Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики (ФЭФМ)

для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики (ФЭФМ). – Москва : МФТИ, 2021. – 24 с.

Учебное издание

С Б О Р Н И К
п р о г р а м м и з а д а н и й

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной (ФЭФМ)

для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 1,5. Тираж 70 экз.
Заказ № 27.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 75 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
2. Теорема о разрешимости интегрального уравнения с малым непрерывным ядром.
3. Лемма об эквивалентности интегрального уравнения с непрерывным ядром интегральному уравнению с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
4. Свойства собственных значений и собственных функций интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром. Теорема Гильберта–Шмидта.
5. Задача Штурма–Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля. Её свойства. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.
6. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова. Полнота системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.
7. Уравнение Бесселя. Представление функций Бесселя в виде степенного ряда. Интегральные представления функций Бесселя. Реккурентные соотношения.
8. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя.
9. Построение формального решения смешанной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю.
10. Гармонические функции в $\mathbb{R}^3$. Основная интегральная теорема. Теорема о среднем. Принцип максимума (строгий).
11. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.
12. Правильная нормальная производная. Условия разрешимости внутренности задачи Неймана. Неединственность решения. Внешняя задача Неймана.
13. Функция Грина задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара, формула Пуассона.
14. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Производящая функция. Присоединенные функции Лежандра. Решение задачи Дирихле для шара.
15. Объемный потенциал, его свойства. Поверхности Ляпунова. Потенциал простого слоя, его свойства. Разрыв нормальной производной простого слоя.

16. Потенциал двойного слоя, непрерывность на поверхности. Разрыв потенциала двойного слоя.
17. Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Разрешимость краевых задач.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2000
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
4. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — 7-е изд. — Москва : Наука, 1992.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
7. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.
8. *Масленникова В. Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Москва : Изд-во РУДН, 1997.
9. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2001.
10. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., исправл. и доп. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Метод Фурье

20.23(2); <u>20.38</u>; 20.60(2).

<u>1</u>. Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, $(r,\ \varphi)$ — полярные координаты (x, y):

<u>а</u>) $u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r)\cos\varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u|_{r=0}| < \infty, \quad u|_{r=6} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$

<u>б</u>) $4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{0,3}r), \quad 0 < r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$
$|u|_{r=0}| < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
где μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k \in \overline{0, \infty}$, $j \in \mathbb{N}$.

2. Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$u_{tt} = \Delta u + \sin \mu_{0,1} t, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_0\left(\mu_{0,1} r\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

где μ_{01} — первый положительный ноль функции Бесселя.

3. Решить смешанную задачу для круга:

$$u_t = \Delta u + y + e^{-\mu_{0,2}^2 t} J_0(\mu_{0,2} r), \quad x^2 + y^2 < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_2(\mu_{2,3} r)\cos(2\varphi - \frac{\pi}{6}), \quad x^2 + y^2 < 1;$$

$$u|_{r=1} = ty, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad t > 0;$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \varphi(x, y)$ — полярные координаты точки (x, y), $\varphi(0, 0) = 0$, $\mu_{n,i}$ – i-тый положительный нуль функции Бесселя $J_n(\rho)$.

II. Интегральные уравнения

<u>(5.22)</u>; <u>5.23(5)</u>; 5.24(2); <u>5.25(2)</u>.

4. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin|x| + |x|y)\, \varphi(y)\, dy + a|x| + bx.$$

5. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^{1} \left(x e^{x^2} \cos^3 t + \frac{1-\cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t)\, dt + f(x).$$

При каких $f(x) \in C\,[-1;1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

<u>6</u>. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y|<1} \left(6|x|^2 - 2|y|^2\right) \varphi(y)\, dy + |x|^2 + \alpha,$$

$$|x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.
5.34; <u>5.41(2)</u>; 5.44*.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Задача Штурма–Лиувилля

15.4(8); <u>15.6(3)</u>; <u>15.15(6,7)</u>; 15.17.

1. Свести к интегральному виду задачи:

а) $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y'(\ln 2) = 0$;

<u>б</u>) $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha \geq 0$, f — непрерывная на отрезке $[0;1]$ функция.

II. Уравнения Лапласа и Пуассона в круговых областях. Метод Фурье

16.1(3); 16.2(3).

<u>2</u>. Решить краевые задачи:

<u>а</u>) $\Delta u = 12x$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 < r < 2$,
$u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi$,
$u|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi$;

б) $\Delta u = 4\dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \quad 1<r<2, \quad r=\sqrt{x^2+y^2},$

$(2u-u_r)|_{r=1} = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, \quad u_r|_{r=2} = \dfrac{8x^2}{x^2+y^2}.$

3. а) В круге $r<2$ исследовать, при каких значениях α задача Неймана

$$\Delta u = y, \quad u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi$$

имеет решение, и найти это решение.

б) Решить краевую задачу:

$$\Delta u = \frac{3(x^2-y^2)+y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \quad r>1, \quad 0\le\varphi\le 2\pi;$$

$$u_r|_{r=1} = -2\sin\varphi + 4\sin 2\varphi, \quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

III. Сферические функции

16.26(2); 16.28(2); 16.30(7); 16.31(1); 16.24*.

4. Для шара $D : x^2+y^2+z^2<4$ найти все функции $u\in C^2(D)\cap C^1(\bar D)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x,y,z)\in D$ и граничному условию $\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial\bar n}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = xz^2$, $x^2+y^2+z^2<4$, где $\bar n$ – внешняя нормаль к границе области D.

5. Для сферического слоя $D : 1<x^2+y^2+z^2<4$ найти все функции $u\in C^2(D)\cap C^1(\bar D)$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x,y,z)\in D$, и граничному условию $\left(u+\dfrac{\partial u}{\partial\bar n}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = y$, $x^2+y^2+z^2=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial\bar n}\Big|_{x^2+y^2+z^2=4} = 0$, $x^2+y^2+z^2=4$, где $\bar n$ – внешняя нормаль к границе области D.

IV. Функция Грина задачи Дирихле

17.1(1,2); 17.2(2); 17.4(1); 17.11*; 17.12(3); 17.15(4).

V. Потенциалы

18.6(1); 18.16; 18.18(4); 18.19(1); 18.20; 18.22(3); 18.43*.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков
ст. преподаватель С. И. Колесникова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов	Экзамен – нет
практические (семинарские) занятия – нет	
лабораторные занятия – 30 часов	Диф. зачёт – 6 семестр

ВСЕГО ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа – 75 часов

Программу и задания составил
д.ф.-м.н., проф. В. В. Демченко

Программа принята на заседании кафедры
вычислительной физики
24 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН И. Б. Петров

VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Задача Коши (расчёты химических реакций, электрических цепей).*[1]

Понятия о жёстких уравнениях и системах ОДУ. *A*-устойчивые схемы. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.

VIII. ОДУ. Краевые задачи (стационарные задачи диффузии вещества, теплопроводности).

Численные методы решения краевых задач:

1) метод численного построения общего решения;
2) метод прогонки;
3) метод стрельбы;
4) метод квазилинеаризации;
5) вариационные методы:
   а) Ритца;
   б) Галёркина;
   в) интегро-интерполяционный.

IX. Задачи на собственные значения (проблема устойчивости конструкций и оболочек).

Задачи на собственные значения. Численные методы решения задачи Штурма—Лиувилля.

X. Разностные схемы для уравнений с частными производными (задачи переноса излучения, динамики разреженного газа).

Примеры разностных схем для уравнений с частными производными Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Методы построения аппроксимирующих разностных схем. Спектральный признак устойчивости разностной задачи Коши. Принцип замороженных коэффициентов.

XI. Уравнения и системы уравнений с частными производными гиперболического типа (задачи акустики, газодинамики, механики сплошных сред).

Характеристические свойства уравнений. Численные методы решения уравнений переноса, волнового уравнения и систем уравнений

[1] Знаком * помечены пункты вариативной части программы.

*акустики, *газодинамики. Корректная постановка начальных и краевых условий.

XII. Численные методы решения эллиптических уравнений с частными производными (потенциальное течение жидкости, квазистационарные электромагнитные поля).

Метод установления для численного решения стационарных уравнений. *Конечные ряды Фурье. Условия сходимости. *Чебышевский набор итерационных параметров. *Попеременно-треугольный метод. *Метод конечных элементов.

XIII. Многомерные уравнения с частными производными параболического типа (задачи теплопроводности, диффузии вещества в механике сплошных сред и физике плазмы).

Линейные и квазилинейные уравнения. Явные и неявные разностные схемы, особенности их алгоритмической реализации. Экономичные методы. Метод дробных шагов.

Литература

Основная

1.*Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. II / под ред. В.В. Демченко. – Изд. 2-е перераб. и доп. – Москва : МФТИ, 2019.

2.** *Демченко В.В.* Вычислительный практикум по прикладной математике. – Москва : МФТИ, 2007. – 196 с.

3.*** Сборник задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. – Москва : МФТИ, 1996.

4. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с.; 3-е изд. – Москва : Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтеховский учебник).

5. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. – Москва : Наука, 1977. – 400с.

6. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. – Москва : Физматгиз., 1963. – 400 с.

7. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.

Дополнительная

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

2. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – Москва : Наука, 1980. – 608 с.

3. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – Москва : Наука–Физматлит, 1978. –592 с.

4. *Демченко В.В.* Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка. – 2 изд. – Москва : МФТИ, 2004. – 116 с.

1-я контрольная работа — первая половина марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи — вторая декада марта**)**
По1*:**7.1.2.;7.1.13.;7.1.20.;7.2.1.;7.2.5.;8.1.1.;8.1.2.;8.2.2.;8.3.2.;8.5.2.;8.5.4; 8.6.2.;9.2.;9.12.;9.17.**

16.** Задача дается преподавателем для практического решения на ЭВМ.

2-я контрольная работа — первая половина мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи — первая декада мая)

По **1*: 10.1.2.; 10.1.11.; 10.1.15.; 10.2.2.; 10.2.12; 10.2.20.; 11.1.8; 11.2.1; 11.2.16;11.3.1; 12.3.8;13.2.1.**

По **3***: VIII.1, VIII.2, VIII.4, VIII.5, VIII.6, VIII.7, IX.1, IX.4.**

21, 22**.** Задачи даются преподавателем для практического решения на ЭВМ.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Квантовая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 2 зачет. ед.
лекции – 30 часов Дифф. зачет – 6 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 30 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., профессор
Ю.М. Белоусов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой Ю. М. Белоусов
д.ф.-м.н., профессор

Принципы квантовой механики. Одночастичные системы

1. **Постулаты квантовой механики. Векторная (дираковская) формулировка**

   Состояние и пространство состояний, физические величины (наблюдаемые) и операторы, принцип суперпозиции, полнота описания квантовой системы, уравнение Шредингера. Понятие представления, координатное и импульсное представление, волновая функция, матричные элементы операторов. Задача на собственные значения. Эрмитовское сопряжение и эрмитовы операторы, свойства их собственных векторов.

2. **Гамильтониан и другие основные операторы**

   Гамильтоновы системы, классический и квантовый гамильтонианы. Эволюция физических величин во времени, скобки Пуассона. Квантовые скобки Пуассона – коммутаторы. Соответствие между физическими величинами и операторами. Соотношения неопределенностей для квантовых систем. Постулат коммутационного соотношения между операторами координаты и импульса. Представление операторов координаты и импульса в координатном и импульсном представлении. Функция от оператора, уравнение Шредингера в координатном и импульсном представлении.

3. **Некоторые свойства операторов**

   Эволюция состояния во времени, оператор эволюции. Интегралы движения. Условия одновременной измеримости физических величин. Интегралы движения и полный набор физических величин. Вырождение спектра и неоднозначность выбора представления (способа описания) состояния квантовой системы. Понятие симметрии.

4. **Волновая функция**

   Волновая функция как координатное представление состояния. Физический смысл и свойства волновой функции. Граничные условия для связанных состояний и инфинитного движения. Уравнение непрерывности. Плотность вероятности и плотность потока вероятности. Теоремы Эренфеста. Общие свойства одномерного движения. Невырожденность дискретного спектра, осцилляционная теорема.

5. **Гармонический осциллятор как одна из точно решаемых моделей**

   Гамильтониан, трехмерный и одномерный гармонические осцилляторы. Осцилляторные единицы энергии, длины и импульса. Повышающий $\hat{a}^+$ и понижающий $\hat{a}$ операторы и запись с их помощью гамильтониана. Решение задачи в энергетическом представлении, энергетический спектр осциллятора и состояния. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса в осцилляторе и его минимизация в основном состоянии. Понятие когерентного состояния. Состояния осциллятора в координатном и импульсном представлении.

6. **Момент импульса**

   Изотропия пространства и момент импульса. Оператор поворота и его связь с оператором импульса. Коммутационные соотношения для проекций оператора импульса. Собственные состояния системы, обладающей определенным значением импульса. Значения, которые может принимать момент импульса. Координатное представление оператора момента, собственные функции. Полуцелые значения и понятие спина.

7. **Центральное поле и атом водорода**

   Задача двух тел в классической и квантовой механике. Гамильтониан системы в случае центрального взаимодействия. Разделение радиальных и угловых переменных в сферической системе координат. Угловая часть волной функции и собственная функция оператора момента импульса. Вырождение энергетического спектра частицы в центральном поле. Кулоновское поле и атом водорода. Кулоновская и атомная система единиц. Энергетические спектр и состояния атома водорода, вырождение спектра водородоподобного атома. Классификация состояний атома водорода и частицы в произвольном центральном поле.

Приближенные методы квантовой механики

1. **Квазиклассическое приближение**

   Действие в классической механике и уравнение Гамильтона–Якоби. Волновая функция стационарного состояния и ее выражение через квантовое действие. Уравнение для квантового действия, квазиклассическое разложение по степеням $\hbar$. Критерии применимости квазиклассического приближение, классически разрешенные и запрещенные области, вид волновой функции. Правило квантования Бора–Зоммерфельда и проникновение через потенциальный барьер. Понятие квазистационарных состояний, описание распада в квантовой механике.

2. **Стационарная теория возмущений**

   Постановка задачи теории возмущений, стационарный случай. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера и ряд стационарной теории возмущений. Поправки к состояниям и уровням энергии дискретного спектра. Случай вырожденного энергетического спектра. Непрерывный спектр.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : Физматлит, 2010.
2. *Белоусов Ю.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : МФТИ, 2006.
3. *Белоусов Ю.М.* Методы теоретической физики. Часть 1. – Москва : МФТИ, 2010.
4. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физики. – Долгопрудный : ИД “Интеллект”, 2013.
5. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.

Дополнительная

1. *Мессиа А.* Квантовая механика. – Москва : Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
2. *Киселев В.В.* Квантовая механика. – Москва : МЦНМО, 2009.
3. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – Москва : МФТИ, 2005;
4. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный : ИД ”Интеллект”, 2009.
5. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1973.

ЗАДАНИЕ 1

Упражнения

1. (**2**) Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к операторам: *а*) инверсии $\widehat{I}$ и *б*) трансляции $\widehat{T}_a$.

2.[C] (**1**) Найдите собственные значения и собственные состояния оператора инверсии $\widehat{I}$.

3.[C] (**1**) Найдите собственные значения и собственные состояния оператора трансляции $\widehat{T}_a$.

4. (**1**) Покажите, что действие оператора трансляции $\widehat{T}_a$ на собственный вектор оператора координаты $|\mathbf{r}\rangle$ может быть определено с помощью экспоненты от оператора ∇.

5. (**2**) Найдите явный вид оператора $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi\widehat{I}}$.

6. (**1**) Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$\left[\widehat{A}\widehat{B},\widehat{C}\right]=\widehat{A}\left[\widehat{B},\widehat{C}\right]+\left[\widehat{A},\widehat{C}\right]\widehat{B},\quad \left[\widehat{A},\widehat{B}\widehat{C}\right]=\widehat{B}\left[\widehat{A},\widehat{C}\right]+\left[\widehat{A},\widehat{B}\right]\widehat{C}.$$

7.[C] (**1**) Докажите следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}_\alpha, F(\hat{\mathbf{p}})] = i\hbar\frac{\partial F(\hat{\mathbf{p}})}{\partial\hat{p}_\alpha};$$
$$[\hat{p}_\alpha, G(\hat{\mathbf{r}})] = -i\hbar\frac{\partial G(\hat{\mathbf{r}})}{\partial\hat{x}_\alpha}$$

8. (**3**) Пусть $\left[\widehat{A},\widehat{B}\right] = i\widehat{C}$ Покажите, что в этом случае они удовлетворяют соотношению неопределенности

$$\langle\Delta\widehat{A}^2\rangle\langle\Delta\widehat{B}^2\rangle \leq \frac{1}{4}\langle\widehat{C}\rangle,$$

где $\Delta\widehat{A} = \widehat{A} - \langle\widehat{A}\rangle$.

9. (**1**) Используя “табличный” коммутатор операторов импульса и координаты и результаты упражнений 6 и 7, раскройте следующие коммутаторы:

$$\left[\hat{x}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}^2\right],\quad \left[U(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}\right],\quad \left[U(r), \hat{\mathbf{p}}^2\right],$$

10.* (**3**) Используя свойства оператора трансляции и результаты упражнений 7 и 9, преобразуйте операторное выражение

$$e^{\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{p}}}\,U(\boldsymbol{r})\,e^{-\frac{i}{\hbar}\boldsymbol{a}\hat{\boldsymbol{p}}}.$$

11.$^{\mathrm{C}}$ (**1**) Эрмитов оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от параметра λ. Собственные значения $f_n(\lambda)$ и собственные векторы $|n(\lambda)\rangle$ этого оператора также зависят от λ. Докажите теорему Гельмана–Фейнмана:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial\lambda} = \left\langle n(\lambda)\middle|\frac{\partial\hat{f}(\lambda)}{\partial\lambda}\middle|n(\lambda)\right\rangle.$$

12. (**2**) Постройте оператор, соответствующий физической величине $\varphi = (\mathbf{rp})$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ – соответственно радиус-вектор и импульс частицы.

13. (**2**) Воспользовавшись повышающим и понижающим операторами $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$, найдите средние значения операторов $\hat{x}^2$, $\hat{x}^4$ и $\hat{x}^{2k+1}$ в n-м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора.

14. (**3**) Раскройте коммутаторы:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta\hat{p}_\gamma]\,, \quad [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta\hat{p}_\gamma]\,, \quad [\hat{x}_\alpha\hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma, \hat{p}_\nu]\,.$$

15. (**3**) Раскройте следующие коммутаторы:

$$\left[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{r}}^2\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}})\right],$$

$$\left[\hat{l}_\alpha, f(r)\right], \quad \left[\hat{l}_z, f(\rho)\right], \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. (**3**) Частица массы m совершает финитное движение в одномерной “прямоугольной” потенциальной яме конечной глубины:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Исследуйте, существуют ли связанные состояния в “прямоугольной” потенциальной яме фиксированной ширины $2a$, если $U_0 \to 0$? Согласуется ли результат с соотношением неопределенностей? Проиллюстрируйте результаты с помощью одной из стандартных компьютерных программ.

Воспользуйтесь полученными результатами для оценки числа уровней электрона в металлическом образце (глубина потенциала $U_0 = 10$ эВ примерно равна работе выхода), если *а*) $a = 0.1$ нм (“атом”); *б*) $a = 10$ нм (“наночастица”); *в*) $a = 1$ см (“макроскопический образец”).

2. (**2**) Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для частицы массы m в одномерной потенциальной яме следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Что здесь можно сказать о связанных состояниях при фиксированном a и $U_0 \to 0$?

3. (**3**) Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и в области $x > 0$ попадает в область действия потенциала, который имеет вид: *а*) прямоугольной потенциальной ямы ширины a и глубины U_0, *б*) прямоугольного потенциального барьера ширины a и высоты U_0. Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы от указанных потенциалов. Постройте графики с помощью одной из стандартных компьютерных программ. Существуют ли энергии, при которых ямы и барьеры полностью прозрачны для падающих частиц? Если “да”, то сформулируйте, чем определяются эти энергии.

В случае потенциальной ямы предложите способ оценки энергии E_0, выше которой квантовые ответы практически совпадают с классическими. Какова эта энергия при прохождении электрона сквозь наноскопический слой металла: $a = 10$ нм и $U_0 = 10$ эВ?

4.$^{\mathrm{C}}$ (**1**) Частица массы m совершает финитное движение в одномерной модельной потенциальной яме, вид которой может быть представлен δ-функцией:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m}\, \delta(x),$$

где $\varkappa_0$ – параметр ямы. Покажите, что в этой яме имеется только одно связанное состояние; найдите энергию уровня и волновую функцию частицы в координатном представлении. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии.

5.* (**4**) Получите стационарное уравнение Шредингера в задаче 4 в импульсном представлении. Найдите решение этого уравнения, описывающее связанное состояние частицы. Преобразуйте найденную волновую функцию частицы в импульсном представлении в волновую функцию в координатном представлении и удостоверьтесь в правильности ответа.

6.$^{\mathrm{C}}$ (**2**) Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m} \left(\delta(x+a) + \delta(x-a)\right),$$

где $\varkappa_0$ – параметр потенциала. Найдите энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров a и $\varkappa_0$?

Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода H_2, исследуйте зависимость энергий уровней от a при фиксированном $\varkappa_0$.

Покажите, что в случае $\varkappa_0 a \gg 1$ связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. Обсудите связь со структурой низколежащих уровней молекулы аммиака NH_3. В этом же пределе $\varkappa_0 a \gg 1$ найдите вероятность нахождения частицы в момент t в правой яме ($x = a$), если при $t = 0$ она находилась в левой яме ($x = -a$).

7.$^{\mathrm{C}}$(**2**) Частица массы m движется в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \varkappa_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где $\varkappa_0$ и a – параметры потенциала. Исследуйте, при каких отрицательных и положительных энергиях E частицы такое движение возможно. Покажите, что имеются зоны “разрешенных” и “запрещенных” энергий.

Исследуйте, что происходит с шириной зон в предельных случаях $\varkappa_0 a \gg 1$ (сильная связь) и $\varkappa_0 a \ll 1$ (слабая связь).

8. (**2**) Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ-потенциала (см. задачу 4). Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы; нарисуйте графики.

9.$^{\rm C}$(**2**) Частица массы m находится в связанном состоянии в δ-потенциале (см. задачу 4). В момент $t = 0$ происходит мгновенное изменение параметра ямы от $\varkappa_0$ до $\varkappa_1$. Найдите вероятность “ионизации”. Обсудите эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $\varkappa_1 = 0$.

ЗАДАНИЕ 2

Упражнения

1. (**3**) Постройте матрицы операторов углового момента $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$, а также $\hat{\mathbf{j}}^2$, $\hat{j}_+$ и $\hat{j}_-$ для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$. Как выглядят собственные векторы операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$?

2.$^{\rm C}$ (**1**) Воспользовавшись явным видом матриц Паули, докажите справедливость следующих соотношений:
$$\sigma_k\sigma_l = \delta_{kl} + ie_{klm}\sigma_m,$$
$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}) = (\mathbf{ab}) + \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]),$$
где **a** и **b** – произвольные векторы.

3.$^{\rm C}$ (**2**) Найдите явный вид оператора $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})}$.

4.$^{\rm C}$ (**2**) Найдите собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\hat{\sigma}_n = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор с составляющими:
$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$
Обсудите случаи, когда вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль осей x, y и z.

5. (**1**) Пусть электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z, равной $1/2$. Найдите вероятность того, что проекция спина этого электрона на направление $\mathbf{n}$ равна $1/2$ (или $-1/2$).

6. (**1**) Разложите в ряд по степеням λ оператор $\hat{G} = (\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$.

ЗАДАЧИ

1.$^{\rm C}$(**2**) Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Найти максимальное значение дипольного момента атома $\mathbf{d} = \langle\psi|e\mathbf{r}|\psi\rangle$ и волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, описывающую состояние с максимальным электрическим дипольным моментом.

$2.^{\mathrm{C}}$(**2**) Отрицательно заряженный мюон находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда "включается" магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси x, спиновое состояние мюона определяется вектором состояния с положительной проекцией спина на ось z. Определите спиновое состояние мюона $|\chi(t)\rangle$ во все последующие моменты времени в представлении Шредингера. Как выглядит оператор спина мюона $\hat{\mathbf{s}}(t)$ в представлении Гайзенберга?

Найдите вектор поляризации спина мюона $\mathbf{P}(t) = 2\langle\chi|\hat{\mathbf{s}}|\chi\rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гайзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\mathbf{P}(t)$? Меняется ли во времени длина вектора поляризации $|\mathbf{P}(t)|$?

3. (**3**) Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц с массами m_1 и m_2, $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ зависит только от расстояния между частицами. Запишите стационарное уравнение Шредингера, определяющее волновую функцию состояния этих частиц с определенной энергией E. Покажите, что для решения этого уравнения удобно воспользоваться следующими переменными:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Какой вид принимает при этом волновая функция $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$?

4. (**3**) Частица массы m движется в трехмерной потенциальной яме с "плоским" дном и бесконечно высокими стенками:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции s-состояний.

5.* (**4**) Частица массы m движется в мелкой двумерной потенциальной яме с "плоским" дном:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Покажите, что при сколь угодно малом U_0 существует связанное стационарное состояние частицы в этом потенциале. Найдите энергию этого состояния.

Существует ли аналогичное связанное состояние в мелкой трехмерной потенциальной яме с "плоским" дном? Если "нет", то каким должно быть U_0 для появления связанного состояния?

6. (**3**) Получите стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении? Как выглядит решение этого уравнения, отвечающее минимальной энергии (волновая функция основного состояния атома водорода в импульсном представлении)?

7.* (**6**) Частица массы m движется в потенциале трехмерного изотропного осциллятора:

$$U(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Найдите энергии уровней, кратности их вырождения, а также волновые функции стационарных состояний, разделяя переменные: *а*) в декартовых координатах, *б*) в сферических координатах. Обсудите связь задачи с моделью ядерных оболочек и получите первые магические числа: 2, 8, 20.

Определите четности стационарных состояний. Может ли осциллятор, находящийся в состоянии с определенной энергией, обладать отличным от нуля электрическим дипольным моментом?

8.$^{\mathrm{C}}$(**2**) Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и волновые функции связанных состояний для случаев

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & U(x) = m\omega^2 x^2/2, \\ \text{б)} & U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ m\omega^2 x^2/2, & x > 0. \end{cases} \end{array}$$

В случае *а*) (одномерный гармонический осциллятор) приведите волновые функции в квазиклассическом приближении к такому виду, чтобы было ясно, что они обладают нужной четностью. Для первых трех состояний постройте графики волновых функций, найденных в квазиклассическом приближении, и сравните их с графиками точных волновых функций.

9. (**3**) Частица массы m с энергией E “заперта” в области $r < r_0$, где $U(r) = -U_0$, высоким потенциальным барьером:

$$U(r) = 2Ze^2/r, \quad r > r_0; \quad E \ll 2Ze^2/r_0.$$

Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите коэффициент прохождения сквозь барьер.

Обсудите связь этой задачи с элементарной теорией α-распада и получите закон Гейгера–Неттола.

10. (**3**) Частица совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$; E_n – энергии стационарных состояний. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите изменения δE_n энергий стационарных состояний при малом изменении потенциала $U(x) \to U(x) + \delta U(x)$.

11.[C](**2**) Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$а)\ \hat{V} = \alpha x, \quad б)\ \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

В случае *а*) вычислите среднее значение координаты в основном состоянии. Объясните полученный результат.

12.[C](**2**) Определите расщепление уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом $n = 2$ в однородном электрическом поле (эффект Штарка). Найдите правильные волновые функции нулевого приближения и изобразите графически зависимость энергии расщепления от напряженности поля.

13.[⋆](**4**) В результате β-распада ядра атома трития образуется ион $^3He^+$. Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: *а*) в основном состоянии; *б*) на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей?

Срок сдачи первого задания 22–27 марта 2021 г.
Срок сдачи второго задания 10–15 мая 2021 г.

[1] В скобках указано количество баллов за соответствующие упражнения и задачи.
За первое задание базовый балл равен **46** и дополнительный балл – **10**.
Максимально возможный балл за первое задание равен **56**.
За второе задание базовый балл равен **30** и дополнительный балл – **14**.
Максимально возможный балл за второе задание равен **44**.