Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа аэрокосмических технологий (ФАКТ)

**для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 2 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа аэрокосмических технологий (ФАКТ). – Москва : МФТИ, 2021. – 52 с.

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: оптика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **для всех физтех-школ**
кафедра: **общей физики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть – 4 зачет. ед.;
физ. практикум: базовая часть – 3 зачет. ед.;
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 4 семестр
Диф. зачёт – 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., проф. В. А. Петухов
к.ф.-м.н., доц. К. М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. Л. М. Колдунов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.т.н., доц. В. А. Овчинкин
к.ф.-м.н., доц. Ю. Н. Филатов

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. В. Максимычев

ОПТИКА

1. Геометрическая оптика. Принцип Ферма, законы преломления и отражения. Полное внутреннее отражение. Оптические инструменты: телескоп, микроскоп. Понятие о геометрических аберрациях. Элементы фотометрии: яркость источника, освещённость изображения.

Современные применения геометрической оптики в пределе коротких длин волн: рентгеновская микроскопия, проекционная рентгеновская литография, рентгеновская астрономия, микроанализ с пространственным разрешением.

2. Волновая оптика. Волновое уравнение, монохроматические волны, комплексная амплитуда, уравнение Гельмгольца, плоские и сферические волны, показатель преломления, фазовая скорость распространения. Поляризация света: линейная, круговая и эллиптическая. Естественный свет. Степень поляризации. Формулы Френеля, угол Брюстера.

Нерелятивистский эффект Доплера, поиск экзопланет.

3. Дисперсия показателя преломления, классическая теория дисперсии, нормальная и аномальная дисперсии. Комплексная диэлектрическая проницаемость и комплексный показатель преломления, связь мнимой части с поглощением света средой. Затухающие волны, закон Бугера. Показатель преломления плазмы. Радиоволны в ионосфере и дальняя радиосвязь. Групповая скорость. Распространение волнового пакета в неоднородной среде. Различные диапазоны длин волн, их особенности. Метаматериалы.

4. Принцип суперпозиции и интерференция монохроматических волн. Видность полос, ширина полосы. Просветление оптики. Статистическая природа излучения квазимонохроматической волны. Временная когерентность, функция временной когерентности, связь со спектральной интенсивностью (теорема Винера–Хинчина) и с видностью. Ограничение на допустимую разность хода в двухлучевых интерференционных схемах, соотношение неопределенностей.

5. Интерференция при использовании протяженных источников. Пространственная когерентность, радиус когерентности, функция пространственной когерентности, связь с распределением интенсивности излучения по источнику (теорема Ван Циттерта–Цернике). Ограничения на допустимые размеры источника и апертуру интерференции в двухлучевых схемах. Лазеры как источники излучения с высокой временной и пространственной когерентностью.

6. Дифракция волн. Принцип Гюйгенса–Френеля. Дифракция на тонком экране. Граничные условия Кирхгофа. Волновой параметр. Дифракция Френеля. Задачи с осевой симметрией, зоны Френеля, спираль Френеля.

Зонные пластинки, линза. Использование зонных пластинок для фокусировки рентгеновского излучения. Дифракция на дополнительном экране, пятно Пуассона. Дифракция на системе дополнительных экранов, теорема Бабинэ. Дифракция на краю, спираль Корню.

7. Дифракция Фраунгофера. Световое поле в зоне Фраунгофера как преобразование Фурье граничного поля. Дифракция Фраунгофера на щели, дифракционная расходимость. Дифракционный предел разрешения телескопа и микроскопа. Поле в фокальной плоскости линзы, поперечные и продольные размеры фокального пятна.

8. Спектральные приборы: призма, дифракционная решётка, интерферометр Фабри–Перо. Характеристики спектральных приборов: разрешающая способность, область дисперсии, угловая дисперсия.

Интерференция в тонких пленках и многослойных структурах, зеркала с высоким коэффициентом отражения. Искусственные многослойные структуры для отражения мягкого рентгеновского излучения. Радиотехнические аналоги дифракционных решеток.

9. Принципы фурье-оптики. Метод Рэлея решения задачи дифракции: волновое поле как суперпозиция плоских волн разных направлений (пространственное фурье-разложение), соотношение неопределённостей. Дифракция Френеля на периодических структурах (эффект саморепродукции). Теория Аббе формирования оптического изображения, принцип двойной дифракции. Апертура, полоса пропускания пространственных частот оптической системы, связь с разрешающей способностью. Разрешающая способность при когерентном и некогерентном освещении.

10. Принципы голографии. Голограмма Габора. Голограмма с наклонным опорным пучком. Разрешающая способность голограммы. Условие Брэгга–Вульфа. Объёмная голограмма, объёмная решётка в регистрирующей среде.

Представление о голографической микроскопии биообъектов и голографической интерферометрии.

11. Кристаллооптика. Дихроизм, поляроиды, закон Малюса. Двойное лучепреломление в одноосных кристаллах, разложение волны на обыкновенную и необыкновенную. Взаимная ориентация векторов k, E, D, B, направление вектора Пойнтинга, боковой снос световых пучков в кристаллах. Интерференционные явления в кристаллических пластинках. Понятие об искусственной анизотропии. Эффекты Фарадея, Керра и Поккельса и их применение.

12. Рассеяние света. Эффективное сечение рассеяния, диаграмма направленности, их зависимость от длины волны и от размера рассеивающих частиц, Рэлеевское рассеяние (рассеяние на флуктуациях плотности). Поляризация рассеянного света.

13. Нелинейные оптические явления. Нелинейная поляризация среды. Оценки интенсивности световой волны, при которых наблюдаются нелинейные эффекты. Наведенное двулучепреломление. Генерация второй гармоники, фазовый синхронизм. Оптическое выпрямление. Симметрия среды и генерация второй гармоники. Самофокусировка, критическая мощность самофокусировки, мелкомасштабная самофокусировка.

Понятие о комбинационном рассеянии света и вынужденном рассеянии Мандельштама–Бриллюэна.

14. Распространение электромагнитных волн в световодах. Градиентные световоды и световоды с резким изменением показателя преломления. Допустимая угловая апертура. Типы волн. Одномодовые и многомодовые световоды. Рэлеевское рассеяние как причина затухания световой волны в световодах. Применение для высокоскоростной связи. Область нулевой дисперсии. Ультракороткие импульсы.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Оптика. Т. IV. – Москва : Физматлит, 2018.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. I, ч. III, гл. 6–11. – Москва : Физматгиз, 2001.
3. *Кириченко Н.А.* Принципы оптики : учебное пособие. – Москва : МФТИ, 2016.
4. *Бутиков Е.И.* Оптика. – Москва : Высшая школа, 1986.
5. *Ахманов С.А*. *Никитин С.Ю.* Физическая оптика. – Москва : Издательство МГУ, Наука, 2004.

Дополнительная

1. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. – Москва : Физматлит, 1959, 2007.
2. *Ландсберг Г.С.* Оптика. – Москва : Физматлит, 2003.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. – Мсква : Наука, 1973.
4. *Козел С.М., Листвин В.И., Локшин Г.Р.* Введение в когерентную оптику и голографию. – Москва : МФТИ, 2000.
5. *Кольер Р.* Оптическая голография. – Москва : Мир, 1973.
6. *Крымский К.М.* Аберрации центрированных оптических систем – теория и расчёт. — Москва : МФТИ, 2015.
7. *Петухов В.А.* Оптические волокна : учебно-метод. пособие. – Москва : МФТИ, 2019.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

для студентов 2-го курса
на весенний семестр 2020/2021 учебного года

Дата	№ сем	Тема семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
01.02–06.02	**1**	Принцип Ферма. Геометрическая оптика и элементы фотометрии. Оптические инструменты.	1.4 $^{0}1$ $^{0}2$	1.29 1.22 1.9 1.56	1.15 Т1 Т2 1.57
08.02–13.02	**2**	Законы отражения, формулы Френеля. Поляризация. Поток энергии и давление света.	$^{0}1$ 11.7 2.3	2.5+2.23 2.26 2.29 2.42	2.1 2.20 2.27 2.45
15.02–22.02	**3**	Дисперсия. Фазовая и групповая скорости.	10.2 $10.5^{(2,3,5)}$ $^{0}1$	10.8 10.43 *10.75* *10.77*	10.21 10.24 10.35 Т3
01.03–06.03	**4**	Интерференция монохроматических волн.	3.3 $^{0}1$ $^{0}2$	3.5 3.10 3.18 Т4	3.16 3.11 3.20 3.35
08.03–13.03	**5**	Немонохроматический свет, временная когерентность. Пространственная когерентность	$^{0}1$ 4.2 5.3 $^{0}2$	4.10 4.11 5.14 5.20	4.9 5.13 5.23 5.30
15.03–20.03	**6**	Дифракция Френеля. Зонные пластинки.	$^{0}1$ $^{0}2$ 6.1	6.15 6.20 *6.59* 6.43	6.16 6.31 6.50 *6.64*
22.03–27.03	**7**	Дифракция Фраунгофера. Разрешающая способность оптических инструментов.	7.5 $^{0}1$ $^{0}2$	7.16 7.48 7.54 *7.83*	7.10 7.53 7.59 *7.33*
29.03–04.04	**8**	Спектральные приборы.	8.2 $^{0}1$ $^{0}2$	8.39 8.19 8.61 8.78	8.37 8.47 Т5 Т6

05.04– 10.04	**9**	Контрольная работа (по группам)			
12.04– 17.04	**10**	Сдача 1-го задания			
19.04– 24.04	**11**	Дифракция на синусоидальных решётках. Элементы фурье-оптики.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.1 9.15 9.22 9.26	9.11 9.17 9.28 *9.79*
26.04– 01.05	**12**	Голография.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	9.32 9.35 *9.45* *9.52*	9.33 9.36 9.40 *9.78*
27.04– 02.05	**13**	Поляризация света. Элементы кристаллооптики.	11.17 11.1 11.12	11.9 11.16 11.54 11.28	11.13 11.60 11.80 *11.121*
03.05– 08.05	**14**	Рассеяние света. Элементы нелинейной оптики.	$^{0}1$ $^{0}2$ $^{0}3$	*11.125* 11.89 *11.126* T8	11.88 11.90 *11.128* T7
10.05– 15.05	**15**	Сдача 2-го задания.			
17.05– 22.05	**16**	Зачёт.			

Примечание

Номера задач указаны по «Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 2. Электричество и магнетизм. Оптика / под ред. В. А. Овчинкина (**4-е изд.**, испр. и доп.). – Москва : Физматкнига, 2017». *Курсивом отмечены задачи, которые необходимо брать из нового издания.*

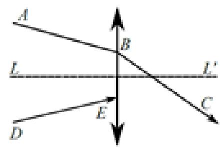
Все задачи обязательны для сдачи задания. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

- **0** — задачи, которые студент должен решать в течение недели для подготовки к семинару;
- **I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);

II — задачи для самостоятельного решения; их решения должны быть оформлены студентами в отдельных тетрадях и сданы преподавателю на проверку.

Задачи группы 0

Семинар 1



[0]1. На рис. показаны положение главной оптической оси тонкой линзы LL' и ход проходящего сквозь нее луча ABC. Найдите построением ход произвольного луча DE за линзой.

[0]2. Положительной линзой с фокусным расстоянием F создается изображение объекта на экране. Какому условию должно удовлетворять расстояние от объекта до экрана, чтобы это было возможно?

Семинар 2

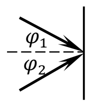
[0]1. Выразить интенсивность плоской электромагнитной волны, распространяющейся в немагнитной среде с показателем преломления n, через амплитуду вектора напряженности электрического поля волны E_0.

Семинар 3

[0]1. Концентрация электронов в нижних слоях ионосферы равна $N \sim 1{,}5 \cdot 10^6$ см$^{-3}$. Какие электромагнитные волны будут испытывать отражение при вертикальном радиозондировании ионосферы?

Ответ: $\nu < 10$ МГц ($\lambda > 30$ м).

Семинар 4



[0]1. На экран падают две плоские волны с равными амплитудами A под малыми углами $\varphi_{1,2} = \pm 0{,}01$ рад. Длина волны $\lambda = 500$ нм, нормаль к экрану и волновые векторы волн лежат в одной плоскости, см на экране. Определите ширину интерференционных полос (см. рис.).

Ответ: 25 мкм.

[0]2. На тонкую пленку с показателем преломления n падает пучок белого света под углом θ к нормали. При какой минимальной толщине $b_{мин}$ и в какой цвет будет окрашена пленка в отраженном свете?

Семинар 5

[0]1. В двухлучевом интерференционном опыте используется источник света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и шириной спектра $\Delta\lambda = 10$ нм. Оцените максимально допустимую разность хода лучей $\Delta_{\max}$ и максимальное число интерференционных полос $m_{\max}$, которые можно наблюдать в этом опыте.

Ответ: $\Delta_{\max} \sim 25$ мкм, $m_{\max} \sim 100$.

^{0}2. Найдите апертуру интерференции в опыте с бипризмой с преломляющим углом α и показателем преломления n, если источник и плоскость наблюдения расположены на одинаковых расстояниях от бипризмы.

Семинар 6

^{0}1. Щель ширины $b = 1$ мм освещается параллельным пучком света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Оцените, на каком расстоянии L от щели необходимо разместить экран, чтобы наблюдать на нём дифракцию Френеля.

Ответ: $L \sim 1$ м.

^{0}2. На ирисовую диафрагму с переменным радиусом отверстия, расположенную на расстоянии L от экрана, падает свет с длиной волны λ. Диафрагму постепенно открывают, начиная с $R \approx 0$. При каком радиусе R интенсивность света в центре экрана впервые обратится в ноль?

Семинар 7

^{0}1. Через маленькое круглое отверстие проходит монохроматический параллельный пучок света и создает на удаленном экране дифракционную картину Фраунгофера. Во сколько раз изменится освещённость в центре экрана, если увеличить диаметр отверстия вдвое?

Ответ: увеличится в 16 раз.

^{0}2. Плоская световая волна дифрагирует на щели с шириной $b = 10\lambda$, где λ — длина волны. Оценить отношение интенсивностей нулевого и первого дифракционных максимумов.

Ответ: $I_1/I_0 \approx 0{,}05$.

Семинар 8

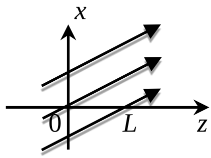
^{0}1. На дифракционную решетку, имеющую период $d = 10$ мкм, нормально падает свет от желтого дублета натрия ($\lambda_1 = 5890$ Å, $\lambda_2 = 5896$ Å). Оцените угловое расстояние между максимумами $\delta\varphi$ во втором порядке ($m = 2$).

Ответ: $\delta\varphi \approx 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ рад.

^{0}2. Дифракционная решётка с периодом d имеет размер $D = 10^3 d$ в направлении, перпендикулярном штрихам. Ширина прозрачных штрихов решётки равна половине периода. Определите максимальную разрешающую способность решётки в спектрах 1-го и 2-го порядков.

Ответ: $R_1 = 10^3$, $R_2 = 0$.

Семинар 11



⁰1. Плоская волна с длиной волны λ распространяется в плоскости xz под углом α к оси z. Запишите распределение комплексной амплитуды волны и интенсивности в плоскости z = 0. Найти разность фаз между колебаниями в точках z = 0 и z = L, лежащих на оси z (см. рис.).

⁰2. Решётка освещается нормально падающей плоской монохроматической волной с амплитудой A. Укажите пространственные частоты и амплитуды плоских волн за дифракционной решёткой, прозрачность которой $\tau(x) = \cos^2(\Omega x)$.

⁰3. Оцените ширину пространственного спектра плоских волн Δk_x при дифракции плоской монохроматической волны на щели шириной b.

Семинар 12

⁰1. Точечный источник с длиной волны λ расположен в начале координат. Пользуясь параболическим приближением, найти распределение комплексной амплитуды и интенсивности в плоскости $x = L$.

⁰2. Голограмму точечного источника, находящегося на расстоянии L от фотопластинки, записали по схеме Габора на длине волны λ. Где будут находиться мнимое и действительное изображения, если восстановление голограммы производить светом с длиной волны 2λ?

⁰3. Почему при получении голографических изображений объёмных объектов практический интерес представляют только мнимые изображения? Поясните ответ с помощью схематического рисунка.

Семинар 14

⁰1. Пользуясь формулой Рэлея, оцените коэффициент пропускания света слоем воздуха толщиной 8 км в атмосфере вблизи поверхности Земли, для двух длин волн: λ = 400 нм (фиолетовый свет) и 650 нм (красный свет). Показатель преломления воздуха принять равным $n - 1 = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$.

Ответ: $T_{400} \approx 0{,}7$, $T_{700} \approx 0{,}95$.

⁰2. Лазерный пучок проходит сквозь слабопоглощающую жидкость (интенсивность пучка максимальна на его оси). Каков знак возникающей в жидкости линзы?

⁰3. Молекулы некоторой жидкости имеют разную поляризуемость по разным осям. Как будут ориентироваться молекулы в поле световой волны: максимальной поляризуемостью по направлению $\vec{E}$ или перпендикулярно $\vec{E}$? Ответ обосновать.

Текстовые задачи

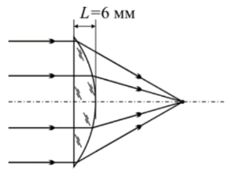
Т1. а) У некоторого близорукого человека дальняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_d от глаза. Очки какой оптической силы D ему следует носить, чтобы эта граница переместилась в бесконечность? Провести расчет для L_d = 0,5 м.

б) У некоторого дальнозоркого человека ближняя граница области, в которой он видит предметы резко, находится на расстоянии L_b от глаза. Очки какой оптической силы ему следует надеть, чтобы эта граница переместилась в «положение наилучшего зрения» L_0 = 25 см. Провести расчет для L_b = 1 м.

Ответ: а) $D = -2$ дптр, б) $D = +3$ дптр.

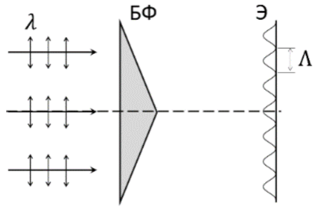
Т2. Найти тип идеальной формы поверхности плоско-выпуклой линзы для фокусировки параллельного пучка в точку (сфера. гипербола, парабола или др). Линза расположена плоской поверхностью к плоскому волновому фронту.

Т3. (2019) Параллельный пучок излучения длительностью 100 фс и средней длиной волны $\lambda = 500$ нм фокусируется положительной линзой толщиной $L = 6$ мм в центре и близкой к нулю на краях. Пучок заполняет всю линзу. Показатель преломления материала линзы $n = 1{,}7$, групповая скорость в стекле $v_{\text{гр}} = 0{,}55c$. Оценить длительность импульса в фокусе линзы.



Ответ: $\tau \simeq 2{,}4$ пс.

Т4. (2019) Падающая на бипризму Френеля БФ плоская монохроматическая линейно поляризованная волна создает на плоском экране Э интерференционную картину с шириной полосы Λ. Плоскость падения перпендикулярна плоскости экрана. Поле E волны колеблется параллельно плоскости падения. Длина волны λ. Определите видность V интерференционной картины.

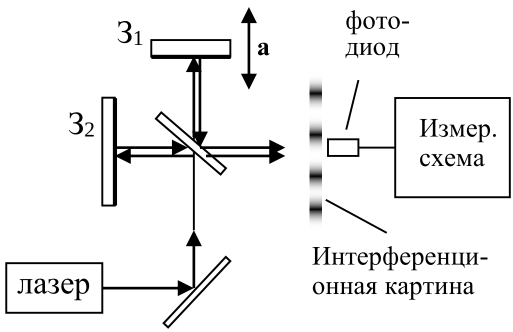


Ответ: $V = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right)^2$.

Т5. Спектральная линия H_α атомарного водорода (λ = 6563 Å) имеет тонкую структуру в виде двух «сублиний» в интервале длин волн $\delta\lambda \approx 0{,}16$ Å. Какой должна быть минимальная база интерферометра Фабри–Перо L с коэффициентом отражения зеркал по интенсивности ρ = 0,9, чтобы с его помощью можно было обнаружить тонкую структуру линии? Определите также для такого интерферометра: дисперсионную область $\Delta\lambda$, направление на ближайший к центру максимум θ_1 и угловую дисперсию $d\theta/d\lambda$ вблизи него. В центре картины – светлое пятно.

Ответ: $L = 0{,}4$ мм, $\Delta\lambda = 5$ Å, $\theta_1 = 2{,}3°$, $D = 4 \cdot 10^{-3}$ Å^{-1}.

Т6. Современные фотодиоды обеспечивают огромный диапазон линейности, до 11 порядков по интенсивности света, то есть в этом диапазоне фототок линейно зависит от интенсивности света, падающего на фотодиод. Это позволяет измерять очень малые интенсивности модулированных по амплитуде световых сигналов на фоне гораздо более мощной постоянной засветки.



Излучение хорошо стабилизированного непрерывного лазера с длиной волны 0,6 мкм пропускается через интерферометр Майкельсона, в котором одно из зеркал $З_1$ может колебаться с малой амплитудой **a**. Зеркало $З_2$ чуть-чуть наклонено, так что в плоскости фотоприемника получаются достаточно широкие (больше размера фотоприемника) интерференционные полосы. Смещение зеркала $З_1$ приводит к смещению интерференционных полос. Оцените минимальное значение $\mathbf{a}_{\min}$ амплитуды колебаний, которое можно измерить данной схемой, если измерительное устройство позволяет обнаружить периодические колебания фототока, составляющие величину 10^{-10} от величины тока в максимуме интерференционной картины. В каком месте интерференционной картины (в максимуме, минимуме интенсивности или в другом месте) следует располагать фотодиод для получения максимальной чувствительности?

Ответ: $\mathbf{a}_{\min} \approx 10^{-16}$ см.

Т7. Кристалл ниобата лития обладает сильной нелинейностью и довольно часто используется для генерации второй гармоники. Показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны этого кристалла сильно зависят от температуры. Для необыкновенной волны $\frac{dn_e}{dT} = 5{,}4 \cdot 10^{-6}\,(°\mathrm{C})^{-1}$, а для обыкновенной $\frac{dn_o}{dT} = 37{,}9 \cdot 10^{-6}\,(°\mathrm{C})^{-1}$. Оцените, насколько надо изменить температуру кристалла, чтобы интенсивность генерации второй гармоники стала равной нулю. Считайте, что до изменения температуры было достигнуто условие фазового синхронизма, длина волны накачки равна $\lambda = 1$ мкм, а длина кристалла $l = 1$ см.

Ответ: $\delta T \approx 1.54°\mathrm{C}$.

Т8. Найти пропускание атмосферой солнечного излучения во время восхода. Сделать расчет для красного (λ = 700 нм) и фиолетового (λ = 400 нм) цветов. Атмосферу считать изотермической, потери, не связанные с рэлеевским рассеянием (пыль, облака, ….), не учитывать. Показатель преломления атмосферы вблизи поверхности Земли равен n_0 = 1,0003.

Ответ: для λ = 400 нм $I_{кон}/I_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-6}$, для λ = 700 нм $I_{кон}/I_0 = 0{,}27$.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Гармонический анализ**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»,
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»,
27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **ЛФИ,ФАКТ,ФБМФ,ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор О. В. Бесов
д. ф.-м. н., профессор, С. А. Гриценко
д. ф.-м. н., доцент А. Ю. Петрович
д. ф.-м. н., профессор В. Ж. Сакбаев
к. ф.-м. н., доцент А. И. Тюленев

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Абсолютно интегрируемые функции. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций. Стремление к нулю коэффициентов Фурье. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом с ядром Дирихле. Принцип локализации. Достаточные условия сходимости рядов Фурье в точке. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. *Для потока О. В. Бесова: оценка скорости стремления к нулю остатка тригонометрического ряда Фурье.* Ряд Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах. *Для потока В. Ж. Сакбаева: пополнение метрического пространства; пополнение линейного нормированного пространства; теорема о пополнении.*
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортономированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированными ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости несобственных интегралов. Признаки Вейерштрасса и Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.

7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и свойства его образа: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Дифференцирование обобщенных функций.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014, 2015, 2016.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу Ч. 2 — Москва : МФТИ, 2011.
3. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. — 5-е изд. — Москва : Дрофа, 2003.
4. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. — Москва : МФТИ, 2018.
5. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : Физматлит, 2003.
6. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. — Москва : Физматлит, 2004.

Дополнительная

7. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. — 5-е изд. — Москва : Физматлит, 2000.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С3)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(5); 11; 14; 30; 42; 45 В каждом примере постройте график суммы ряда Фурье и исследуйте ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$.

С.2. §22: 23*; 65; 67; 68; 72; 110; 111(4;3).

1. Сходятся ли равномерно ряды Фурье функции $f(x) = e^x,\ x \in [0; \pi/2]$ по системам:

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; г) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$?

Постройте графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, определить порядок их убывания

а) x^{10}; б) x^5; в) $(x^2 - \pi^2)^{10}$; г) $(\pi^2 - x^2)\sin^2 x$.

С.2. §22: 115; 121. С помощью равенства Парсеваля вычислите суммы рядов: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$.

С.2. §16: 47*(2); 48(1; 3).

II. Функциональные пространства

3. Докажите, что если f – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n\}$ – последовательность функций, непрерывных на $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные в схеме (при перечеркнутой стрелке привести контрпример):

<table>
<tr><td>$\{f_n\}$
сходится
равномерно к f</td><td>$\longrightarrow$
$\not\longleftarrow$</td><td>$\{f_n\}$
сходится по
норме L_2 к f</td><td>$\longrightarrow$
$\not\longleftarrow$</td><td>$\{f_n\}$
сходится по
норме L_1 к f</td></tr>
<tr><td>$\not\uparrow\ \downarrow$</td><td></td><td>$\not\uparrow\ \not\downarrow$</td><td></td><td>$\not\uparrow\ \not\downarrow$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\{f_n\}$ сходится поточечно к f</td></tr>
</table>

С.3. §18: 97; 98*.

4. Докажите, что система функций $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ полна в пространствах $C[a,b]$, $CL_1[a,b]$, $CL_2[a,b]$.

С.3. §19: 116; 126*.

5. Полна ли система функций $\{x, x^3, \ldots x^{2k+1}\ldots\}$ в пространстве: а) $C([1;2])$; б) в пространстве $C([0;1])$?

6. Полна ли система $\{\cos(2k-1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве:

а) $C[0;\pi/2]$; б) $C[0;2]$?

$\boxed{30+4^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(5); 14(2); 17; 18*(2).

§15: 1(3).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(<u>1</u>) — исследовать также при $\alpha \in (1;+\infty)$.

1(2) — исследовать также при $\alpha \in (0;1)$

С.3. §14: 6(3, 4); 7(3, 5, <u>6</u>); 8(2).

1. Вычислите интегралы Дирихле и Лапласа:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}dx, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx.$$

С.3. §15: 1(4); 2(4); 3(2); 5(2); 6(<u>1</u>, 4, 5); 13(4); 15(4).

С.3. §16: 7(4); 9(3); 12(9); 10*(3).

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 254.

С.3. §17: 1(3); 2(4); 5(2); 6(<u>1</u>); 7(4); 8(1,5); 14(1,3); 17*(1).

IV. Обобщенные функции

С.3. §21: 58*; <u>60</u>.

2. Докажите, что в D' справедливы равенства:

<u>а)</u> $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{a}{a^2+x^2} = \pi\delta(x)$; <u>б)</u> $\lim\limits_{a\to+0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{a} = \pi\delta(x)$.

С.3. §21: 71; 75*; 77*; 84.

3. Найдите в D'

$$\lim_{\xi\to+0} \frac{x\xi}{(x^2+\xi^2)^2}.$$

4. Упростите в D' выражения:

а) $(e^{\sin x} + x\cos x)\delta(x)$; б) $\left(\frac{\sin x}{1+x^2} - \operatorname{ch} x\right)\delta'(x)$; в) $e^{x^2}\delta''(x)$.

$\boxed{45+6^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор С. А. Гриценко

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Дифференциальные уравнения**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 16.03.01 «Техническая физика», 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школы: **для всех физтех-школ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 90 часов

Программу и задание составили:
д. ф.-м. н., профессор А. М. Бишаев
д. т. н., профессор А. Е. Умнов
д. ф.-м. н., профессор С. Е. Жуковский
к. ф.-м. н., доцент В. Ю. Дубинская
к. ф.-м. н., доцент А. Ю. Семенов
к. ф.-м. н., доцент О. А. Пыркова

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия, простейшие типы дифференциальных уравнений.** Основные понятия. Простейшие типы уравнений первого порядка: уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Уравнение Бернулли или Риккати. Метод введения параметра для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной.
   Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Использование однопараметрических групп преобразований для понижения порядка дифференциальных уравнений (по усмотрению лектора).
2. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.** Формула общего решения линейного однородного уравнения n-го порядка. Отыскание решения линейного неоднородного уравнения в случае, когда правая часть уравнения является квазимногочленом. Уравнение Эйлера.
   Формула общего решения линейной однородной системы уравнений в случае простых собственных значений матрицы коэффициентов системы. Теорема о приведении матрицы линейного преобразования к жордановой форме (без доказательства). Формула общего решения линейной однородной системы в случае кратных собственных значений матрицы коэффициентов системы. Отыскание решения линейной неоднородной системы уравнений в случае, когда свободные члены уравнения являются квазимногочленами (без доказательства).
   Матричная экспонента и ее использование для получения формулы общего решения и решения задачи Коши для линейных однородных и неоднородных систем уравнений. Преобразование Лапласа и его применение для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (по усмотрению лектора). Исследование краевых задач для линейных уравнений второго порядка при наличии малого параметра при старшей производной (по усмотрению лектора).
3. **Элементы вариационного исчисления.** Основные понятия. Простейшая задача вариационного исчисления. Задача со свободными концами, задача для функционалов, зависящих от нескольких неизвестных функций, и задача для функционалов, содержащих производные высших порядков. Условный экстремум: изопериметрическая задача, задача Лагранжа (без доказательства).
4. **Задача Коши.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений и для уравнения n-го порядка в нормальном виде. Теоремы о продолжении решения. Характер зависимости решения задачи Коши от параметров

и начальных данных: непрерывность, дифференцируемость (без доказательства). Задача Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной. Особое решение.

5. **Автономные системы дифференциальных уравнений.** Основные понятия и свойства фазовых траекторий. Классификация положений равновесия линейных автономных систем уравнений второго порядка. Характер поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия двумерных автономных нелинейных систем уравнений. Устойчивость и асимптотическая устойчивость положения равновесия автономной системы. Достаточные условия асимптотической устойчивости.

6. **Первые интегралы и линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка.** Первые интегралы систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Критерий первого интеграла. Теорема о числе независимых первых интегралов.
   Формула общего решения линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка. Постановка задачи Коши для таких уравнений. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

7. **Линейные дифференциальные уравнения и линейные системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальных линейных систем уравнений и для линейного уравнения n-го порядка в нормальном виде.
   Фундаментальная система и фундаментальная матрица решений линейной однородной системы уравнений. Структура общего решения линейной однородной и неоднородной системы уравнений. Определитель Вронского. Формула Лиувилля–Остроградского. Метод вариации постоянных или формула Коши для линейной неоднородной системы уравнений. Следствия для линейных уравнений n-го порядка. Теорема Штурма и следствия из нее.
   Уравнение Бесселя и некоторые свойства его решений (по усмотрению лектора). Асимптотическое поведение решений при больших значениях аргумента (по усмотрению лектора).

Литература

Основная

1. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск : Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
2. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных урав-нений. — Москва : УрСС, 2004, 2007; — Москва : КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book/791964.
3. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — Москва : ЛКИ, 2008.

4. *Романко В. К.* Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. — Москва : Лаборатория базовых знаний, 2000–2011.
5. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Санкт-Петербург : Лань, 2003.
6. *Умнов А. Е., Умнов Е. А.* Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Москва : МФТИ, 2016, http://www.umnov.ru.

Дополнительная

7. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. — Москва : Физматгиз, 1961, http://techlibrary.ru/bookpage.htm.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — УрСС, 2003; — Москва : Физматлит, 2009.
9. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — Москва : Физматгиз, 1985.
10. *Купцов Л. П., Николаев В. С.* Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2003.
11. *Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н.* Дифференциальные уравнения. Методы решений. — Москва : МФТИ, 2007, 2012.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. Романко В. К.. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С)
2. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Москва : Ижевск : 2005; — Москва : МГУ, 2011; — Москва : ЛКИ, 2008. (цитируется — Ф)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Задача Коши

С. §5: 26; 28а.

С. §6: 36; 49.

Ф.: 1065; 1066; 1067*.

<u>1</u>. Доказать, что при $\alpha > 0$ любое решение уравнения $y' = |y|^\alpha$ не может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Рассмотреть уравнение $y'^2 - (y+1)y' + y = 0$. Показать, что прямая $y = 1$ является дискриминантным множеством для этого уравнения, но не является решением. Показать, что через каждую точку прямой $y = 1$ проходят две интегральные кривые уравнения, имеющие общую касательную. Решить краевую задачу:
$y'^2 - (y+1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = e$. Изобразить график полученного решения.

II. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 649; <u>664</u>; 667; 668*; <u>673</u>; 678.
Ф. §22: 47*; 59.
С. §9: 10; 31; 53; <u>64</u>; 68(а).

<u>3</u>. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y = 0$, где $\nu = \text{const}$ на $(0;\infty)$, не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

III. Теорема Штурма

Ф.: <u>723</u>; 725*; 726.
С. §10: <u>2</u>; <u>3</u>; 6.

4. Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y''-2xy'+y = 0$ на интервале $(-\infty;+\infty)$ имеет не более трех нулей.

5. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \text{const}$$

имеет бесконечное число нулей на промежутке $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями $|x_{n+1}-x_n|$ любого указанного выше решения стремится к π при $n \to +\infty$.

IV. Исследование поведения фазовых траекторий

Во всех задачах для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми.

Ф.: <u>964</u>; 972*; <u>973</u>; <u>974</u>; 975; 978*.
С. §13: 9; 15; 39; 44; <u>45</u>.

$\boxed{35+7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Первые интегралы и их использование для решений автономных систем

С. §14: 12.

Ф.: 1149.

1. Найти первые интегралы уравнений. Используя их, исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости.

а) $\ddot{x} + \sin x = 0$; б) $\ddot{x} - x + x^2 = 0$.

С. §16: 5; 26.

II. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 5; 16; 22; 79; 83.

2. В области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ найти все решения уравнения

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{x^3 - xy^2}{z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить задачу Коши $u = z^2$ при $y^2 - x^2 = 1$.

III. Вариационное исчисление

С. §19: 21; 45; 72; 105.

3. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{2yy'}{x} - 7\frac{y^2}{x^2} - (y')^2 - 12\frac{y}{x}\right) dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

С. §20.1: 9; 12.

4. Исследовать на экстремум функционал, определив знаки приращения

$$\int\limits_1^2 (2y + yy' + x(y'))\, dx, \quad y(1) = 1.$$

С. §20.2: 5.

С. §20.3: 2.

С. §21: 1.

5*. Среди всех кривых на цилиндре $x^2 + y^2 = 1$, соединяющих точки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 1)$ найти кривую наименьшей длины (геодезическую кривую).

$\boxed{23+1^*}$

Составитель задания д. ф.-м. н., профессор, А. М. Тер-Крикоров

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория вероятностей**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 16.03.01 «Техническая физика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 2 зач. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор М. Е. Широков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Дискретное вероятностное пространство и классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Геометрическая вероятность.
2. Исчисление вероятностей в дискретном случае. Теорема сложения для n событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности и формула Байеса. Независимость событий. Некоторые классические дискретные вероятностные модели и связанные с ними распределения.
3. Случайные величины и их числовые характеристики. Независимость случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии, связанные с понятием независимости. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Ковариация двух случайных величин и ее связь с независимостью. Задача об оптимальном линейном прогнозе одной случайной величины по наблюдению другой.
4. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли и ее обобщения. Предельные теоремы Пуассона и Муавра–Лапласа.
5. Общее понятие вероятностного пространства. Аксиоматика Колмогорова. Примеры вероятностных пространств.
6. Общее определение случайной величины, ее функция распределения и плотность. Математическое ожидание и дисперсия абсолютно непрерывных случайных величин.
7. Совместная функция распределения нескольких случайных величин. Критерий независимости. Многомерное нормальное распределение.
8. Характеристическая функция и ее свойства. Использование характеристических функций для исследования сумм независимых случайных величин.
9. Метод характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Усиленная форма закона больших чисел. Центральная предельная теорема для суммы одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Ее многомерный вариант (без доказательства).

Литература

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. 2-е издание и все последующие. — Москва : Наука, 1989. — 640 с.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 2-е издание и все последующие. — Москва : Наука, 1986. — 432 с.
3. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — Москва : Наука, 1985. — 320 с.
4. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х томах /пер. с англ. — Москва : Мир, 1984. — 528 с.
5. *Широков М. Е.* О некоторых понятиях теории вероятностей: учебное пособие. — Москва : МФТИ, 2009.

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 22–27 марта)

I. Комбинация событий

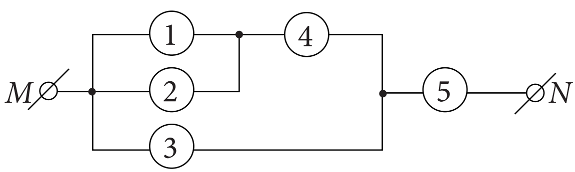
1. Пусть A,B и C — три произвольных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что:

a) произошло только A;
b) произошло A и B, а C не произошло;
c) все три события произошли;
d) произошло по крайней мере одно из событий;
e) ни одно из событий не произошло.

2. Проверить справедливость следующих равенств:

a) $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
b) $\overline{A \cup B} = \overline{A}\ \overline{B}$;
c) $(A \cup B)C = AC \cup BC$;
d) $(A \cup B)\overline{AB} = A\overline{B} \cup \overline{A}B$.

3. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рисунке:



Событие A_i состоит в том, что вышел из строя участок a_i. Записать выражение для события C, заключающегося в том, что цепь разомкнута.

4. Найти простые выражения для событий:

a) $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$;
b) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$;
c) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup \overline{B})$.

5. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольное семейство подмножеств некоторого множества. Проверить справедливость соотношений

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}, \quad \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}.$$

6*. Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность подмножеств некоторого множества. Пусть A_* — подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат бесконечно многим подмножествам последовательности $\{A_n\}$, A^* — подмножество, состоящее из элементов, которые принадлежат всем подмножествам последовательности $\{A_n\}$, кроме конечного их числа. Выразить A_* и A^* через подмножества $\{A_n\}$ с помощью теоретико-множественных операций.

II. Классическое определение вероятности

7. Что вероятнее, выиграть у равносильного противника:

a) 3 партии из 4-х или 5 из 8-ми?

b) не менее 3-х партий из 4-х или не менее 5 из 8-ми?

8. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (не обязательно рядом).

9. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек приходятся на разные месяцы года (учесть, что число дней в разных месяцах различно).

10. Ребенок играет с десятью буквами разрезной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность того, что он случайно составит слово МАТЕМАТИКА?

11. Из колоды 52 карты наудачу выбирается 6 карт. Какова вероятность того, что среди них будут карты всех четырех мастей?

12. Для работы выделено 12 человек. Сколькими способами их можно разделить на пары?

13. В задаче 3 из предыдущего раздела найти $\mathsf{P}(C)$, если события $(A_i)_{i=1,\ldots,5}$ независимы в совокупности и $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{i+1}$.

14. В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти p_n — вероятность того, что хотя бы одно письмо дойдет до своего адресата. Найти $\lim_{n\to\infty} p_n$.

15. Группа из $2n$ девушек и $2n$ юношей делится на две равные подгруппы. Какова вероятность того, что каждая подгруппа содержит одинаковое число юношей и девушек?

16*. n мужчин и n женщин случайно рассаживаются вокруг круглого стола. С какой вероятностью их можно разбить на пары (мужчина, женщина)?

III. Условная вероятность. Формула полной вероятности, формула умножения и формула Байеса

17. В первом ящике 2 белых и 4 черных шара, а во втором — 3 белых и 1 черный шар. Из первого ящика переложили во второй два шара. Найти вероятность того, что шар, вынутый из второго ящика после перекладывания, окажется белым.

18. Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?

19. Стрелки A,B и C поражают мишень с вероятностями 0.6, 0.5 и 0.7 соответственно. Стрелки дали залп по мишени и две пули попали в цель. Найти вероятность того, что стрелок C попал в мишень.

20. По каналу связи может быть передана одна из трех последовательностей букв: $AAAA$, $BBBB$, $CCCC$. Известно, что (априорные) вероятности каждой из последовательностей равны соответственно 0.3, 0.4, 0.3. В результате шумов каждая буква принимается правильно с вероятностью 0.6, а с вероятностями 0.2 и 0.2 вместо нее принимаются две другие. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$.

21. Пусть в урне N белых и M черных шаров. Из нее случайно потеряли K шаров. После этого достали шар. Какая вероятность того, что он белый?

22. На связке N ключей. Мы берем наудачу любой ключ. Если он не открывает дверь, то мы откладываем его в сторону. Найти вероятность того, что мы откроем дверь с K-й попытки, если к двери подходит ровно один ключ.

23. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на первой кости выпало 3 очка, если известно, что на первой кости выпало меньше очков, чем на второй.

24. Пусть A, B и A, C образуют пары независимых событий, причем $C \subset B$. Показать, что события A и $B \setminus C$ также независимы.

25*. Человек с вероятностью p делает шаг вправо, а с вероятностью $1 - p$ — влево. С какой вероятностью он упадет, если он находится на расстоянии $n \geq 0$ шагов слева от края пропасти?

26*. Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент времени $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента времени t, испытает столкновение в промежуток времени $(t, t + h)$, равна $\lambda h + o(h), h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

IV. Геометрическая вероятность

27. Юноша и девушка условились встретиться в определенном месте от полудня до часа дня. Пришедший (шая) первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу и моменты прихода независимы?

28. Стержень длины L разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность, что из полученных кусков можно составить треугольник?

29. На плоскость, разлинованную линиями, расстояние между которыми равно L, бросили иглу длиной $l < L$. Найти вероятность того, что она пересечет хотя бы одну линию.

30. На отрезке $[0, 1]$ наудачу выбираются точки ξ, η. Какова вероятность того, что уравнение $x^2 + \xi x + \eta = 0$ имеет действительные корни одного знака?

31. (Парадокс Бертрана) На окружности случайным образом провели хорду. Найти вероятность того, что ее длина будет больше стороны правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

V. Дискретные случайные величины и их характеристики

32. Из ящика, содержащего m белых и n черных шаров, извлекают с возвращением шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

33. Случайная величина ξ принимает значения -1, 0, $+1$ с вероятностями $1/3$, $1/6$, $1/2$ соответственно. Найти:

a) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = \xi^2$;
b) совместное распределение и ковариацию случайных величин η и ξ.

34. Рассматривается следующая игра. Игрок покупает билет за N рублей и начинает бросать правильную монету. Если герб первый раз выпал на n-м шаге, игрок получает 2^n рублей и уходит. При какой стоимости входного билета казино будет выгодна такая игра, если:

a) размер разовой выплаты неограничен;
b) размер разовой выплаты не превосходит 1 000 000 рублей.

35. Бросаются две игральные кости. Пусть X_i — число очков (от 1 до 6), выпавшее на i-й кости $i = 1, 2$. Найти совместное распределение случайных величин $Y = \min\{X_1, X_2\}$ и $Z = X_2$, их математическое ожидание, дисперсию и ковариацию. Написать формулу оптимального линейного прогноза величины Y по наблюдению величины Z.

36. Закон распределения случайной величины ξ определяется формулами

$$P(\xi = -1) = P(\xi = +1) = a, \quad P(\xi = 0) = 1 - 2a.$$

Сравнить точное значение вероятности $P(|\xi| \geq 1)$ с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

37. Пусть случайные величины ξ и η независимы и имеют геометрическое распределение с параметром p. Найти:

а) $\mathsf{P}(\xi = \eta)$; б) $\mathsf{P}(\xi > \eta)$; в) $\mathsf{P}(\xi + \eta = k)$; г) $\mathsf{P}(\xi = l | \xi + \eta = k)$;
д) $\mathsf{P}(\xi = k | \xi = \eta)$.

38. Случайная величина ξ принимает только целые неотрицательные значения. Доказать, что

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \geq k).$$

39. В N ячеек случайно размещается n неразличимых шаров. Найти мат. ожидание и дисперсию числа пустых ячеек.

40. Пусть ξ и η – числа появлений единицы и шестерки при n бросаниях игральной кости соответственно. Найти коэффициент корреляции этих величин.

41. Кидают несимметричную монету. Найти:

а) математическое ожидание количества бросаний до выпадения первого герба;

б)* математическое ожидание количества бросаний до выпадения двух гербов подряд.

42*. Игральная кость бросается до тех пор, пока хотя бы один раз не выпали все грани. Найти мат. ожидание числа бросаний.

43*. Пусть ξ и η — две случайные величины с $M(\xi) = M(\eta) = 0$, $D(\xi) = D(\eta) = 1$ и коэффициентом корреляции $\rho = \rho(\xi, \eta)$. Показать, что

$$M(\max(\xi^2, \eta^2)) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Используя данный результат для произвольных случайных величин ξ и η, получить двумерный аналог неравенства Чебышева:

$$P\left(|\xi - M(\xi)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\xi)} \quad \vee \quad |\eta - M(\eta)| \geq \varepsilon\sqrt{D(\eta)}\right) \leq$$

$$\leq \varepsilon^{-2}(1 + \sqrt{1 - \rho^2(\xi, \eta)}).$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Характеристики непрерывных случайных величин

1. Длина круга равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

2. Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между точками.

3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = g(\xi)$, если:

а) $p(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad g(x) = -\ln(1 - x)$;

b) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \ln(x)$;

c) $p(x) = \exp(-x), \quad x \geq 0, \quad g(x) = \{x\}$ (дробная часть x);

d) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 1/x$;

e) $p(x) = \pi^{-1}(1 + x^2)^{-1}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad g(x) = 2x/(1 - x^2)$.

4. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и она является непрерывной и строго возрастающей. Найти распределение и математическое ожидание случайной величины $\eta = F(\xi)$.

5. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и одинаково распределены с плотностью $p(x)$. Найти распределение случайных величин $\alpha = \min_{1 \le k \le n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1 \le k \le n} \xi_k$.

6*. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и равномерно распределены на $[a, b]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и взаимную ковариацию случайных величин $\alpha = \min_{1 \le k \le n} \xi_k$ и $\beta = \max_{1 \le k \le n} \xi_k$.

7. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одну и ту же плотность распределения $p(x)$. Найти совместную плотность распределения полярных координат (r, φ) точки (ξ_1, ξ_2). Считать, что $0 \le \varphi \le 2\pi$.

8. Случайные величины ξ и η независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, a]$. Найти плотности распределения случайных величин $\chi_1 = \xi + \eta$, $\chi_2 = \xi - \eta$, $\chi_3 = \xi\eta$ и $\chi_4 = \xi/\eta$.

9. Случайные величины ξ и η независимы. Пусть ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, а $\mathsf{P}(\eta = -1) = \mathsf{P}(\eta = 0) = \mathsf{P}(\eta = 1) = \frac{1}{3}$. Какое распределение имеют $\xi\eta$ и $\xi + \eta$?

10. Пусть ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ. Найти $\mathsf{P}(\xi > k | \xi > l)$.

11. Плотность совместного распределения вероятностей случайных величин ξ и η определяется равенствами $p_{\xi,\eta}(x, y) = C(x + y)$ при $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ и $p_{\xi,\eta}(x, y) = 0$ в остальных случаях. Найти:

a) постоянную C;
b) одномерные плотности распределения случайных величин ξ и η;
c) плотности распределения случайной величины $\max(\xi, \eta)$.

12. Метод Монте-Карло. Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Показать, что

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) - \int_0^1 f(x)dx\right| > \varepsilon\right) \le$$

$$\le \frac{1}{n\varepsilon^2}\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\right)$$

для любой интегрируемой на отрезке $[0, 1]$ функции $f(x)$.

13. Найти характеристические функции:

a) нормального распределения с параметрами (a, σ^2);
b) равномерного распределения на $[0, a]$;
c) распределения Пуассона $p(n) = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;
d) распределения с плотностью $p_\alpha(x) = C_\alpha x^{-2}(1 - \cos(x/\alpha))$, $x \in R$, где C_α — параметр, который надо определить.

14. Найти распределение вероятностей случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

$$a)\ \varphi(t) = \cos t; \quad b)\ \varphi(t) = e^{it} \cos t;$$

$$c)\ \varphi(t) = (2 - e^{it})^{-1}; \quad d)\ \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos t}{2} + i\frac{\sin t}{6}.$$

15. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей характеристическую функцию:

a) $\varphi(t) = 4t^{-2} \cos t \sin^2(t/2)$;
b) $\varphi(t) = (1 - it)^{-p}(1 + it)^{-q} \quad p, q > 0$;
c) $\varphi(t) = \arcsin(\theta)^{-1} \arcsin(\theta e^{it}), \quad 0 < \theta < 1$.

16. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Распределение случайной величины

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$$

называется χ^2-распределением с n степенями свободы.

a) найти функцию распределения и характеристическую функцию χ^2-распределения с 2-мя степенями свободы;
b) найти характеристическую функцию и формулы для моментов любого порядка χ^2-распределения с n степенями свободы.

17. Пусть $\xi_{m,n} (m = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые случайные величины с функцией распределения

$$F_n(x) = P(\xi_{m,n} \le x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\alpha_n x), & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad \alpha_n = \lambda n,\ \lambda > 0.$$

Найти предельное распределение при $n \to +\infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \ldots + \xi_{n,n}$.

18. Случайная величина π_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P\left\{\frac{\pi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \le x\right\}$.

19. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ принимает значения в R^n и имеет матрицу ковариации $C = \|c_{ij}\|$. Доказать, что:

a) матрица C неотрицательно определена, т.е. $(\vec{x}, C\vec{x}) = \sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j \geq 0$ для любого $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n$ (указание: рассмотреть $\sum_i x_i \xi_i$);

b)* если $\mathrm{rg} C = r$, то существует r-мерная гиперплоскость L_r в R^n, для которой $P(\vec{\xi} \in L_r) = 1$, и $P(\vec{\xi} \in L_{r-1}) < 1$ для любой $r-1$-мерной гиперплоскости L_{r-1} в R^n.

20. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ независимы и имеют одно и то же нормальное распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти распределение выборочного среднего $\alpha = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ выборочной дисперсии $\beta = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \alpha)^2$.

21*. В условиях предыдущей задачи доказать независимость случайных величин α и β.

II. Пуассоновское и нормальное приближения

22. Пусть в книге из 500 страниц содержится 10 опечаток. Используя биномиальный закон распределения и его наилучшее в данном случае приближение, оценить вероятность того, что на случайно выбранной странице будет не менее 2 опечаток.

23. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорожденных будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0.515.

24. Пусть ξ_n — случайная величина, равная сумме очков, выпавших при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы

$$P\left\{\left|\frac{\xi_n}{n} - \frac{7}{2}\right| \geq 0.1\right\} \leq 0.1.$$

Задания составили: к.ф.-м.н., доцент А. В. Куликов

д. ф.-м. н., профессор М. Е. Широков

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория случайных процессов**
по направлению подготовки: 27.03.03 «Системный анализ и управление»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 2 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Диф. зачёт — 4 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент А. В. Булинский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Примеры случайных процессов, основанные на последовательностях независимых случайных величин (случайные блуждания, ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона, процессы восстановления, модель страхования Крамера–Лундберга).
2. Случайные процессы как семейства измеримых отображений. Траектории (реализации, выборочные функции). Процессы с дискретным и непрерывным временем. Конечномерные распределения. Понятие эквивалентности случайных процессов.
3. Теорема Колмогорова о построении случайного процесса по заданному семейству согласованных вероятностных мер. Формулировка этой теоремы на языке характеристических функций.
4. Процессы с независимыми приращениями. Существование таких процессов в терминах характеристических функций приращений.
5. Пуассоновский процесс, его свойства. Явная конструкция по последовательности независимых экспоненциальных случайных величин.
6. Многомерное нормальное распределение, его свойства. Гауссовские процессы. Построение согласованных распределений по функции среднего и ковариационной функции.
7. Броуновское движение (винеровский процесс), его свойства. Доказательство эквивалентности двух определений (как гауссовского процесса и процесса с независимыми приращениями).
8. Построение броуновского движения по функциям Шаудера.
9. Теорема Пэли–Винера–Зигмунда о недифференцируемости траекторий броуновского движения.
10. Аппарат условных математических ожиданий. Наилучший прогноз в среднем квадратическом.
11. Марковские процессы, эквивалентные определения. Марковость процесса с независимыми приращениями. Цепи Маркова с непрерывным временем.
12. Эквивалентность двух определений пуассоновского процесса (как процесса с независимыми приращениями и марковской цепи).
13. Эргодическая теорема.
14.* Понятие о системах массового обслуживания. Формулы Эрланга.
15. Мартингалы (субмартингалы), примеры. Моменты остановки.
16. Задача о разорении игрока.
17.* Неравенство Крамера–Лундберга.
18. Процессы, стационарные в широком и узком смыслах. Понятие о спектральном представлении случайных процессов.
19. Построение интеграла Ито.
20.* Свойства интеграла Ито. Формула Ито.

21*. Понятие о стохастическом дифференциальном уравнении и его решениях.

*Знаком * отмечен необязательный материал.*

Литература

1. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 3-е изд. — Москва : Эдиториал УРСС, 1999.
2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — Москва : Физматлит, 2005.
3. *Булинский А. В.* Случайные процессы. Примеры, задачи и упражнения. — Москва : МФТИ, 2010.
4. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — 2-е изд. — М.: Наука, 1991.
5. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1989.
6. *Севастьянов В. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
7. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. — Москва : Изд-во МГУ, 1992.
8. *Феллер В. М.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — Москва : Мир, 1984.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. — 3-е изд. — Москва : МЦНМО, 2004.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Примеры процессов, конечномерные распределения, распределения в пространстве траекторий

1. Как выглядят траектории процесса $X = \{X(t) = e^{\xi t},\ t \in [0, 2\pi]\}$, если величина ξ принимает значения -1 и 1 с равными вероятностями? Найти двумерные распределения процесса.

2. Пусть $X = \{X(t) = \xi \cdot t + c,\ t \geq 0\}$, где случайная величина $\xi \sim N(0,1)$, $c = \text{const}$. Найти конечномерные распределения процесса X.

3. Пусть распределение числа потомков каждой частицы таково:

$$\mathrm{P}(\xi = 0) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(\xi = 2) = \frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(\xi = 4) = \frac{1}{4}.$$

Будет ли меньше $1/2$ вероятность вырождения процесса Гальтона–Ватсона?

4. Дать пример процессов $X = \{X(t), t \in T\}$ и $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$, а также множества C в пространстве траекторий, для которых $\{X \in C\} \in \mathscr{F}$, $\{Y \in C\} \notin \mathscr{F}$.

5. Верно ли, что если у процессов $X = \{X(t),\ t \in T\}$ и $Y = \{Y(t),\ t \in T\}$ совпадают конечномерные распределения, то процесс Y является модификацией процесса X?

6. Пусть $X = \{X(t) = V + 2t,\ t \geq 0\}$, где V имеет распределение Коши. Найти $\mathrm{P}\,(X(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in (1, 3])$.

7. Введем процесс $X = \{X(t) = (\xi_1 + \ldots + \xi_k)t,\ t \geq 0\}$, где $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — независимые $N(0, 1)$ величины. Найти конечномерные распределения процесса X и его ковариационную функцию.

II. Процессы с независимыми приращениями, гауссовские процессы

8. Пусть $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ — процесс с независимыми приращениями, $h = h(t)$ $(t \geq 0)$ — детерминированная функция. Верно ли, что процессы $\{X(t) + h(t)\}$ и $\{h(t)X(t),\ t \geq 0\}$ имеют независимые приращения?

9. Пусть $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ. Доказать, что $\frac{N(t)}{t} \to \lambda$ п.н. при $t \to \infty$.

10. Пусть $N = \{N(t),\ t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, а $0 < t_1(\omega) < t_2(\omega) < \ldots$ – точки его скачков и $t_0(\omega) = 0$. Положим $X(t, \omega) = 1$ для $t \in [t_{2k}, t_{2k+1})$, где $k = 0,\ 1,\ \ldots$ В остальных случаях пусть $X(t, \omega) = -1$. Найти ковариационную функцию процесса X.

11. Найти ковариационную функцию процесса $\{N(t)^2,\ t \geq 0\}$ – квадрата пуассоновского процесса N интенсивности λ.

12. Пусть $(\xi)_{n \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин, не зависящая от пуассоновского процесса N интенсивности λ. Доказать, что процесс $Y(t) := \sum_{k=1}^{N(t)} \xi_k$ является процессом с независимыми приращениями.

13. Доказать, что процесс $X = \left\{\frac{1}{\sqrt{c}} W(ct),\ t \geq 0\right\}$, где W — винеровский процесс и константа $c > 0$, также является винеровским.

14. Показать, что процесс $X = \{X(t) = W(t + a) - W(a),\ t \geq 0\}$, где W — винеровский процесс и константа $a > 0$, является винеровским.

15. Найти ковариационую функцию броуновского моста, т.е. процесса $W_0 = \{W_0(t) := W(t) - tW(1),\ t \in [0, 1]\}$, где W — винеровский процесс.

16. Пусть $X(t) = (W_1(t), \ldots, W_n(t))$, где $t \geq 0$ — векторный процесс, составленный из независимых винеровских процессов. Доказать, что с вероятностью единица процесс X выйдет из шара произвольного радиуса $R > 0$.

17. Доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|W\left(\frac{k}{n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right|^2 \to t$ в среднем квадратичном при $n \to \infty$. Здесь W — винеровский процесс, а $t = \mathrm{const} > 0$. Вывести отсюда, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \left|W\left(\frac{k}{n}t\right) - W\left(\frac{k-1}{n}t\right)\right| \to \infty$ по вероятности при $n \to \infty$.

III. Условное математическое ожидание. Марковские моменты, мартингалы

18. Для процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ и $0 < s < t$ найти 1) $\mathrm{E}(X(t)|X(s))$, 2) $\mathrm{E}(X(s)|X(t))$ в случаях a) $X = N$ является пуссоновским постоянной интенсивности λ и b) $X = W$ – винеровский процесс.

19. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — марковские моменты. Доказать, что таковыми будут $\min\limits_{k=1,\ldots,n} \tau_k$, $\max\limits_{k=1,\ldots,n} \tau_k$, $\inf_{k\in\mathbb{N}} \tau_k$, $\sup_{k\in\mathbb{N}} \tau_k$.

20. Пусть X_1, X_2, $\ldots$ — последовательность случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$, B — борелевское множество в $\mathbb{R}^m$. Показать, что $\tau = \inf\{n : X_n \in B\}$ является марковским моментом относительно естественной фильтрации этой последовательности. Найти распределение величины X_τ, когда $(X_n)_{n\geq 1}$ состоит из независимых одинаково распределенных векторов.

21. Показать, что процесс $\{W(t)^2 - t,\ t \geq 0\}$ является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

22. Найти все a, $b \in \mathbb{R}$ такие, что процесс

$$X = \{X(t) := \exp(aW(t) + bt), \quad t \geq 0\}$$

является мартингалом относительно естественной фильтрации винеровского процесса W.

23. Пусть $X = (X_n)_{n\geq 0}$ — мартингал. Привести примеры марковских моментов τ и σ таких, что $\mathrm{E}X_\tau = \mathrm{E}X_0$, $\mathrm{E}X_\sigma \neq \mathrm{E}X_0$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Марковские процессы

1. Привести примеры марковского и немарковского процессов.

2. Пусть $(\xi)_{n\geq 0}$ — последовательность независимых случайных векторов со значениями в $\mathbb{R}^m$, $h_n : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — детерминированные борелевские функции ($n \geq 1$) и X_0 — случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^k$. Положим $X_n = h_n(X_{n-1}, \xi_n)$, $n \geq 1$. Показать, что $(X_n)_{n\geq 0}$ — цепь Маркова.

3. Пусть величины $X_1, \ldots, X_N$ образуют цепь Маркова. Показать, что $(Y_k)_{0 \le k \le N-1}$ — цепь Маркова, где $Y_k = X_{N-k}$, $k = 1, \ldots, N$.

4. Пусть $X = \{X(t),\ t \ge 0\}$ — марковский процесс. Будет ли марковским процесс $Y = \{Y(n) = X(n),\ n = 0,\ 1,\ \ldots\}$?

5. Пусть $Y = \{Y(n),\ n = 0,\ 1,\ \ldots\}$ — марковский процесс. Будет ли марковским процесс $X = \{X(t) = Y([t]),\ t \ge 0\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа?

6. Пусть дана марковская цепь X_n, $n \ge 0$, имеющая матрицу переходных вероятностей за один шаг

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix},$$

где $0 < \alpha < 1$. Найти стационарное распределение.

7. Найти матрицу переходных вероятностей пуассоновского процесса N (отправляясь от определения N как процесса с независимыми приращениями).

8. Привести пример марковского процесса, не являющегося мартингалом. Привести пример марковского процесса, являющегося мартингалом.

9*. Привести пример мартингала, не являющегося марковским процессом.

10. Привести примеры гауссовских марковских процессов.

II. Стационарные процессы

11. Привести пример процесса, стационарного в широком смысле, но нестационарного в узком смысле. Привести пример процесса, стационарного в узком смысле, но нестационарного в широком смысле.

12. Объяснить, почему для гауссовских процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают.

13. Показать, что стационарный в широком смысле процесс $X = \{X(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ непрерывен в среднем квадратическом на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда его ковариационная функция непрерывна в нуле.

14. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — последовательность, состоящая из независимых случайных величин со средним 0 и дисперсией σ^2. Найти спектральную плотность этой последовательности.

15. Пусть $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ — стационарный в широком смысле процесс со средним a и ковариационной функцией $R = R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \to a$ в среднем квадратическом при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} R(n) \to 0$, $n \to \infty$.

16. Пусть $X = \{X(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t}),\ t \in \mathbb{R}\}$, где W — винеровский процесс, константа $\alpha > 0$. Доказать, что X — стационарный гауссовский процесс, и найти его спектральную плотность.

III. Элементы стохастического анализа

17*. Пусть $f(t)$ — непрерывная детерминированная функция на $[0, \infty)$. Доказать, что $X = \{X(t) = \int\limits_0^t f(u) dW(u),\ t \geq 0\}$ — гауссовский процесс (W — винеровский процесс).

18*. Вычислить интеграл Ито $\int\limits_0^T W(t)\, dW(t)$, где W — винеровский процесс.

19*. Решить стохастическое дифференциальное уравнение $dX(t) = aX(t) + bX(t)\, dW(t)$, где $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$ — винеровский процесс, a, b — константы, а $X(0) = X_0$.

Составитель задания — к.ф.-м.н., доцент А. В. Булинский

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФАКТ**

кафедра: **теоретической механики**
курс: 2
семестр: 4

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 3 зачет. ед.
лекции – 30 часов
Экзамен – 4 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
лабораторные занятия – нет

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задания составили:
д.ф.-м.н., профессор Н. И. Амелькин
к.ф.-м.н., доцент И. Ю. Полехин

Программа принята на заседании
кафедры теоретической механики
30 ноября 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н. С. В. Соколов

1. **Равновесие, устойчивость, движение вблизи устойчивого положения равновесия**

   Определение положения равновесия. Условия равновесия системы с идеальными связями (принцип виртуальных перемещений). Условия равновесия голономных систем (в терминах обобщенных сил).

   Определение устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости положения равновесия. Теоремы прямого метода Ляпунова для автономных систем: теоремы Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, теорема Четаева о неустойчивости, теорема Барбашина–Красовского об условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости.

   Теорема Лагранжа–Дирихле об устойчивости равновесия консервативных механических систем. Условия неустойчивости консервативных систем по квадратичной части потенциальной энергии. Понятие о бифуркации. Случаи потери устойчивости для систем с потенциалом, зависящим от параметра. Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость равновесия. Теорема об асимптотической устойчивости строго диссипативных систем.

   Первый метод Ляпунова исследования устойчивости. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Критерий Рауса–Гурвица (без доказательства). Два сценария потери устойчивости: дивергенция и флаттер.

   Малые колебания консервативных систем вблизи устойчивого положения равновесия. Уравнение частот. Главные (нормальные) координаты. Общее решение. Случай кратных корней.

   Вынужденные колебания линейной стационарной системы под действием гармонических сил. Частотные характеристики. Явление резонанса. Реакция линейной стационарной системы на негармоническое воздействие.

2. **Уравнения Гамильтона, вариационные принципы, интегральные инварианты**

   Переменные Гамильтона. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона. Преобразование Лежандра уравнений Лагранжа в уравнения Гамильтона. Функция Гамильтона для консервативной системы.

   Первые интегралы гамильтоновых систем. Скобки Пуассона. Теорема Якоби–Пуассона. Понижение порядка уравнений Гамильтона в случае циклических координат и для обобщенно-консервативных систем. Уравнения Уиттекера.

Действие по Гамильтону. Вариация действия по Гамильтону. Вариационный принцип Гамильтона.

Преобразование лагранжиана при замене координат и времени. Теорема Эмми Нётер.

Интегральные инварианты Пуанкаре–Картана и Пуанкаре. Обратные теоремы теории интегральных инвариантов. Теорема Лиувилля об инвариантности фазового объема гамильтоновой системы. Теорема Ли Хуа-чжуна об интегральных инвариантах первого порядка гамильтоновых систем.

3. **Канонические преобразования.
Уравнение Гамильтона–Якоби**

Канонические преобразования. Локальный критерий каноничности. Критерий каноничности в терминах производящих функций.

Преобразования, допускающие $(q, \tilde{q})$-описание (свободные преобразования). Правила преобразования гамильтонианов при канонических преобразованиях. Фазовый поток гамильтоновых систем как однопараметрическое семейство канонических преобразований.

Уравнение Гамильтона–Якоби. Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби и его использование в задаче интегрирования уравнений движения гамильтоновой системы. Случаи разделения переменных.

Литература

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. — 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2001.

2. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2001; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.

3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика: учебник для университетов. — Изд. 3-е, испр. — Москва : Изд-во «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

4. *Амелькин Н.И.* Динамика твердого тела: учеб. пособие. — 2-е изд. — Москва : МФТИ, 2010.

5. *Амелькин Н.И.* Лагранжева и гамильтонова механика: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2014.

6. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс теоретической механики. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.

7. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. — Москва : БИНОМ, 2004.

8. *Трухан Н.М.* Теоретическая механика. Методика решения задач: учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2010.

ЗАДАНИЯ

Первое задание

(срок сдачи с 22 по 27 марта 2021 г.)

Контрольная работа с 15 по 20 марта 2021 г.

1. **Равновесие. Принцип виртуальных перемещений**
14.10, 14.23, 14.36, 14.42

2. **Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости движения**
17.25
T1. Используя прямой метод Ляпунова, покажите, что нулевое положение равновесия системы асимптотически устойчиво

$$\dot{x} = -f_1(x) - f_2(y), \quad \dot{y} = f_3(x) - f_4(y),$$

где $f_i(z)$ — произвольные гладкие функции такие, что $\operatorname{sgn}(f_i(z)) = \operatorname{sgn}(z)$.

Указание. Функция Ляпунова $V(x,y) = \int\limits_0^x f_3(z)\,dz + \int\limits_0^y f_2(z)\,dz$.

T2. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = 2y^3 - x^5, \quad \dot{y} = -x - y^3 + y^5.$$

T3. Исследуйте на устойчивость систему

$$\dot{x} = xy - x^3 + y^3, \quad \dot{y} = x^2 - y^3.$$

T4. Исследуйте на устойчивость систему $(\alpha, \beta > 0)$

$$\dot{x} = -(x - \beta y)(1 - ax^2 - by^2), \quad \dot{y} = -(y + \alpha x)(1 - ax^2 - by^2).$$

3. **Устойчивость равновесия консервативных систем**
   15.15, 15.18, 15.21, 15.23

4. **Малые колебания консервативных систем**
   16.1, 16.11, 16.33, 16.47, 16.64, 16.107

5. **Асимптотическая устойчивость диссипативных систем**
   17.2, 17.8, 17.11 (a), 17.20, 17.28

6. **Вынужденные колебания**
   18.3, 18.17, 18.31, 18.37, 18.62

   Указание. При решении задачи 18.39 используйте нормальные координаты. Отдельно рассмотрите случай $\omega^4 - 3k^2\omega^2 + k^4 = 0$.

Второе задание

(срок сдачи с 10 по 15 мая 2021 г.)

Контрольная работа с 3 по 8 мая 2021 г.

7. **Функция Гамильтона и канонические уравнения**
   19.1, 19.9, 19.15, 19.19, 19.35, 19.77

8. **Первые интегралы. Скобки Пуассона**
   20.1, 20.15, 20.16, 20.30

9. **Принцип Гамильтона**
   21.2, 21.4, 21.12, 21.14, 21.33

10. **Интегральные инварианты**
    22.5, 22.15, 22.24, 22.32

11. **Канонические преобразования**
    23.1, 23.2, 23.48, 23.116

12. **Уравнение Гамильтона–Якоби**
    24.1, 24.22, 24.60, 24.63, 24.109
    T5. На плоскости рассматриваются два одинаковых неподвижных гравитационных центра, которые действуют на массивную точку M, которая может двигаться без трения по рассматриваемой плоскости. Составьте и решите уравнение Гамильтона-Якоби для этой системы.
    Указание. Воспользуйтесь эллиптическими координатами:

$\xi = r_1 + r_2$, $\eta = r_1 - r_2$, r_i — расстояние от точки M до i-го притягивающего центра.

Номера задач взяты из сборника Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н. Сборник задач по аналитической механике. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1996; 3-е изд. — Москва : Физматлит, 2002.

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа аэрокосмических технологий (ФАКТ)

для студентов 2 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова*, *О.П. Котова*
Компьютерная верстка *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 3,25. Тираж 130 экз. Заказ № 13.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок