. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования 3-мерного пространства над полем а) $\mathbb{Z}_3$; б) $\mathbb{Z}_5$, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Б: 24.51; 24.64; 24.54(1, 2).

Т.3. Пусть поворот трехмерного геометрического пространства вокруг некоторой оси на угол α в некотором базисе задан матрицей с элементами a_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$. Используя инвариантность следа матрицы, найти угол α.

Т.4. Пусть A и B — квадратные матрицы одного размера. Докажите, что характеристические многочлены матриц AB и BA совпадают, если:

а) A невырождена;

б)* A и B — произвольные.

К: 40.15(е); 40.10(а, б); 40.8(а, б).

III. Теорема Гамильтона—Кэли. Жорданова нормальная форма. Минимальный многочлен

Т.5. Дана квадратная матрица A порядка n и натуральные числа $k_1, k_2, \ldots, k_{n+1}$. Докажите, что матрицы A^{k_1}, A^{k_2}, …, $A^{k_{n+1}}$ линейно зависимы.

Т.6. В некотором базисе преобразование φ задано матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу перехода к базису, в котором матрица A' преобразования φ — верхняя треугольная, и выписать матрицу A'.

Б: 24.116(6); 24.118(1, 2); 24.126(6, 9); 24.127(7, 11, 17) (также найти жорданов базис и минимальный многочлен матрицы); 24.140; 24.147*; 24.148*.

К: 41.1(е, ж); 41.16; 41.22(б); 41.27(а, б); 41.30; 41.14*.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**К:** 25.2(а, г); 25.7(б, в); 25.8(а, г); 26.4; 26.5; 26.7(а); 26.8; 26.10*; 27.5*.
2 неделя	**Б:** 24.72(1, 2); 24.80(3); 24.82(1, 2); 24.90(1); 24.94; 24.106. Т.1.
3 неделя	**Б:** 24.20(1, 3, 5); 24.19; 24.37(1, 2); 24.29; 24.30(6, 9, 21, 27); 24.32(3). Т.2.
4 неделя	**Б:** 24.51; 24.64; 24.54(1, 2). Т.3, Т.4*. **К:** 40.15(е); 40.10(а, б); 40.8(а, б).
5 неделя	**Б:** 24.116(6); 24.118(1, 2); 24.126(6, 9); 24.127(7, 11, 17). Т.5, Т.6.
6 неделя	**Б:** 24.140; 24.147*; 24.148*. **К:** 41.1(е, ж); 41.16; 41.22(б); 41.27(а, б); 41.30; 41.14*.

$\boxed{60 + 6^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Билинейные и квадратичные формы

Б: 32.1(4, 7); 32.8(9, 11, 15); 32.9(9, 11, 15); 32.14; 32.17(2); 32.18(3); 32.21(1).

К: 37.33(б); 37.36*; 37.45(1, 2); 38.9(а).

II. Евклидовы пространства

Б: 25.6; 25.28(1, 2); 25.35(2, 3); 25.34.

Т.1*. Докажите, что матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \dots & 1/(n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/(n+1) & 1/(n+2) & \dots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Б: 26.5(1, 3); 26.11; 26.13(4); 26.17(4); 26.28(4); 26.44(4); 26.41; 27.28(4).

К: 43.25(а, б, в, г).

Т.2*. Пусть A — положительно определённая матрица размера 6×6. Обозначим через A_{12}, A_{34}, A_{56} три её непересекающиеся подматрицы 2×2, содержащие по два элемента главной диагонали каждая. Докажите, что $\det A \leq \det A_{12} \cdot \det A_{34} \cdot \det A_{56}$.

III. Линейные преобразования евклидовых пространств

Б: 28.19(3); 28.21(1); 28.32; 28.26; 29.14(1, 3, 4); 29.19(2, 4, 6); 29.45(1, 2); 29.33(3).

Т.3. Являются ли преобразования из задачи (Б) 23.8(2, 8):
а) ортогональными;
б) самосопряжёнными?

Б: 29.47(2, 3); 29.48; 29.53(4); 26.17(4); 36.35.

К: 44.15; 44.16.

IV. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах

Б: 32.27(7, 14); 32.32(1, 2); 32.39(1); 32.36(1, 3).

V*. Тензоры

Б: 35.7; 35.4(1, 4); 36.23(1, 2); 36.25(2); 36.36(4а,б); 36.31.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**Б:** 32.1(4, 7); 32.8(9, 11, 15); 32.9(9, 11, 15); 32.14; 32.17(2); 32.18(3); 32.21(1).
2 неделя	**К:** 37.33(б); 37.36*; 37.45(1, 2); 38.9(а). **Б:** 25.6; 25.28(1, 2); 25.35(2, 3); 25.34. Т.1*.
3 неделя	**Б:** 26.5(1, 3); 26.11; 26.13(4); 26.17(4); 26.28(4); 26.44(4); 26.41; 27.28(4). **К:** 43.25(а, б, в, г). Т.2*.
4 неделя	**Б:** 28.19(3); 28.21(1); 28.32; 28.26; 29.14(1, 3, 4); 29.19(2, 4, 6); 29.45(1, 2); 29.33(3). Т.3.
5 неделя	**Б:** 29.47(2, 3); 29.48; 29.53(4); 26.17(4); 30.35. **К:** 44.15; 44.16.
6 неделя	**Б:** 32.27(7, 14); 32.32(1, 2); 32.39(1); 32.36(1, 3). **Б:** 35.7*; 35.4(1, 4)*; 36.23(1, 2)*; 36.25(2)*; 36.36(4а,б)*; 36.31*.

$\boxed{63 + 11^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент В. В. Штепин

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

для студентов 1 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,75. Тираж 220 экз.
Заказ № 09.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru