

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ)

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований (ФРКТ). – Москва : МФТИ, 2021. – 36 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладная математика и физика»**
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 5 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские)
занятия — 45 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 105 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. П. Бурский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Предмет математической физики. Функциональные пространства, дифференциальные и интегральные операторы, обобщенные функции. Уравнения непрерывности, Пуассона, волновое, Максвелла, Шредингера. Постановки граничных задач математической физики на примере уравнения диффузии. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка в точке и их классификация. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка в окрестности точки в случае двух переменных.
2. Задача Коши для волнового уравнения в случае одной пространственной переменной. Представление решения. Принцип Дюамеля. Формула Даламбера. Область зависимости. Область единственности. Теорема существования и единственности классического решения. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на полуоси. Условия согласования начальных и граничных данных.
3. Задача Коши и смешанная задача для волнового уравнения в случае многих пространственных переменных. Закон сохранения энергии. Априорная оценка решения. Единственность классического решения. Теорема существования решения (без доказательства). Непрерывная зависимость решения от данных задачи. Понятие о корректной постановке задачи математической физики (по Адамару). Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши (для уравнения Лапласа).
4. Понятие обобщенного (слабого) решения задачи Коши для волнового уравнения. Разрывные решения. Распространение особенностей. Задача Коши для волнового уравнения в случае двух и трех пространственных переменных. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Характеристический конус. Область зависимости. Область единственности.
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Вывод формулы Пуассона с помощью преобразования Фурье. Принцип Дюамеля. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Класс Тихонова.
6. Расширения дифференциального оператора. Симметричный дифференциальный оператор и свойства его собственных чисел и собственных функций. Примеры. Сопряженные и самосопряженные краевые условия, сопряженный оператор. Формулы Грина и фундаментальное решение оператора Лапласа. Формула представления решения уравнения Пуассона. Компактность обратного к оператору Лапласа с однородными данными Дирихле (без доказательства). Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствие о полноте системы собственных функций самосопряженного компактного оператора (без доказательства).

7. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. Сходимость рядов Фурье. Теорема существования и единственности классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных.
8. Гармонические функции. Принцип максимума для гармонических функций в ограниченной области. Следствия. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Непрерывная зависимость решения от граничных данных.
9. Метод Фурье решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Необходимое условие разрешимости. Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга. Внешние краевые задачи, условия на бесконечности. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре и вне шара. Сферические функции.
10. Теорема о среднем для гармонических функций. Понятие слабого решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Корректность определения слабого решения. Примеры. Теорема существования и единственности слабого решения краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области. Повышение гладкости решения. Функция Грина области. Интеграл Пуассона. Аналитичность гармонической функции.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., переработанное и дополненное. — Москва : Физматлит, 2016.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
4. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Язуа, 1998.

Дополнительная

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
7. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
8. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Университетская серия. — Т. 7. — Новосибирск : «Тамара Рожковская», 2003.
9. *Колесникова С. И.* Методы решения основных задач уравнений математической физики. — Москва : МФТИ, 2015.
10. *Михайлова Т. В., Хасанов А. А.* Некоторые методы решения типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2020.

ЗАДАНИЯ

Номера всех задач, за исключением текстовых, указаны по последнему четвертому изданию задачника [2]. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях. Задачи, отмеченные звездочкой*, не являются обязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определить тип уравнения и указать те множества на плоскости, где он сохраняется:
 - (а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y^2 = 5x$;
 - (б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xu_{yy} - u_x = 0$.
2. Определить тип уравнения $u_{xx} + 2\alpha u_{xy} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0$ при различных вещественных значениях α и β ($\alpha, \beta = \text{const}$).
3. §2: 2.1(5), 2.2(2,3).

II. Уравнения гиперболического типа для двух независимых переменных. Метод характеристик

4. §2: 2.3(1,2,7), 2.4, 2.11(5), 2.11(8)*.
5. Решить задачу Коши и указать наибольшее множество, на котором решение однозначно определено данными задачи:
 - (а) $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, u|_{y=0} = 2x^2, u_y|_{y=0} = 2x, 1 < x < 4$;
 - (б) §12: 12.3, 12.4*;
 - (в) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4, u|_{y=1} = 3x^4, u_y|_{y=1} = 0, 1 < x < 2$;

$$(г) \quad yu_{xx} + (1+y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{(u_x+u_y)}{(1-y)} = 0, \quad y < 1, \\ u|_{y=0} = x^2 + 2x, u_y|_{y=0} = -2x, 0 < x < \frac{3}{2}.$$

6. Решить задачу Гурса и найти максимальное множество, на котором решение однозначно определено данными задачи:

$$(а) \quad x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \quad x^{-2} < y < x^2, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=1/x^2} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4;$$

(б) §14: 14.37.

7. Решить задачу, указав наибольшую область, в которой решение определено единственным образом:

$$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 8x, \quad -2 < x \leq 0,$$

$$u|_{y=x} = 8x^2 + 9x^3, \quad 0 \leq x < 1.$$

III. Одномерное волновое уравнение

8. (а) §12: 12.34, 12.42(7);

(б) Решить задачу Коши:

$$4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Решить начально-краевую задачу на полуоси:

$$(а) \quad u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0, \quad (u - u_x)|_{x=0} = 4t - \cos t, \quad t \geq 0;$$

$$(б) \quad 4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0;$$

(в) §21: 21.4, 21.15, 21.18;

$$(г) \quad u_{tt} = u_{xx} + 4, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = 1 - x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2, \quad t \geq 0.$$

IV. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

10. Решить задачу Коши:

$$(а) \quad u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2 \cos(x+2y), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$u|_{t=0} = (2x + y - z) \cos y, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

$$(б) \quad u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t} \cos(x - y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_t|_{t=0} = 3 \cos(x - y + z);$$

$$(в) \quad u_{tt} = \Delta u - 81(t+1)^2 \operatorname{sh}(2x - 2y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2;$$

$$(г) \quad u_{tt} = \Delta u + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} \right) \cos t, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = r^2 \sin^3 r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_t|_{t=0} = ze^y;$$

$$(д) \quad u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0;$$

(е) §12: 12.43(4,6), 12.44(2,8).

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

§13: 13.5(3), 13.2, 13.7(4)*.

1. Решить задачу Коши:

(а) $u_t = u_{xx} + \sin t$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u|_{t=0} = e^{-a^2 x^2}$;

(б) $10u_t = \Delta u + 2x \cos(x + y)$, $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u|_{t=0} = (3x + y)^3$;

(в) $u_t = \Delta u + 27(t^2 - 1) \cos(x + y + z)$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
 $u|_{t=0} = (x - y + z) \sin z - (z - 1)^3 e^{-(x-y)^2}$;

(г) $u_t = \Delta u + \frac{5x^2 - 12y^2 + 7z^2}{t^2 + 1}$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u|_{t=0} = 2x e^{-(x+y)^2}$;

(д) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos t$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u|_{t=0} = x \cos(x + y)$.

II. Метод Фурье для начально-краевой задачи на отрезке

2. Решить начально-краевую задачу:

(а) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2$, $t > 0$, $0 < x < 1$,

$u|_{t=0} = \sin 3\pi x$, $u_t|_{t=0} = x$, $x \in [0; 1]$, $u|_{x=0} = t^2$, $u|_{x=1} = t + t^2$, $t \geq 0$;

(б) $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$, $x \in [0; \pi]$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t$, $t \geq 0$;

(в) $u_t = u_{xx} - u + t(x^2 - 2)/2\pi$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u|_{t=0} = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = t$, $t \geq 0$;

(г) $u_{tt} = u_{xx} + 80(u - t) + x \sin t$, $t > 0$, $0 < x < \pi/2$,

$u|_{t=0} = \sin 9x$, $u_t|_{t=0} = 1$, $x \in [0; \pi/2]$; $u|_{x=0} = t$, $u_x|_{x=\pi/2} = 0$, $t \geq 0$;

(д) §20: 20.1(2), 20.5, 20.14(4), 20.56(3)*.

III. Метод Фурье для начально-краевой задачи в прямоугольнике

3. §20 20.21, 20.22

IV. Метод Фурье в краевых задачах для оператора Лапласа в плоских областях с круговыми границами

4. Решить краевую задачу:

(а) §16 16.1(2) (решить также и внешнюю задачу при $r > 1$ с тем же граничным условием), 16.3(1);

(б) $\Delta u = 16r \sin \varphi$, $1 < r < 3$, $u_r|_{r=1} = 3 \cos 3\varphi$,

$u|_{r=3} = 9(4 \sin \varphi + 3 \cos 3\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

(в) $\Delta u = 12r^2 \sin^2 \varphi - 2$, $r < 1$, $(u_r + u)|_{r=1} = 5 \sin^4 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

(г) $\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi$, $r > 1$, $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

5. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана:

$$\Delta u = y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

и решить задачу при таких α .

6. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце $1 < r < 2$.

Ответ записать в декартовых координатах:

(а) §16 16.4(2), 16.10(1)*

$$(\underline{б}) \Delta u = 4 \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \quad (2u - u_r)|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad u_r|_{r=2} = \frac{8x^2}{x^2+y^2};$$

$$(\text{в}) \Delta u = 2 \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad u_r|_{r=1} = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (u_r + u)|_{r=2} = \frac{(x+y)^2}{16(x^2+y^2)}.$$

V. Краевые задачи для уравнения Пуассона в трехмерных областях со сферическими границами

7. §16: 16.21(4), 16.26(2), 16.29(3), 16.31(1), 16.24*.

8. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в сферических координатах $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$:

$$(а) \Delta u = 6z; \quad r < 1, \quad u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta;$$

$$(\underline{б}) \Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2; \quad (u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin(\frac{\pi}{6} - \varphi), \quad u(\infty) = 0;$$

$$(\underline{в}) \Delta u = 0; \quad 1/2 < r < 1, \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad u|_{r=1} = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta.$$

VI. Слабые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

9. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D и $H^k(D) = \{u \in H := L_2(D) | \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k, \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} \in L_2(D)\}$ – пространство Соболева с нормой $\|u\|_{H^k(D)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}\|_H^2$, а $H_0^k(D)$ – пополнение множества $C_0^\infty(D)$ по метрике пространства $H^k(D)$. Функция $u \in H_0^1(D)$ называется слабым решением однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(D)$ выполнено тождество $\int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dx = \int_D f \varphi dx$ (см. §19).

Доказать:

- (а) что сильное (классическое) решение $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ однородной задачи Дирихле $u|_{\partial D} = 0$ для уравнения $-\Delta u = f \in C(\overline{D})$ является слабым решением этой задачи;
- (б) неравенство Фридрихса $\|\nabla u\|_H \geq C \|u\|_H$, где $\|\nabla u\|_H := \sqrt{\int_D |\nabla u|^2 dx}$, то есть, что существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in H_0^1(D)$ выполнено неравенство Фридрихса (сначала докажите для $u \in C_0^\infty(D)$ и для $D = [0, 1]$);
- (в) что для всякой функции $v \in C_0^\infty(D)$ выполнено неравенство $\|v\|_H \leq C \|\Delta v\|_H$ с некоторым $C > 0$;
- (г) что новое скалярное произведение $\langle u, v \rangle_{H_0^1(D)} = \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx$ порождает в пространстве $H_0^1(D)$ норму, эквивалентную исходной;
- (д) что для $f \in H$ и $v \in H_0^1(D)$ неравенство $(f, v)_H \leq C \|f\|_H \|v\|_{H_0^1(D)}$ влечет, что функционал F , заданный на пространстве $H_0^1(D)$ формулой $F(v) = (f, v)_H$, является линейным и непрерывным;
- (е) что применение теоремы Рисса-Фишера к функционалу F в пространстве $H_0^1(D)$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle_{H_0^1(D)}$ дает теорему существования и единственности слабого решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: **10.05.01 Компьютерная безопасность**
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: **3**
семестр: **6**

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть — 5 зачет. ед.:

лекции — 45 часов

практические (семинарские)

занятия — 45 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 90

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил

д. ф.-м. н., профессор В. П. Бурский

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Предмет математической физики. Функциональные пространства, дифференциальные и интегральные операторы, обобщенные функции. Уравнения непрерывности, Пуассона, волновое, Максвелла, Шредингера. Постановки граничных задач математической физики на примере уравнения диффузии. Приведение к каноническому виду линейных уравнений второго порядка в точке и их классификация. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка в окрестности точки в случае двух переменных.
2. Задача Коши для волнового уравнения в случае одной пространственной переменной. Представление решения. Принцип Дюамеля. Формула Даламбера. Область зависимости. Область единственности. Теорема существования и единственности классического решения. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на полуоси. Условия согласования начальных и граничных данных.
3. Задача Коши и смешанная задача для волнового уравнения в случае многих пространственных переменных. Закон сохранения энергии. Априорная оценка решения. Единственность классического решения. Теорема существования решения (без доказательства). Непрерывная зависимость решения от данных задачи. Понятие о корректной постановке задачи математической физики (по Адамару). Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши (для уравнения Лапласа).
4. Понятие обобщенного (слабого) решения задачи Коши для волнового уравнения. Разрывные решения. Распространение особенностей. Задача Коши для волнового уравнения в случае двух и трех пространственных переменных. Формулы Пуассона и Кирхгофа. Характеристический конус. Область зависимости. Область единственности.
5. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Вывод формулы Пуассона с помощью преобразования Фурье. Принцип Дюамеля. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Класс Тихонова.
6. Расширения дифференциального оператора. Симметричный дифференциальный оператор и свойства его собственных чисел и собственных функций. Примеры. Сопряженные и самосопряженные краевые условия, сопряженный оператор. Формулы Грина и фундаментальное решение оператора Лапласа. Формула представления решения уравнения Пуассона. Компактность обратного к оператору Лапласа с однородными данными Дирихле (без доказательства). Теорема Гильберта–Шмидта и ее следствие о полноте системы собственных функций самосопряженного компактного оператора (без доказательства).

7. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. Сходимость рядов Фурье. Теорема существования и единственности классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных.
8. Гармонические функции. Принцип максимума для гармонических функций в ограниченной области. Следствия. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Непрерывная зависимость решения от граничных данных.
9. Метод Фурье решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Необходимое условие разрешимости. Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга. Внешние краевые задачи, условия на бесконечности. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Метод Фурье решения краевой задачи для уравнения Лапласа в шаре и вне шара. Сферические функции.
10. Теорема о среднем для гармонических функций. Понятие слабого решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Корректность определения слабого решения. Примеры. Теорема существования и единственности слабого решения краевой задачи для уравнения Пуассона в ограниченной области. Повышение гладкости решения. Функция Грина области. Интеграл Пуассона. Аналитичность гармонической функции.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — 2-е изд. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. *Владимиров В. С., Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., переработанное и дополненное. — Москва : Физматлит, 2016.
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
4. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Язуа, 1998.

Дополнительная

5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
7. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
8. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Университетская серия. — Т. 7. — Новосибирск : «Тамара Рожковская», 2003.
9. *Колесникова С. И.* Методы решения основных задач уравнений математической физики. — Москва : МФТИ, 2015.
10. *Михайлова Т. В., Хасанов А. А.* Некоторые методы решения типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2020.

ЗАДАНИЯ

Номера всех задач, за исключением текстовых, указаны по последнему четвертому изданию задачника [2]. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях. Задачи, отмеченные звездочкой*, не являются обязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определить тип уравнения и указать те множества на плоскости, где он сохраняется:
 - (а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y^2 = 5x$;
 - (б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xu_{yy} - u_x = 0$.
2. Определить тип уравнения $u_{xx} + 2\alpha u_{xy} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0$ при различных вещественных значениях α и β ($\alpha, \beta = \text{const}$).
3. §2: 2.1(5), 2.2(2,3).

II. Уравнения гиперболического типа для двух независимых переменных. Метод характеристик

4. §2: 2.3(1,2,7), 2.4, 2.11(5), 2.11(8)*.
5. Решить задачу Коши и указать наибольшее множество, на котором решение однозначно определено данными задачи:
 - (а) $yu_{xx} + (x-y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0, u|_{y=0} = 2x^2, u_y|_{y=0} = 2x, 1 < x < 4$;
 - (б) §12: 12.3, 12.4*;
 - (в) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4, u|_{y=1} = 3x^4, u_y|_{y=1} = 0, 1 < x < 2$;

$$(г) \quad yu_{xx} + (1+y)u_{xy} + u_{yy} + \frac{(u_x+u_y)}{(1-y)} = 0, \quad y < 1, \\ u|_{y=0} = x^2 + 2x, u_y|_{y=0} = -2x, \quad 0 < x < \frac{3}{2}.$$

6. Решить задачу Гурса и найти максимальное множество, на котором решение однозначно определено данными задачи:

$$(а) \quad x^2 u_{xx} - 4y^2 u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \quad x^{-2} < y < x^2, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=1/x^2} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4;$$

(б) §14: 14.37.

7. Решить задачу, указав наибольшую область, в которой решение определено единственным образом:

$$u_{yy} - 4u_{xx} = 0, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = 8x, \quad -2 < x \leq 0,$$

$$u|_{y=x} = 8x^2 + 9x^3, \quad 0 \leq x < 1.$$

III. Одномерное волновое уравнение

8. (а) §12: 12.34, 12.42(7);

(б) Решить задачу Коши:

$$4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

9. Решить начально-краевую задачу на полуоси:

$$(а) \quad u_{tt} = 4u_{xx} - x \cos t, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geq 0, \quad (u - u_x)|_{x=0} = 4t - \cos t, \quad t \geq 0;$$

$$(б) \quad 4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geq 0;$$

(в) §21: 21.4, 21.15, 21.18;

$$(г) \quad u_{tt} = u_{xx} + 4, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

$$u|_{t=0} = 1 - x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad (u_x + u)|_{x=0} = \frac{3}{2}t^2, \quad t \geq 0.$$

IV. Задача Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$

10. Решить задачу Коши:

$$(а) \quad u_{tt} = \frac{1}{5}\Delta u + 2t^2 \cos(x+2y), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$u|_{t=0} = (2x + y - z) \cos y, \quad u_t|_{t=0} = \frac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

$$(б) \quad u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t} \cos(x - y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_t|_{t=0} = 3 \cos(x - y + z);$$

$$(в) \quad u_{tt} = \Delta u - 81(t+1)^2 \operatorname{sh}(2x - 2y + z), \quad t > 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2;$$

$$(г) \quad u_{tt} = \Delta u + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} \right) \cos t, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = r^2 \sin^3 r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_t|_{t=0} = ze^y;$$

$$(д) \quad u_{tt} = \Delta u, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad u|_{t=0} = e^{-x^2}(y^2 - z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0;$$

(е) §12: 12.43(4,6), 12.44(2,8).

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

§13: 13.5(3), 13.2, 13.7(4)*.

1. Решить задачу Коши:

(а) $u_t = u_{xx} + \sin t$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u|_{t=0} = e^{-a^2 x^2}$;

(б) $10u_t = \Delta u + 2x \cos(x+y)$, $t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u|_{t=0} = (3x+y)^3$;

(в) $u_t = \Delta u + 27(t^2 - 1) \cos(x+y+z)$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,
 $u|_{t=0} = (x-y+z) \sin z - (z-1)^3 e^{-(x-y)^2}$;

(г) $u_t = \Delta u + \frac{5x^2 - 12y^2 + 7z^2}{t^2 + 1}$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u|_{t=0} = 2x e^{-(x+y)^2}$;

(д) $u_t = \Delta u + (x^2 + y^2 - 2z^2) \cos t$, $t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u|_{t=0} = x \cos(x+y)$.

II. Метод Фурье для начально-краевой задачи на отрезке

2. Решить начально-краевую задачу:

(а) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2$, $t > 0$, $0 < x < 1$,

$u|_{t=0} = \sin 3\pi x$, $u_t|_{t=0} = x$, $x \in [0; 1]$, $u|_{x=0} = t^2$, $u|_{x=1} = t + t^2$, $t \geq 0$;

(б) $u_{tt} = u_{xx} - 2 \cos 3t$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u|_{t=0} = x^2$, $u_t|_{t=0} = 0$, $x \in [0; \pi]$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t$, $t \geq 0$;

(в) $u_t = u_{xx} - u + t(x^2 - 2)/2\pi$, $t > 0$, $0 < x < \pi$,

$u|_{t=0} = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, $u_x|_{x=0} = 0$, $u_x|_{x=\pi} = t$, $t \geq 0$;

(г) $u_{tt} = u_{xx} + 80(u - t) + x \sin t$, $t > 0$, $0 < x < \pi/2$,

$u|_{t=0} = \sin 9x$, $u_t|_{t=0} = 1$, $x \in [0; \pi/2]$; $u|_{x=0} = t$, $u_x|_{x=\pi/2} = 0$, $t \geq 0$;

(д) §20: 20.1(2), 20.5, 20.14(4), 20.56(3)*.

III. Метод Фурье для начально-краевой задачи в прямоугольнике

3. §20 20.21, 20.22

IV. Метод Фурье в краевых задачах для оператора Лапласа в плоских областях с круговыми границами

4. Решить краевую задачу:

(а) §16 16.1(2) (решить также и внешнюю задачу при $r > 1$ с тем же граничным условием), 16.3(1);

(б) $\Delta u = 16r \sin \varphi$, $1 < r < 3$, $u_r|_{r=1} = 3 \cos 3\varphi$,

$u|_{r=3} = 9(4 \sin \varphi + 3 \cos 3\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

(в) $\Delta u = 12r^2 \sin^2 \varphi - 2$, $r < 1$, $(u_r + u)|_{r=1} = 5 \sin^4 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;

(г) $\Delta u = -\frac{9}{r^2} \cos 3\varphi$, $r > 1$, $(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3 \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

5. Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана:

$$\Delta u = y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$

$$u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

и решить задачу при таких α .

6. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в кольце $1 < r < 2$.

Ответ записать в декартовых координатах:

(а) §16 16.4(2), 16.10(1)*

$$(\underline{б}) \Delta u = 4 \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \quad (2u - u_r)|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad u_r|_{r=2} = \frac{8x^2}{x^2+y^2};$$

$$(\text{в}) \Delta u = 2 \frac{(x-y)^2}{(x^2+y^2)^3}, \quad u_r|_{r=1} = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad (u_r + u)|_{r=2} = \frac{(x+y)^2}{16(x^2+y^2)}.$$

V. Краевые задачи для уравнения Пуассона в трехмерных областях со сферическими границами

7. §16: 16.21(4), 16.26(2), 16.29(3), 16.31(1), 16.24*.

8. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона в сферических координатах $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$:

$$(a) \Delta u = 6z; \quad r < 1, \quad u|_{r=1} = 2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^3 \theta;$$

$$(\underline{б}) \Delta u = \frac{1}{r^4}, \quad r > 2; \quad (u - u_r)|_{r=2} = \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{6} - \varphi \right), \quad u(\infty) = 0;$$

$$(\text{в}) \Delta u = 0; \quad 1/2 < r < 1, \quad u|_{r=1/2} = 0, \quad u|_{r=1} = 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta.$$

VI. Слабые решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

9. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей ∂D и $H^k(D) = \{u \in H := L_2(D) | \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq k, \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha} \in L_2(D)\}$ – пространство Соболева с нормой $\|u\|_{H^k(D)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^\alpha}\|_H^2$, а $H_0^k(D)$ – пополнение множества $C_0^\infty(D)$ по метрике пространства $H^k(D)$. Функция $u \in H_0^1(D)$ называется слабым решением однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$, если $\forall \varphi \in C_0^\infty(D)$ выполнено тождество $\int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi) dx = \int_D f \varphi dx$ (см. §19).

Доказать:

- (а) что сильное (классическое) решение $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ однородной задачи Дирихле $u|_{\partial D} = 0$ для уравнения $-\Delta u = f \in C(\bar{D})$ является слабым решением этой задачи;
- (б) неравенство Фридрихса $\|\nabla u\|_H \geq C \|u\|_H$, где $\|\nabla u\|_H := \sqrt{\int_D |\nabla u|^2 dx}$, то есть, что существует такая постоянная $C > 0$, что для всех $u \in H_0^1(D)$ выполнено неравенство Фридрихса (сначала докажите для $u \in C_0^\infty(D)$ и для $D = [0, 1]$);
- (в) что для всякой функции $v \in C_0^\infty(D)$ выполнено неравенство $\|v\|_H \leq C \|\Delta v\|_H$ с некоторым $C > 0$;
- (г) что новое скалярное произведение $\langle u, v \rangle_{H_0^1(D)} = \int_D \nabla u \cdot \nabla v dx$ порождает в пространстве $H_0^1(D)$ норму, эквивалентную исходной;
- (д) что для $f \in H$ и $v \in H_0^1(D)$ неравенство $(f, v)_H \leq C \|f\|_H \|v\|_{H_0^1(D)}$ влечет, что функционал F , заданный на пространстве $H_0^1(D)$ формулой $F(v) = (f, v)_H$, является линейным и непрерывным;
- (е) что применение теоремы Рисса-Фишера к функционалу F в пространстве $H_0^1(D)$ со скалярным произведением $\langle u, v \rangle_{H_0^1(D)}$ дает теорему существования и единственности слабого решения однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: **03.03.01 «Прикладные математика и физика»**
физтех-школа: **ФРКТ**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов

Экзамен – нет

практические (семинарские)

занятия – нет

лабораторные занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 6 семестр

Самостоятельная работа – 75 часов

ВСЕГО ЧАСОВ – 60

Программу и задание составил

д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН И. Б. Петров

Программа принята на заседании кафедры
вычислительной физики
24 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН

И. Б. Петров

1. Жесткие задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад). *Методы Гира в представлении Нордсика. *Исследование схем на A -устойчивость, L -устойчивость.
2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, прогонка). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). *Метод конечных элементов. Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Понятие жесткой краевой задачи.
3. Численные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Исследование разностных схем на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. *Элементы теории Самарского об исследовании устойчивости двухслойных схем на основе энергетических неравенств.
4. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем.
5. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.
6. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение. Численное решение многомерных уравнений теплопроводности. Методы расщепления.
7. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка

количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

8. *Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Литература

(Основная)

1. *Рябенский В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с.; 3-е изд. М.: Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику / под редакцией А.И. Лобанова. 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с., Долгопрудный: Интеллект, 2008. – 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Лобанов А.И., Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. – Москва : Интернет–Университет информационных технологий, 2006. – 522 с.
4. *Аристова Е.Н., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. – Москва : МФТИ, 2015. – 310 с.
- 5.

(Дополнительная)

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». – 2-е изд, исправленное и дополненное / *В. Д. Иванов, В. И. Косарев, А. И. Лобанов, И. Б. Петров, В. Б. Пирогов, В. С. Рябенский, Т. К. Старожилова, А. Г. Тормасов, С. В. Утюжников, А. С. Холодов.* – Москва : Изд-во МЗ-пресс, 2003 — 196 с.
3. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – Москва : Наука, 1989.

Аудиторная контрольная работа — вторая декада марта

Задание 1 (срок сдачи - вторая неделя марта)

Задачи из пособия [5].

IX.7.7, IX.7.11*, IX.7.15 7), IX.7.18, IX.7.19, IX.7.20,
X.7.1, X.7.2, X.7.3, X.7.4, X.7.5, X.7.10, X.7.12, X.7.13, X.7.19, X.8.12,
XI.8.1, XI.8.2 в, XI.8.3, XI.8.4 в, д, XI.8.5, XI.8.10 б, XI.9.1, XI.9.3.

*Одна задача из раздела X.9 или XI.9 по согласованию с преподавателем

*Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.

Потоковая контрольная работа — первая декада мая

Задание 2 (срок сдачи 20–31 апреля)

Задачи из пособия [5].

ХII.7.1, ХII.7.2, ХII.7.3, ХII.7.4, ХII.7.6, ХII.7.8, ХII.7.15, ХII.7.19, ХII.7.27,
ХIII.7.3, ХIII.8.2, ХIII.9.1, ХIII.9.2, ХIII.9.7, ХIII.9.8, ХIII.9.9, ХIII.9.17,
ХIV.7.3, ХIV.8.5, ХIV.9.1, ХIV.9.2 в, г, ж, ХIV.9.6, ХIV.9.8 (кабаре),
ХIV.9.11 а, ХIV.9.14 б,
ХV.6.3, ХV.7.1, ХV.7.4

* Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:

1. Уравнение переноса.
2. Уравнение теплопроводности.
- 4.* Курсовая работа – самостоятельная реализация разностной схемы для нелинейного уравнения в частных производных или системы нелинейных уравнений в частных производных (по согласованию с преподавателем)

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая механика

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФРКТ

кафедра: теоретической физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 2 зачет. ед.

лекции – 30 часов

Дифф. зачет – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа
– 30 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н.

А. В. Гец

Программа принята на заседании

кафедры теоретической физики

25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

1. Волновые свойства частиц

Волна де Бройля. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорости волн, соответствующих свободной частице. Уравнение Шредингера. Оператор Гамильтона. Общее решение уравнения Шредингера в случае, когда гамильтониан не зависит от времени. Стационарное уравнение Шредингера. Статистическая интерпретация волновой функции. Стационарные состояния. Одномерное движение. Потенциальная яма. Дискретный и непрерывный энергетические спектры.

2. Операторы физических величин

Условие нормировки волн де Бройля. Средние значения координаты и импульса. Операторы координаты и импульса. Постановка задачи на собственные функции и собственные значения операторов.

3. Математический аппарат квантовой механики

Состояние и волновая функция. Принцип суперпозиции состояний. Дираковская формулировка квантовой механики. Вектор состояния. Наблюдаемые и операторы физических величин. Линейные и эрмитовы операторы. Условия ортогональности и полноты для собственных функций операторов физических величин. Нормировка собственных функций на единицу и δ -функцию. Квантовый бит (кубит). Квантовая криптография.

4. Одновременная (совместная) измеримость физических величин

Условия одновременной измеримости физических величин. Коммутаторы. Соотношение неопределенностей.

5. Квантовая динамика частицы

Уравнение непрерывности для плотности вероятности. Плотность тока вероятности. Коэффициенты прохождения и отражения. Оператор изменения во времени физической величины. Интегралы движения. Коммутаторы и скобки Пуассона. Производные по времени операторов координаты и импульса частицы в потенциальном поле. Теоремы Эренфеста. Движение в периодическом поле.

6. Теория представлений

Матричные представления. Унитарные преобразования векторов состояний и операторов. Координатное и импульсное представления. Оператор эволюции. Представления Шредингера и Гейзенберга. Уравнения Гейзенберга для операторов физических величин.

7. Операторные методы в квантовой механике

Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ в теории линейного гармонического осциллятора. Энергетический спектр линейного гармонического осциллятора. Построение собственных функций осциллятора в координатном представлении с помощью операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$. Связь n -го состояния осциллятора с основным.

8. Угловой момент

Повороты и оператор углового момента. Изотропность пространства и сохранение углового момента в квантовой механике. Коммутационные соотношения для операторов углового момента. Система собственных векторов операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$. Спин частицы. Матрицы Паули. Сфера Блоха. Оператор орбитального момента частицы в координатном представлении. Сферические гармоники.

9. Движение в центрально-симметричном поле

Разделение переменных в квантово-механической задаче двух тел. Центрально-симметричное поле. Гамильтониан частицы в сферических координатах. Разделение переменных в центрально-симметричном поле. Уравнение для радиальной функции.

10. Атом водорода

Атом водорода. Атомная система единиц. Энергетический спектр и радиальные волновые функции стационарных состояний атома водорода. Главное и радиальное квантовые числа. Кратность вырождения уровней. Кулоновское (случайное) вырождение.

11. Квазиклассическое приближение

Критерий применимости квазиклассического приближения. Вид волновой функции в квазиклассическом приближении. Связь между двумя квазиклассическими решениями, взятыми по разные стороны от точки поворота. Условия квантования Бора–Зоммерфельда. Вероятность проникновения частицы через барьер в квазиклассическом приближении.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : Физматлит, 2001.
2. *Белоусов Ю.М.* Курс квантовой механики. – Москва : МФТИ, 2006.
3. *Киселёв В.В.* Квантовая механика. Курс лекций. – Москва : МЦНМО, 2009.
4. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. – Москва : Наука, 1973.
5. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике : учеб. пособие. — Долгопрудный : Издательский Дом «Интеллект», 2013.
6. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.

Дополнительная

1. *Львовский А.* Отличная квантовая механика : Учебное пособие – Москва : Альпина нон-фикшн, 2019.
2. *Sakurai J.J., Napolitano Jim J.* Modern Quantum Mechanics (2nd Edition). – Addison Wesley Longman, 2010.
3. *Мессиа А.* Квантовая механика. – Москва : Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
4. *Шифф Л.* Квантовая механика. – Москва : ИЛ, 1967.
5. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. – Москва : Наука, 1976.
6. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику : учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2005.
7. *Елютин П.В., Кривченков В.Д.* Квантовая механика. – Москва : Наука, 1976.
8. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. I. – Москва : Мир, 1974.

1-е ЗАДАНИЕ

УПРАЖНЕНИЯ

- 1.^C Найти операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к операторам: (а) инверсии $\hat{I}$ и (б) трансляции $\hat{T}_a$.
2. Доказать, что операторы координаты, импульса и энергии эрмитовы.
3. Доказать, что оператор $\hat{A}^+ \hat{A}$ является эрмитовым (при любом $\hat{A}$) и $\langle \psi | \hat{A}^+ \hat{A} | \psi \rangle \geq 0$ (при любом ψ).
- 4.^C Найти собственные значения и собственные функции оператора инверсии $\hat{I}$.
- 5.^C Найти собственные значения и собственные функции оператора трансляции $\hat{T}_a$.
6. Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A} [\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}] \hat{B},$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C}.$$

7. Раскройте следующие коммутаторы:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x^2], \quad [U(x), \hat{p}_x], \quad [\hat{T}_a, \hat{x}], \quad [\hat{T}_a, \hat{p}_x].$$

8. Найти явный вид оператора $e^{i\varphi \hat{I}}$.
9. Получить разложение

$$e^{\xi \hat{A}} \hat{B} e^{-\xi \hat{A}} = \hat{B} + \xi [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} \xi^2 [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

10. Упростить следующее выражение:

$$e^{i\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}/\hbar} U(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{a}\hat{\mathbf{p}}/\hbar},$$

где $\mathbf{a}$ – постоянный вектор.

ЗАДАЧИ

- 1.^C Частица массы m движется в одномерном потенциальном "ящике" с бесконечно высокими стенками:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ +\infty, & x < 0, \quad x > a. \end{cases}$$

Найти уровни энергии E_n и нормированные волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Вычислить средние значения $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ для n -го стационарного состояния. Обсудить величину $\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle$ в связи с соотношением неопределенностей.

Нарисуйте траектории движения классической частицы в фазовом пространстве (x, p) , отвечающие энергиям E_n . Исследуйте, как меняется площадь в фазовом пространстве, охватываемая каждой такой траекторией, при переходе от одного стационарного состояния к другому ("фазовый объем, приходящийся на одно квантовое состояние").

- 2.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерной "прямоугольной" потенциальной яме конечной глубины:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найти уровни энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Исследуйте, существуют ли связанные состояния в "прямоугольной" потенциальной яме фиксированной ширины $2a$, если $U_0 \rightarrow 0$? Согласуется ли результат с соотношением неопределенностей?

Можно ли, напротив, получить решение задачи 1 предельным переходом $U_0 \rightarrow \infty$?

Воспользуйтесь полученными результатами для оценки числа уровней электрона в металлическом образце (глубина потенциала $U_0 = 10$ эВ примерно равна работе выхода), если (а) $a = 0.1$ нм ("атом"); (б) $a = 10$ нм ("наночастица"); (в) $a = 1$ см ("макроскопический образец").

3. Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для частицы массы m в одномерной потенциальной яме

следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Что здесь можно сказать о связанных состояниях при фиксированном a и $U_0 \rightarrow 0$?

- 4.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерной модельной потенциальной яме, вид которой может быть представлен δ -функцией:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha_0}{m} \delta(x),$$

где α_0 – параметр ямы. Покажите, что в этой яме имеется только одно связанное состояние; найдите энергию уровня и волновую функцию частицы в координатном представлении. Вычислить $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии.

- 5.^C Частица массы m находится в связанном состоянии в δ -потенциале (см. задачу 4). В момент $t = 0$ происходит мгновенное изменение параметра ямы от α_0 до α_1 . Найти вероятность "ионизации", т.е. перехода в непрерывный спектр. Обсудить эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $\alpha_1 = 0$.

6. Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -A\delta(x-a), & x > 0. \end{cases}$$

Найти зависимость числа связанных состояний от параметров a и A . Нарисовать графики волновых функций связанных состояний.

- 7.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha_0}{m} (\delta(x+a) + \delta(x-a)),$$

где α_0 – параметр потенциала. Найти энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров a и α_0 ? Сравнить с результатами задачи 6.

Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода H_2 , исследуйте зависимость энергий уровней от a при фиксированном α_0 .

8^C Покажите, что в случае $\alpha_0 a \gg 1$ задачи 7 связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. В этом же пределе $\alpha_0 a \gg 1$ найдите вероятность нахождения частицы в момент t в правой яме ($x = a$), если при $t = 0$ она находилась в левой яме ($x = -a$). Обсудите связь со структурой низколежащих уровней молекулы аммиака NH_3 .

9* Частица массы m движется в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = \begin{cases} A\delta(x), & |x| < a, \\ +\infty, & |x| > a, \end{cases}$$

где $A > 0$. Найти энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. В случае, когда $maA/\hbar^2 \gg 1$, исследуйте положения уровней в нижней части спектра.

10^C Частица массы m движется в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где α_0 и a – параметры потенциала. Исследуйте, при каких отрицательных и положительных энергиях E частицы такое движение возможно. Покажите, что имеются зоны "разрешенных" и "запрещенных" энергий.

Исследуйте, что происходит с ширинами зон в предельных случаях $\alpha_0 a \gg 1$ (сильная связь) и $\alpha_0 a \ll 1$ (слабая связь).

11* Пусть в некоторый фиксированный момент t состояние частицы массы m описывается волновой функцией $\psi_0(x)$ такой, что $\langle x \rangle = x_0$, $\langle p \rangle = p_0$, а произведение неопределенностей координаты и импульса этой частицы принимает минимальное значение, т.е.

$$\langle (\hat{x} - x_0)^2 \rangle \langle (\hat{p} - p_0)^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Состояние частицы, которое описывается такой волновой функцией $\psi_0(x)$, называется "когерентным". Докажите, что

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}} e^{i\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}}, \quad \sigma_x^2 \equiv \langle (\hat{x} - x_0)^2 \rangle.$$

Исследуйте, как меняется во времени волновая функция свободной частицы $\Psi(x, t)$ (и $|\Psi(x, t)|^2$), если $\Psi(x, 0) = \psi_0(x)$.

- 12^C Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и в области $x > 0$ попадает в область действия потенциала, который имеет вид: (а) прямоугольной потенциальной ямы ширины a и глубины U_0 , (б) прямоугольного потенциального барьера ширины a и высоты U_0 . Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы от указанных потенциалов; нарисуйте графики. Существуют ли энергии, при которых ямы и барьеры полностью прозрачны для падающих частиц? Если "да", то сформулируйте, чем определяются эти энергии. Если "нет", нарисуйте котика.

В случае потенциальной ямы предложите способ оценки энергии E_0 , выше которой квантовые ответы практически совпадают с классическими. Какова эта энергия при прохождении электрона сквозь наноскопический слой металла: $a = 10$ нм и $U_0 = 10$ эВ?

13. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ -потенциала (см. задачу 4). Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы; нарисуйте графики.

2-е ЗАДАНИЕ

УПРАЖНЕНИЯ

1. Как выглядят в импульсном представлении операторы координаты и импульса?
2. Воспользовавшись операторами понижения и повышения, $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$, найти средние значения операторов $\hat{x}^2$, $\hat{x}^4$ и $\hat{x}^{2k+1}$, а также $\hat{p}^2$, $\hat{p}^4$ и $\hat{p}^{2k+1}$ в n -м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора. Обсудить величину $\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle$ в связи с соотношением неопределенностей. Вычислите $\langle \hat{x} \hat{p} \rangle$ и объясните полученный ответ.
3. Найти явный вид операторов понижения и повышения, $\hat{a}(t)$ и $\hat{a}^+(t)$, для линейного гармонического осциллятора в представлении Гейзенберга.
4. Доказать эрмитовость оператора орбитального момента.
- 5^C Раскройте следующие коммутаторы:

$$\begin{aligned} & [\hat{l}_i, x_j], \quad [\hat{l}_i, \hat{p}_j], \quad [\hat{l}_i, \hat{l}_j], \quad [\hat{l}_i, \hat{\mathbf{p}}^2], \quad [\hat{l}_i, (\mathbf{r} \hat{\mathbf{p}})], \\ & [\hat{l}_i, U(r)], \quad [\hat{l}_z, U(\rho)] \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}), \quad [\hat{l}_i, \mathbf{l}^2]. \end{aligned}$$

- 6^C Воспользовавшись явным видом матриц Паули, доказать справедливость следующих соотношений:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i \epsilon_{klm} \sigma_m,$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{A})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \mathbf{B}) + i(\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{A} \times \mathbf{B}]),$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – произвольные векторы.

- 7^C Найти явный вид оператора $e^{i\alpha(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})}$.
8. Покажите, что два состояния, изображаемые на сфере Блоха противоположными точками, ортогональны друг другу.
9. Построить матрицы операторов углового момента $\hat{j}_x$, $\hat{j}_y$, $\hat{j}_z$, а также $\hat{\mathbf{j}}^2$, $\hat{j}_+$ и $\hat{j}_-$ для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$. Как выглядят собственные векторы операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и $\hat{j}_z$?

10. Найти собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\hat{j}_n = (\hat{\mathbf{j}}\mathbf{n})$ для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$.
11. Эрмитовый оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от параметра λ . Соответственно собственные значения, $f_n(\lambda)$, и собственные векторы, $|n(\lambda)\rangle$, этого оператора также зависят от λ . Доказать следующее соотношение:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle n | \frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial \lambda} | n \rangle.$$

12. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц с массами m_1 и m_2 , $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$, зависит только от расстояния между частицами. Запишите стационарное уравнение Шредингера, определяющее волновую функцию состояния этих частиц с определенной энергией E . Покажите, что для решения этого уравнения удобно воспользоваться следующими переменными:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Какой вид принимает при этом волновая функция $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$?

- 13.^C Релятивистские поправки к энергии стационарного состояния $|nlm\rangle$ атома водорода определяются средними значениями операторов $\hat{\mathbf{p}}^4$ и $1/r^3$. Найти эти средние значения, а также средние значения операторов $1/r$ и $1/r^2$ в состоянии $|nlm\rangle$.

ЗАДАЧИ

- 1.^C Как выглядит стационарное уравнение Шредингера для задачи 4 из 1-го задания в импульсном представлении? Найти решение этого уравнения, описывающее связанное состояние частицы. Преобразуйте найденную волновую функцию частицы в импульсном представлении в волновую функцию в координатном представлении и удостоверьтесь в правильности ответа.
- 2.^C Частица массы m движется в потенциале трехмерного изотропного осциллятора:

$$U(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Найти энергии уровней, кратности их вырождения, а также волновые функции стационарных состояний, разделяя переменные: (а) в декартовых координатах, (б) в сферических координатах. Обсудить связь задачи с моделью ядерных оболочек и получить первые магические числа: 2, 8, 20.

Сравните последовательность уровней 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d ... трехмерного изотропного осциллятора и атома водорода. Определите четности стационарных состояний. Может ли осциллятор, находящийся в состоянии с определенной энергией, обладать постоянным (ненулевым) электрическим дипольным моментом?

- 3^C Исходя из свойств оператора углового момента $\hat{\mathbf{j}}$ и векторного оператора $\hat{\mathbf{A}}$ при преобразованиях поворота, получить коммутационные соотношения

$$[\hat{j}_i, \hat{A}_k] = ie_{ikl}\hat{A}_l.$$

Рассмотреть повороты: (а) изменяется физическая система, (б) поворачивается система координат, а физическая система остается неизменной.

- 4^C Найти собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\hat{\sigma}_{\mathbf{n}} = (\hat{\sigma}\mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ – единичный вектор с составляющими:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Обсудите случаи, когда вектор $\mathbf{n}$ направлен вдоль осей x , y и z .

Пусть электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z , равной $1/2$. Найти вероятность того, что проекция спина этого электрона на направление $\mathbf{n}$ равна $1/2$ (или $-1/2$).

- 5^C Отрицательно заряженный мюон находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда "включается" магнитное поле $\mathbf{H}$, направленное по оси x , спиновое состояние мюона описывается функцией $|\chi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Какой функцией $|\chi(t)\rangle$ описывается спиновое состояние мюона во все последующие моменты времени в представлении Шредингера? Как выглядит оператор спина мюона $\hat{\mathbf{s}}(t)$ в представлении Гейзенберга? Найти вектор поляризации мюона $\mathbf{P}(t) = 2\langle\chi|\hat{\mathbf{s}}|\chi\rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гейзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\mathbf{P}(t)$? Меняется ли во времени длина $|\mathbf{P}(t)|$ вектора поляризации?

6. Найти уровни энергии частицы с орбитальным моментом $l = 0$ в трехмерной потенциальной яме:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

- 7^C Частица массы m движется в трехмерной потенциальной яме с "плоским" дном и бесконечно высокими стенками:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Найти уровни энергии и волновые функции стационарных состояний. Сравнить последовательность уровней 1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d... в этой задаче с тем, что получалось для трехмерного изотропного осциллятора и атома водорода.

- 8*. Частица массы m движется в мелкой двумерной потенциальной яме с "плоским" дном:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Покажите, что при сколь угодно малом U_0 существует связанное стационарное состояние частицы в этом потенциале. Найти энергию этого состояния.

9. Как выглядит стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении? Как выглядит решение этого уравнения, отвечающее минимальной энергии (волновая функция основного состояния атома водорода в импульсном представлении)? Найти среднее значение операторов r^2 , r^{-1} и $\hat{\mathbf{p}}^2$ для основного состояния атома водорода.
- 10^C Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Может ли он обладать постоянным (ненулевым) электрическим дипольным моментом? Если "да", то каково максимальное значение дипольного момента атома $\mathbf{d} = \langle \psi | e \mathbf{r} | \psi \rangle$? Как выглядит волновая функция $\psi(\mathbf{r})$, описывающая состояние с максимальным электрическим дипольным моментом?
- 11^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и нормированные волновые

функции связанных состояний для случаев:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad U(x) &= m\omega^2 x^2/2, \\ \text{(б)} \quad U(x) &= \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ m\omega^2 x^2/2, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае (а) (одномерный гармонический осциллятор) приведите волновые функции в квазиклассическом приближении к такому виду, чтобы было ясно, что они обладают нужной четностью. Для первых трех состояний постройте графики волновых функций, найденных в квазиклассическом приближении, и сравните их с графиками точных волновых функций.

12. Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и нормированные волновые функции связанных состояний. Обсудите связь этой задачи с квантованием энергии движения нейтрона в гравитационном поле Земли вблизи поверхности, отражающей нейтроны (многие вещества отталкивают нейтроны с энергиями менее 100 нэВ; такие нейтроны называют ультрахолодными). Найдите энергии первых трех уровней ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле Земли.

13. В квазиклассическом приближении вычислите коэффициент прохождения для прямоугольного барьера из задачи 12 **первого** задания. Сравните полученный результат с точным ответом. Укажите, при выполнении какого условия и с какой точностью квазиклассический результат соответствует точному.
- 14^C Частица массы m с энергией E "заперта" в области $r < r_0$, где $U(r) = -U_0$, высоким потенциальным барьером:

$$U(r) = 2Ze^2/r, \quad r > r_0; \quad E \ll 2Ze^2/r_0.$$

Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите коэффициент прохождения сквозь барьер. Обсудите связь этой задачи с элементарной теорией α -распада и получите закон Гейгера–Неттола.

15. Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$; E_n – энергии стационарных состояний. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите изменения δE_n энергий стационарных состояний при малом изменении потенциала: $U(x) \rightarrow U(x) + \delta U(x)$.

Задачи и упражнения со значком C необходимо рассмотреть на семинаре.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1 и ЗАДАНИЕ 1

(срок проведения и сдачи 15–20 марта)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2 и ЗАДАНИЕ 2

(срок проведения и сдачи 10–15 мая)

Учебное издание

**СБОРНИК
программ и заданий**

**Физтех-школа радиотехники и компьютерных исследований
(ФРКТ)**

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 2,25. Тираж 110 экз.
Заказ № 20.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru