Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

МФТИ

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики
(ФЭФМ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики (ФЭФМ). – Москва : МФТИ, 2021. – 48 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: оптика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 4 семестр
Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. К. М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. Л. М. Колдунов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.т.н., доц. В. А. Овчинкин
к.ф.-м.н., доц. Ю. Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. В. Максимычев

ОПТИКА

1. Геометрическая оптика. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Полное внутреннее отражение. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических аберрациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения.

Современные применения геометрической оптики в пределе коротких длин волн: рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением.

2. Волновая оптика. Волновое уравнение, монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны, показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет. Степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера.

Нерелятивистский эффект Доплера, поиск экзопланет.

3. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Показатель преломления плазмы. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Групповая скорость. Распространение волнового пакета в неоднородной среде. Различные диапазоны длин волн, их особенности. Метаматериалы.

4. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Просветление оптики. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность, функция временной когерентности, связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера–Хинчина) и с видностью. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределенностей.

5. Интерференция при использовании протяженных источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности, функция пространственной когерентности, связь с распределением интенсивности излучения по источнику (теорема Ван Циттерта–Цернике). Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

6. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля.

Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов, теорема Бабинэ. Дифракция на краю, спираль Корню.

7. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

8. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких пленках и многослойных структурах, зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

9. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённостей. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

10. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга–Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

11. Кристаллооптика. Дихроизм, поляроиды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векторов k, E, D, B, направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии. Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц, Рэлеевское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Наведенное двулучепреломление. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм. Оптическое выпрямление. Симметрия среды и генерация второй гармоники. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка.

Понятие о комбинационном рассеянии света и вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна.

14. Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. Т. IV. – Москва : Физматлит, 2018.

2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I, ч. III, гл. 6–11. – Москва : Физматгиз, 2001.

3. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016.

4. *Бутиков Е.И.* Оптика. – Москва : Высшая школа, 1986.

5. *Ахманов С.А*. *Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : Издательство МГУ, Наука, 2004.

Дополнительная

1. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959, 2007.

2. *Ландсберг Г.С*. Оптика. – Москва : Физматлит, 2003.

3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Мсква : Наука, 1973.

4. *Козел С.М., Листвин В.И., Локшин Г.Р.* Введение в когерентную оптику и голографию. – Москва : МФТИ, 2000.

5. *Кольер Р.* Оптическая голография. – Москва : Мир, 1973.

6. *Крымский К.М.* Аберрации центрированных оптических систем – теория и расчёт. — Москва : МФТИ, 2015.

7. *Петухов В.А.* Оптические волокна : учебно-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса
на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ сем	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	**I**	**II**
01.02–06.02	**1**	Принцип Ферма. Геометрическая оптика и элементы фотометрии. Оптические инструменты.	1.4 $^{0}1$ $^{0}2$	1.29 1.22 1.9 1.56	1.15 Т1 Т2 1.57
08.02–13.02	**2**	Законы отражения, формулы Френеля. Поляризация. Поток энергии и давление света.	$^{0}1$ 11.7 2.3	2.5+2.23 2.26 2.29 2.42	2.1 2.20 2.27 2.45
15.02–22.02	**3**	Дисперсия. Фазовая и групповая скорости.	10.2 $10.5^{(2,3,5)}$ $^{0}1$	10.8 10.43 *10.75* *10.77*	10.21 10.24 10.35 Т3
01.03–06.03	**4**	Интерференция монохроматических волн.	3.3 $^{0}1$ $^{0}2$	3.5 3.10 3.18 Т4	3.16 3.11 3.20 3.35
08.03–13.03	**5**	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	$^{0}1$ 4.2 5.3 $^{0}2$	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 5.13 5.23 5.30
15.03–20.03	**6**	Дифракция Френеля. Зонные пластинки.	$^{0}1$ $^{0}2$ 6.1	6.15 6.20 *6.59* 6.43	6.16 6.31 6.50 *6.64*
22.03–27.03	**7**	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов.	7.5 $^{0}1$ $^{0}2$	7.16 7.48 7.54 *7.83*	7.10 7.53 7.59 *7.33*
29.03–04.04	**8**	Спектральные приборы.	8.2 $^{0}1$ $^{0}2$	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 Т5 Т6

05.04–10.04	**9**	Контрольная работа (по группам)			
12.04–17.04	**10**	Сдача 1-го задания			
19.04–24.04	**11**	Дифракция на синусоидальных решётках. Элементы фурье-оптики.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.1 9.15 9.22 9.26	9.11 9.17 9.28 *9.79*
26.04–01.05	**12**	Голография.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.32 9.35 *9.45* *9.52*	9.33 9.36 9.40 *9.78*
27.04–02.05	**13**	Поляризация света. Элементы кристаллооптики.	11.17 11.1 11.12	11.9 11.16 11.54 11.28	11.13 11.60 11.80 *11.121*
03.05–08.05	**14**	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	*11.125* 11.89 *11.126* Т8	11.88 11.90 *11.128* Т7
10.05–15.05	**15**	Сдача 2-го задания.			
17.05–22.05	**16**	Зачёт.			

Примечание

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина (**4-е изд**., испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2017». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

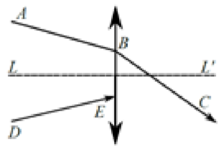
Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

- **0** — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;
- **I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи группы 0

Семинар 1



⁰1. На рис. показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC. Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.

⁰2. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 2

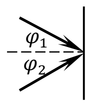
⁰1. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n, через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0.

Семинар 3

⁰1. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10$ МГц ($\lambda > 30$ м).

Семинар 4



⁰1. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0{,}01$ рад. Длина волны $\lambda = 500$ нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рис.).

Ответ: 25 мкм.

⁰2. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{мин}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

⁰1. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей $\Delta_{\max}$ и максимальное число интерференционных полос $m_{\max}$, которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

^{0}2. Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n, если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

^{0}1. Щель ширины $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

^{0}2. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ. Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

^{0}1. Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

^{0}2. Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ — длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0{,}05$.

Семинар 8

^{0}1. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

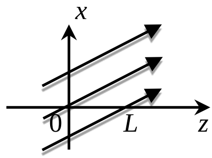
Ответ: $\delta\varphi \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ рад.

^{0}2. Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11

⁰1. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости xz под углом α к оси z. Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости $z = 0$. Найти разность фаз между колебаниями в точках $z = 0$ и $z = L$, лежащих на оси z (см. рис.).



⁰2. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A. Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

⁰3. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b.

Семинар 12

⁰1. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

⁰2. Голограмму точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластинки, записали по схеме Габора на длине волны λ. Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ?

⁰3. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

⁰1. Пользуясь формулой Рэлея, оцените коэффициент пропускания света слоем воздуха толщиной 8 км в атмосфере вблизи поверхности Земли, для двух длин волн: λ = 400 нм (фиолетовый свет) и 650 нм (красный свет). Показатель преломления воздуха принять равным $n - 1 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $T_{400} \approx 0{,}7$, $T_{700} \approx 0{,}95$.

⁰2. Лазерный пучок проходит сквозь слабопоглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

⁰3. Молекулы некоторой жидкости имеют разную поляризуемость по разным осям. Как будут ориентироваться молекулы в поле световой волны: максимальной поляризуемостью по направлению $\vec{E}$ или перпендикулярно $\vec{E}$? Ответ обосновать.

Текстовые задачи

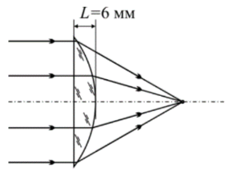
Т1. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для L_d = 0,5 м.

б) У некоторого дальнозоркого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» L_0 = 25 см. Провести расчет для L_b = 1 м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

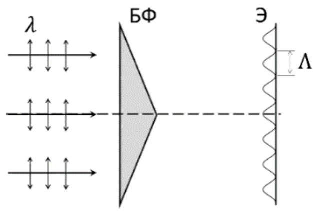
Т2. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера. гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т3. (2019) Параллельный пучок излучения длительностью 100 фс и средней длиной волны $\lambda = 500$ нм фокусируется положительной линзой толщиной $L = 6$ мм в центре и близкой к нулю на краях. Пучок заполняет всю линзу. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}7$, групповая скорость в стекле $v_{\text{гр}} = 0{,}55c$. Оценить длительность импульса в фокусе линзы.



Ответ: $\tau \simeq 2{,}4$ пс.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля БФ плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ. Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ. Определите видность V интерференционной картины.

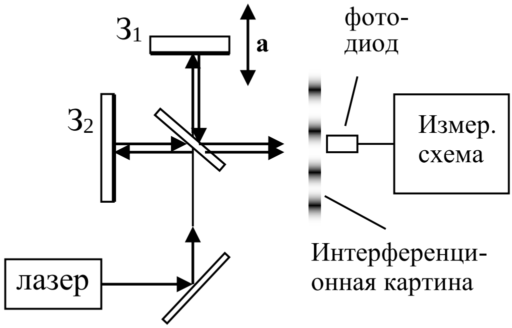


Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$.

Т5. Спектральная линия H_α атомарного водорода (λ = 6563 Å) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda \approx 0{,}16$ Å. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности ρ = 0,9, чтобы с его помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

Ответ: $L = 0{,}4$ мм, $\Delta\lambda = 5$ Å, $\theta_1 = 2{,}3°$, $D = 4 \cdot 10^{-3}$ Å^{-1}.

Т6. Современные фотодиоды обеспечивают огромный диапазон линейности, до 11 порядков по интенсивности света, то есть в этом диапазоне фототок линейно зависит от интенсивности света, падающего на фотодиод. Это позволяет измерять очень малые интенсивности модулированных по амплитуде световых сигналов на фоне гораздо более мощной постоянной засветки.



Излучение хорошо стабилизированного непрерывного лазера с длиной волны 0,6 мкм пропускается через интерферометр Майкельсона, в котором одно из зеркал $З_1$ может колебаться с малой амплитудой **a**. Зеркало $З_2$ чуть-чуть наклонено, так что в плоскости фотоприемника получаются достаточно широкие (больше размера фотоприемника) интерференционные полосы. Смещение зеркала $З_1$ приводит к смещению интерференционных полос. Оцените минимальное значение $\mathbf{a}_{\min}$ амплитуды колебаний, которое можно измерить данной схемой, если измерительное устройство позволяет обнаружить периодические колебания фототока, составляющие величину 10^{-10} от величины тока в максимуме интерференционной картины. В каком месте интерференционной картины (в максимуме, минимуме интенсивности или в другом месте) следует располагать фотодиод для получения максимальной чувствительности?

Ответ: $\mathbf{a}_{\min} \approx 10^{-16}$ см.

Т7. Кристалл ниобата лития обладает сильной нелинейностью и довольно часто используется для генерации второй гармоники. Показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны этого кристалла сильно зависят от температуры. Для необыкновенной волны $\frac{dn_e}{dT} = 5{,}4 \cdot 10^{-6}\,(°\mathrm{C})^{-1}$, а для обыкновенной $\frac{dn_o}{dT} = 37{,}9 \cdot 10^{-6}\,(°\mathrm{C})^{-1}$. Оцените, насколько надо изменить температуру кристалла, чтобы интенсивность генерации второй гармоники стала равной нулю. Считайте, что до изменения температуры было достигнуто условие фазового синхронизма, длина волны накачки равна $\lambda = 1$ мкм, а длина кристалла $l = 1$ см.

Ответ: $\delta T \approx 1.54°\text{C}$.

Т8. Найти пропускание атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного (λ = 700 нм) и фиолетового (λ = 400 нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака, ….), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен $n_0 = 1{,}0003$.

Ответ: для λ = 400 нм $I_{кон}/I_0 = 5{,}3\cdot10^{-6}$, для λ = 700 нм $I_{кон}/I_0 = 0{,}27$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школы: **ФЭФМ,ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор О. В. Бесов
д. ф.-м. н., профессор, С. А. Гриценко
д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. *Для потока О. В. Бесова: оценка скорости стремления к нулю остатка тригонометрического ряда Фурье.* Ряд Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах. *Для потока В. Ж. Сакбаева: пополнение метрического пространства; пополнение линейного нормированного пространства; теорема о пополнении.*
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортономированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированными ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и свойства его образа: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Дифференцирование обобщенных функций.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу Ч. 2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(5); 11; 14; 30; 42; 45 В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23*; 65; 67; 68; 72; 110; 111(4;3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x,\ x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания

а) x^{10}; б) x^5; в) $(x^2-\pi^2)^{10}$; г) $(\pi^2 - x^2)\sin^2 x$.

С.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

С.2. §16: 47*(2); 48(1; 3).

II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если f – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):

$\{f_n\}$ сходится равномерно к f	$\longrightarrow$ $\not\longleftarrow$	$\{f_n\}$ сходится по норме L_2 к f	$\longrightarrow$ $\not\longleftarrow$	$\{f_n\}$ сходится по норме L_1 к f
$\not\uparrow\ \downarrow$		$\not\uparrow\ \not\downarrow$		$\not\uparrow\ \not\downarrow$
$\{f_n\}$ сходится поточечно к f				

С.3. §18: 97; 98*.

4. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

С.3. §19: 116; 126*.

5. Полна ли система функций $\{x, x^3, \ldots x^{2k+1} \ldots\}$ в пространстве: а) $C([1;2])$; б) в пространстве $C([0;1])$?

6. Полна ли система $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве:

а) $C[0;\pi/2]$; б) $C[0;2]$?

$\boxed{30+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(5); 14(2); 17; 18*(2).

§15: 1(3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(<u>1</u>) — исследовать также при $\alpha \in (1;+\infty)$.

1(2) — исследовать также при $\alpha \in (0;1)$

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3, 5, <u>6</u>); 8(2).

1. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

С.3. §15: 1(4); 2(4); 3(2); 5(2); 6(<u>1</u>, 4, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 7(4); 9(3); 12(9); 10*(3).

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 254.

С.3. §17: 1(3); 2(4); 5(2); 6(<u>1</u>); 7(4); 8(1,5); 14(1,3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58*; <u>60</u>.

2. Докажите, что в D' справедливы равенства:

<u>а)</u> $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$; <u>б)</u> $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{1}{x} \sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

С.3. §21: 71; 75*; 77*; 84.

3. Найдите в D'

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}.$$

4. Упростите в D' выражения:

а) $(e^{\sin x} + x\cos x)\delta(x)$; б) $\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\delta'(x)$; в) $e^{x^2}\delta''(x)$.

$\boxed{45+6^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 16.03.01 «Техническая физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
3. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).
4. **Задача Коши.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров

и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Особое решение.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.

   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.

   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка. Теорема Штурма и следствия из нее.

   Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных урав-нений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.

4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Задача Коши

С. §5: 26; 28a.

С. §6: 36; 49.

Ф.: 1065; 1066; 1067*.

1. Доказать, что при $\alpha > 0$ любое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Рассмотреть уравнение $y'^2 - (y+1)y' + y = 0$. Показать, что прямая $y = 1$ является дискриминантным множеством для этого уравнения, но не является решением. Показать, что через каждую точку прямой $y = 1$ проходят две интегральные кривые уравнения, имеющие общую касательную. Решить краевую задачу:
$y'^2 - (y+1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = e$. Изобразить график полученного решения.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 649; <u>664</u>; 667; 668*; <u>673</u>; 678.

Ф. §22: 47*; 59.

С. §9: 10; 31; 53; <u>64</u>; 68(a).

<u>**3**</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0; \infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: <u>723</u>; 725*; 726.

С. §10: <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - 2xy' + y = 0$ на интервале $(-\infty; +\infty)$ имеет не более трех нулей.

5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1} - x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \to +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: <u>964</u>; 972*; <u>973</u>; <u>974</u>; 975; 978*.

С. §13: 9; 15; 39; 44; <u>45</u>.

$\boxed{35+7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: <u>12</u>.

Ф.: 1149.

1. Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

С. §16: 5; 26.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 5; 16; <u>22</u>; 79; <u>83</u>.

2. В области $x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$ найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

III. Вариационное исчисление

С. §19: <u>21</u>; 45; 72; <u>105</u>.

3. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7\frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12\frac{y}{x}\right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

С. §20.1: <u>9</u>; 12.

4. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int\limits_1^2 (2y + yy' + x(y'))\, dx, \quad y(1) = 1.$$

С. §20.2: 5.

С. §20.3: 2.

С. §21: <u>1</u>.

5*. Среди всех кривых на цилиндре $x^2+y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

$\boxed{23+1^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор, А. М. Тер-Крикоров

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Математические модели экспериментов со случайными исходами. Частотная интерпретация вероятности. Алгебры и σ-алгебры событий. Вероятностное пространство (аксиоматика Колмогорова).
2. Дискретные (конечные или счётные) вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Понятие меры Лебега.
3. Независимость событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
4. Схемы независимых испытаний (прямое произведение вероятностных пространств). Схема Бернулли.
5. Действительные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Основные типы распределений (дискретные, абсолютно непрерывные, смешанные). Плотность распределения.
6. Примеры распределений (биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, экспоненциальное, χ-квадрат и др.).
7. Случайные векторы и их распределения. Независимость наборов случайных величин. Многомерное нормальное распределение.
8. Числовые характеристики случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии. Моменты, ковариация, коэффициент корреляции. Понятие условного математического ожидания.
9. Виды сходимости последовательности случайных величин (по вероятности, почти наверное, в среднем квадратичном, по распределению).
10. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Многочлены Бернштейна.
11. Усиленный закон больших чисел.
12. Теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа. Оценка точности приближения.
13. Характеристические и производящие функции и их свойства.
14. Центральная предельная теорема.

15*. Основные задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко–Кантелли. Критерий χ-квадрат.

Знаком (*) отмечен необязательный материал.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность – 1. В 2-х кн. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004. — 520 с.
2. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — Москва : Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — 272 с.

3. *Чистяков В. П.* Курс теории вероятностей. — 6-е изд. — Санкт Петербург : Лань, 2003. — 272 с.
4. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Москва : Изд-во МГУ, 1992. — 400 с.
5. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 320 с.
6. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах / пер. с англ. Т. 1. — Москва : Мир, 1984. — 528 с.
7. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Эдиториал УРСС, 1999. — 472 с.
8. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — Москва : Высшая школа, 1984. — 248 с.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Зубков А. М., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Сборник задач по теории вероятностей. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989. — 320 с. (С.).
2. *Захаров В. К., Севастьянов Б. А., Чистяков В. П.* Теория вероятностей. — Москва : Наука, 1983. — 160 с. (Т).

Замечания

Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Алгебры событий

1. Среди студентов, пришедших на лекцию, наудачу выбирают одного. Пусть события A, B и C состоят соответственно в том, что выбранный человек:

а) юноша, б) не курит, в) живет в общежитии.

а) Описать событие $A \cap B \cap \overline{C}$.

б) При каком условии $A \cap B \cap C = A$?

в) Когда $\overline{C} \subseteq B$?

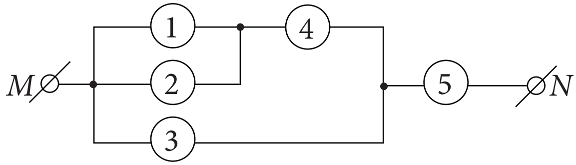
г) Когда $\overline{A} = B$? Справедливо ли это?

2. Для произвольных событий A, B проверить справедливость следующих соотношений:

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}, \qquad A \backslash B = A \backslash AB = A\overline{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B} = A(A\overline{B}).$$

3. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме:



Событие A_k — выход из строя (неисправность) k-го элемента. Записать выражения для следующих событий:

а) C и $\overline{C}$, если C — разрыв цепи;
б) нет неисправных элементов;
в) хотя бы один элемент вышел из строя;
г) только один элемент неисправен;
д) точно два элемента неисправны;
е) не более двух элементов вышли из строя;
ж) по крайней мере два элемента неисправны.

4. Пусть $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — две алгебры (σ-алгебры) подмножеств Ω. Доказать, что $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cap \mathscr{A}_2$ — также алгебра (σ-алгебра). Верно ли это для $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$?

II. Пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

5. (С. 1.4.) Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$$A = \{\text{первая монета выпала «гербом» вверх}\},$$
$$B = \{\text{выпало ровно два «герба»}\},$$
$$C = \{\text{выпало не больше двух «гербов»}\}.$$

6. Что вероятнее, получить хотя бы одну единицу при бросании четырех игральных костей или хотя бы одну пару единиц при 24 бросаниях двух костей?

7. (С. 1.3.) На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

8. Из урны, содержащей m различных шаров, наудачу последовательно вынимают n шаров. Для двух способов выбора, с возвращением и без возвращения, описать структуру пространства элементарных событий Ω и подсчитать число элементов $|\Omega|$ в случае

а) упорядоченной и б) неупорядоченной выборки.

9. (Т. §1. Задача 4.) Найти вероятность того, что при случайном размещении n шаров по n различным ящикам

а) ни один ящик не будет пуст;

б) ровно один ящик останется пустым.

Рассмотреть случаи: 1) шары неразличимы; 2) шары различимы.

10. Какова вероятность, вынув 6 карт из колоды в 52 карты, иметь в выборке все 4 масти?

11. (Т. §1. Задача 11.) В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность p_n того, что хотя бы одно письмо пойдёт по назначению; вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

12. Случайная точка (p,q) равномерно распределена в квадрате $|p| \leq 1$, $|q| \leq 1$. Найти вероятность того, что отрицательны корни уравнения $x^2 + 2px + q = 0$.

13. (См. С.1.73–1.75) (Парадокс Бертрана). В круге наудачу выбирается хорда. Найти вероятность того, что её длина больше длины стороны правильного вписанного треугольника.

Рассмотреть варианты случайного выбора хорды:

а) середина хорды равномерно распределена в круге;

б) направление хорды задано, а её середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном этому направлению;

в) один конец хорды закреплён, а другой равномерно распределён на окружности.

14. (Т. §1. Задача 10.) Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник?

III. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Независимость событий

15. Брошены три игральные кости. Чему равна вероятность, что на одной из них выпала единица, если на костях выпали разные числа?

16. (С. 2.4.) Из урны, содержащей M белых и $N-M$ чёрных шаров, последовательно без возвращения извлекают n шаров. Пусть $A_0^{(i)}$ $(A_1^{(i)})$ — событие, состоящее в том, что i-й шар был чёрный (белый). Используя классическое определение случайного выбора, найти

$$\mathrm{P}\{A_1^{(s+1)} \mid A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{(2)} \ldots A_{\varepsilon_s}^{(s)}\}, \quad \varepsilon_i = 0,\ 1.$$

17. (С. 2.12.) Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, два игрока извлекают шары по очереди. Выигрывает тот, кому раньше попадается белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возвращением;
б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

18. Подводная лодка последовательно выпускает n торпед, каждая из них независимо от других с вероятностью p попадает в атакуемый корабль. При попадании с вероятностью $\frac{1}{N}$ затопляется один из N отсеков корабля. Найти вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

19. (С. 2.75.) Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдёт в точку m.

20. (Т. §2. Задача 12.) Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая иных столкновений до момента t, испытает столкновение в промежуток времени $(t,\ t+h]$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

21. Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощённая система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для стандартных изделий и с вероятностью 0,05 для нестандартных. Какова вероятность того, что:

а) изделие будет забраковано;
б) изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

IV. Случайные величины и их распределения

22. (С. 3.3.) Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами: $\mathrm{P}\{\xi = k\} = C/k(k+1)(k+2)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти:

а) постоянную C; б) $\mathrm{P}\{\xi \geq 3\}$; в) $\mathrm{P}\{n_1 \leq \xi \leq n_2\}$.

23. (С. 3.5.) Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α: $\mathrm{P}\{\xi \leq x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ $(x \geq 0)$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; б) $\eta_2 = \xi^2$; в) $\eta_3 = \frac{1}{\alpha} \ln \xi$.

24. а) (С. 3.12.) Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \le x\}$ (функция $F(x)$ строго возрастает). Показать, что случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

б)* Для произвольной функции распределения (ф.р.) $F(x)$ пусть $F^{-1}(t) = \inf\{x\colon F(x) \ge t\}$, $t \in (0,1)$. Если случайная величина (с.в.) ξ равномерно распределена на $(0,1)$, то с.в. $F^{-1}(\xi)$ имеет ф.р. $F(x)$.

25. (С. 3.8.) Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0,a)$, а случайная точка $C = (\xi, 0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Распределение ξ называется *распределением Коши* (с параметрами).

26. (С. 3.16.) Совместное распределение

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = j\}$$

дискретных случайных величин ξ_1, ξ_2 задано таблицей:

$i \setminus j$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$5/24$	$1/6$	$1/8$

Найти:

а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathrm{P}\{\xi_1 = i\}$, $p_{\cdot j} = \mathrm{P}\{\xi_2 = j\}$;

б) совместное распределение $q_{ij} = \mathrm{P}\{\eta_1 = i,\ \eta_2 = j\}$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$;

в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathrm{P}\{\eta_1 = i\}$, $q_{\cdot j} = \mathrm{P}\{\eta_2 = j\}$.

27. (С. 3.31.) Точка (ξ_1, ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y);\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a\}$. Показать, что распределения случайных величин $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min\{\xi_1, \xi_2\}$ совпадают, т.е. что для любого t

$$\mathrm{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \le t\} = \mathrm{P}\{\min\{\xi_1, \xi_2\} \le t\}.$$

28. (С. 3.32.) Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:

а) показательно с одним и тем же параметром α;

б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

29. а) (С. 3.39.) Величины ξ_1, ξ_2 независимы:

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = 0\} = \mathrm{P}\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{2},$$

ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти закон распределения случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

б)* Случайные величины ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $\frac{1}{2}$. Найти распределение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{2^k}$.

30. (С. 3.60.) Случайные величины ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n $(n \geq 2)$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. При каждом $\omega \in \Omega$ расположим числа $\xi_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, n$, в порядке возрастания и перенумеруем их заново: $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \cdots \leq \xi_{(n)}$. Полученные случайные величины называются порядковыми статистиками (или вариационным рядом). Таким образом, $\xi_{(1)} = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$, а $\xi_{(n)} = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \xi_k$. Найти:

а) функцию распределения $\xi_{(1)}$, а также ф.р. $\xi_{(n)}$;

б) функцию распределения $\xi_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$;

в) двумерную функцию распределения $\xi_{(1)}$, $\xi_{(n)}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Числовые характеристики случайных величин

1. а) (Т. §8. Задача 4.) Из урны, содержащей m белых и n чёрных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекают шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

б) Найти $\mathrm{E}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$, где ξ — число ячеек, оставшихся пустыми при размещении n бозонов по N ячейкам.

2. (Т. §8. Задача 1.) Длина диаметра круга равномерно распределена в отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

3. (Т. §8. Задача 3.) Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

4. (С. 3.80.) Случайные величины ξ_1, ξ_2 принимают значения -1, 0, 1. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $\mathrm{P}\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$,

$\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2$. Найти $\mathrm{E}\xi_1$, $\mathrm{E}\xi_2$, $\mathrm{D}\xi_1$, $\mathrm{D}\xi_2$, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

5. (С. 3.81.) Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$; $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $\mathrm{E}\eta_1$, $\mathrm{E}\eta_2$, $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

6. (С. 3.189 (а,б,г).) Случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p.

Найти:

а) $\mathrm{P}\{\xi = \eta\}$; б) $\mathrm{P}\{\xi > \eta\}$; в) $\mathrm{P}\{\xi = k \mid \xi > \eta\}$.

II. Неравенство Чебышева. Предельные теоремы. Характеристические функции

7. (С. 3.163 (а–д).) По известному «правилу трёх сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Найти $\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{E}\xi| < 3\sqrt{\mathrm{D}\xi}\}$, если ξ имеет:

а) нормальное распределение;
б) показательное распределение;
в) равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$;
г) $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} = \frac{1}{18}$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = \frac{8}{9}$;
д) распределение Пуассона с $\mathrm{E}\xi = 0{,}09$.

Сравнить результат с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

8. (С. 4.2.) Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

9. (С. 4.11 (а).) Пусть функция $f(x)$, $0 \le x \le 1$, непрерывна, а ξ_1, $\xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$.

Доказать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{f(\xi_1) + \cdots + f(\xi_n)}{n} - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

10. (С. 4.4.) Последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots$ образованы одинаково распределёнными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут быть зависимыми), $\mathrm{E}\xi_i = \mathrm{E}\eta_i = a$, $\mathrm{D}\xi_i = \mathrm{D}\eta_i < \infty$. Выполняется ли закон больших чисел для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, где

$$\zeta_{2k-1} = \xi_k, \quad \zeta_{2k} = \eta_k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots?$$

Выполняется ли усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)?

11. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a, a)$;
б) распределения Пуассона;
в) нормального с плотностью

$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right);$$

г) треугольного с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{|x|}{a}\right) \mathbb{1}_{[-a,a]}(x), \quad a > 0.$$

12. а) Являются ли характеристическими функциями

$$(\cos t)^2; \quad \cos(t^2),$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$, а $\varphi(t)$ — некоторая характеристическая функция?

б) Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t, \quad e^{it}\cos t, \quad \frac{1}{2 - e^{it}}.$$

в)* Являются ли характеристической функцией

$$e^{\lambda(\varphi(t)-1)},$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$, а $\varphi(t)$ — некоторая характеристическая функция?

13. При передаче по каналу связи входной двоичный символ α на выходе может быть принят как $1 - \alpha$ с вероятностью 10^{-4} или же принят правильно. Считая, что символы могут искажаться независимо друг от друга, оценить вероятность того, что при передаче 10^4 символов произойдет не более 3 искажений.

14. Предположим, что левши составляют 1% от населения. Оценить вероятность того, что не менее четырёх левшей окажется среди

а) 200 человек; б) 10 000 человек.

15. При каких n в условии задачи 8 выполняется неравенство

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3,5\right| \geq 0,01\right\} \leq 0,01?$$

Сравнить оценки для n, полученные с помощью неравенства Чебышева и с помощью ЦПТ.

16. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорождённых будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

17. (С. 2.65.) Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб. Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы с вероятностью, приближённо равной 0,99, все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли?

Рассмотреть два случая:

а) зрители приходят поодиночке;
б) зрители приходят парами.

Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями и ёмкости гардеробов одинаковы.

18. (С. 4.132.) Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x\right\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

19. Пусть $\xi_{m,n}$ $(m = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ — независимые неотрицательные случайные величины с одинаковой плотностью распределения $p_n(x) = \lambda n e^{-\lambda n x}$, $x \geq 0, \lambda = \mathrm{const} > 0$. Найти предельное распределение при $n \to \infty$ для

$$\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \cdots + \xi_{n,n}.$$

20. (С. 4.125.) Случайные величины $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

называется *распределением* χ^2 (хи-квадрат) с n *степенями свободы.*

Найти $\mathrm{E}\chi_n^2$, $\mathrm{D}\chi_n^2$ и плотность распределения χ_n^2.

а) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{\chi_n^2}{n} - 1\right| > \varepsilon\right\} = 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\chi_n^2 - \mathrm{E}\chi_n^2}{\sqrt{\mathrm{D}\chi_n^2}} \le x\right\}$, $-\infty < x < \infty$.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 4 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
к.ф.-м.н., доцент М. А. Муницына
к.ф.-м.н., доцент И. Ю. Полехин

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
30 ноября 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил).

   Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

   Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

   Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства). Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

   Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно-консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нётер.

Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. **Канонические преобразования. Уравнение Гамильтона–Якоби**

   Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Критерий каноничности в терминах производящих функций.

   Преобразования, допускающие $(q, \tilde{q})$-описание (свободные преобразования). Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

   Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела: учеб. пособие. — 2-е изд. — Москва : МФТИ, 2010.

5. *Амелькин Н.И.* Лагранжева и гамильтонова механика: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2014.

6. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

7. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2004.

8. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 22 по 27 марта 2021 г.)

Контрольная работа с 15 по 20 марта 2021 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
   14.10, 14.23, 14.36, 14.42

2. **Прямой метод Ляпунова**
   T1. Используя прямой метод Ляпунова, покажите, что нулевое положение равновесия системы асимптотически устойчиво

$$\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y),$$

где $f_i(z)$ — произвольные гладкие функции такие, что $\operatorname{sgn}(f_i(z)) = \operatorname{sgn}(z)$.

Указание. Функция Ляпунова $V(x,y) = \int\limits_0^x f_3(z)\,dz + \int\limits_0^y f_2(z)\,dz$.

T2. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = 2y^3 - x^5, \quad \dot{y} = -x - y^3 + y^5.$$

T3. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = xy - x^3 + y^3, \quad \dot{y} = x^2 - y^3.$$

T4. Исследуйте на устойчивость систему $(\alpha, \beta > 0)$

$$\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2), \quad \dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2).$$

3. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем**
   17.2, 17.8, 17.11 (a), 17.20

4. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   15.2, 15.15, 15.18, 15.21

5. **Малые колебания консервативных систем**
   16.11, 16.33, 16.47, 16.64

6. **Вынужденные колебания**
   18.3, 18.17, 18.31, 18.37, 18.62

   Указание. При решении задачи 18.39 используйте нормальные координаты. Отдельно рассмотрите случай $\omega^4 - 3k^2\omega^2 + k^4 = 0$.

Второе задание

(срок сдачи с 10 по 15 мая 2021 г.)

Контрольная работа с 3 по 8 мая 2021 г.

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   19.1, 19.9, 19.15, 19.19, 19.35

8. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   20.1, 20.18, 20.30, 20.37

9. **Принцип Гамильтона**
   21.4, 21.12, 21.14, 21.33

10. **Интегральные инварианты**
    22.5, 22.15, 22.22, 22.24

11. **Канонические преобразования**
    23.2, 23.37, 23.98, 23.107

12. **Метод Якоби**
    24.18, 24.22, 24.60, 24.63
    Т5. На плоскости рассматриваются два одинаковых неподвижных гравитационных центра, которые действуют на массивную точку M, которая может двигаться без трения по рассматриваемой плоскости. Составьте и решите уравнение Гамильтона-Якоби для этой системы.
    Указание. Воспользуйтесь эллиптическими координатами:

$\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$, r_i — расстояние от точки M до i-го притягивающего центра.

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. — 4-е изд. — Москва : Физматлит, 2018.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Практика программирования с использованием C++**
по направлению: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **информатики и вычислительной математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоемкость:
Базовая часть – 4 зачет. ед.;

лекции: – нет	Экзамен – нет
практические (семинарские) занятия: – нет	Зачет диф. – 4 семестр
	Две контрольные работы
лабораторные занятия: – 60 часов	Самостоятельная работа – 120 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Программу и задание составили: ассистент И. С. Макаров

Программа принята на заседании кафедры
информатики и вычислительной математики
23 июня 2020 г.

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доц. Н. И. Хохлов

Повторение. Стандартная библиотека. Библиотеки Boost. Другие библиотеки. Настройка проекта в IDE Microsoft Visual Studio. Этапы жизненного цикла программного обеспечения. Система контроля версий GIT. SmartGit. Continuous Integration и Continuous Deployment.

Интеллектуальные указатели. Аллокаторы. Итераторы. Категории итераторов. Особенности использования итераторов. Класс ratio. Библиотека chrono. Интервал времени. Момент времени. Эпоха. Часы. Разработка хронометра для измерения времени выполнения блока кода.

Последовательные контейнеры STL. array, vector, deque, list, forward list. Специальные контейнеры. Адаптеры контейнеров. stack, queue, priority queue. Битовое множество. valarray. Циклический буфер Boost. Многомерный массив Boost. Кортеж. Гетерогенные контейнеры.

Ассоциативные контейнеры STL. Множество. Отображение. Двустороннее отображение Boost. Неупорядоченные контейнеры STL. Хэш-таблица. Хэш-функция. Способы разрешения коллизий. Метод цепочек. Метод открытой адресации. Рехэширование. Boost Multi-index.

Алгоритмы STL. Итераторы. Адаптеры итераторов. Итераторы вставки. Потоковые итераторы. Функциональные объекты, функции и лямбда-функции. Классификация алгоритмов STL. Генерация случайных чисел. Seed. Генератор. Распределение. Boost Graph Library.

Обработка текста. Строки. Интернационализация и локализация. Локали. Фацеты. Кодирование и наборы символов. Многобайтовые и широкие кодировки. Стандарт Unicode. Регулярные выражения. Грамматика регулярных выражений ECMAScript. Построение паттернов.

Библиотека IOStream. Иерархия классов потоков ввода-вывода. Буферизация. Форматирование. Манипуляторы. Файловые потоки ввода-вывода. Строковые потоки ввода-вывода. Библиотека filesystem. Путь. Операции с директориями. Форматы обмена данными. JSON. XML.

Параллельное программирование. Организация параллелизма. Многопоточное исполнение. Контекстное переключение. Фоновые задачи. Разработка параллельных программ. Синхронное и асинхронное исполнение. Механизм будущих результатов. Параллельные алгоритмы. Пул потоков.

Примитивы синхронизации. Состояние гонки. Мьютексы. Гранулярность блокировки. Взаимоблокировка. Условные переменные. Потокобезопасные структуры данных с блокировками. Стек. Очередь. Модель памяти. Атомарные типы данных. Атомарные операции.

Межпроцессное взаимодействие. Boost Interprocess. Shared memory. Memory mapped files. Управляемая разделяемая память. Создание контейнеров в разделяемой памяти. Анонимные и именованные примитивы синхронизации. Схема consumer-producer. Использование DLL.

Сетевое взаимодействие. Стек протоколов TCP/IP. Особенности протоколов TCP и UDP. Sockets API. Boost ASIO. IP адрес. Стандарты IPv4 и IPv6. Локальная сеть. Порт. Endpoint. Система DNS. Активный сокет. Пассивный сокет. Буферизация. Операции ввода-вывода.

Графическая библиотека SFML (разработка игр и математическое моделирование) - дополнительная тема.

Литература

(*Основная*)

1. *Страуструп Б.* Программирование. Принципы и практика с использованием С++. – 2 изд. – Москва : Вильямс, 2016.
2. *Страуструп Б.* Язык программирования С++ (стандарт С++11): Краткий курс. – Москва : Бином, 2017.
3. *Джосаттис Н.* Стандартная библиотека С++: справочное руководство (второе издание). – Москва : Addison-Wesley, 2017.

(*Дополнительная*)

1. *Мейерс С.* Эффективное использование С++. 55 верных способов улучшить структуру и код ваших программ. – Москва : ДМК-Пресс, 2017. – URL: https://lib.mipt.ru/book/25327/ (дата обращения 30.04.2019).
2. *Мейерс С.* Наиболее эффективное использование С++. 35 новых рекомендаций по улучшению ваших программ. – Москва : ДМК-Пресс, 2016. – URL: https://lib.mipt.ru/book/29419/ (дата обращения 30.04.2019).
3. *Мейерс С.* Эффективный и современный С++. 42 рекомендации по использованию С++11 и С++14. – Москва : ИД Вильямс, 2018. – URL: https://lib.mipt.ru/book/299561 (дата обращения 30.04.2019).

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной (ФЭФМ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 3,0. Тираж 70 экз.
Заказ № 17.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок