Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ). – Москва : МФТИ, 2021. – 32 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Функциональный анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ЛФИ,ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 15 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 45

Самостоятельная работа:
теор. курс — 60 часов

Программу и задание составил
к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Теорема Хана—Банаха и теорема об отделимости в линейном нормированном пространстве.
2. Сопряжённое пространство. Теорема Рисса—Фреше о представлении сопряжённого гильбертова пространства.
3. Слабая топология в нормированном пространстве и слабая* топология в сопряжённом пространстве. Теорема о представлении слабо* непрерывного линейного функционала.
4. Теорема Мазура о слабом замыкании выпуклого множества нормированного пространства.
5. Теорема Банаха—Алаоглу. Рефлексивные банаховы пространства. Теорема о слабой компактности замкнутого шара в рефлексивном пространстве.
6. Оператор, сопряжённый к линейному ограниченному оператору. Равенство норм линейного ограниченного оператора и его сопряжённого.
7. Связь ядра линейного ограниченного оператора и множества значений его сопряжённого. Связь множества значений линейного ограниченного оператора и ядра его сопряжённого.
8. Банаховы алгебры. Банахова алгебра линейных непрерывных операторов в нормированном пространстве.
9. Спектр и резольвента элемента банаховой алгебры. Теорема о спектральном радиусе. Теорема Гельфанда—Мазура.
10. Теоремы Фредгольма и теорема о спектре для компактного линейного оператора в банаховом пространстве.
11. Эрмитово—самосопряжённые линейные непрерывные операторы в гильбертовом пространстве, свойства их спектра. Теорема Гильберта—Шмидта.
12. Идеалы и гомоморфизмы в банаховой алгебре. Множество максимальных идеалов и спектр элемента банаховой алгебры. Преобразование Гельфанда.
13. Инволюция и B^*–алгебры, теорема Гельфанда—Наймарка. Эрмитовы (самосопряжённые) элементы B^*–алгебры и их спектральные свойства
14. Пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве как B^*–алгебра. Ограниченные нормальные, самосопряжённые, унитарные операторы. Ортогональные проекторы в гильбертовом пространстве. Разложения единицы.
15. Спектральная теорема для ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве. Собственные значения ограниченного нормального оператора.

Литература

Основная

1. *Рудин У.* Функциональный анализ. — Москва : Мир, 1975.
2. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — Москва : Наука, 1981.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — Москва : Наука, 1993.
4. *Константинов Р. В.* Лекции по функциональному анализу: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2009.
5. *Треногин В. А., Писаревский Б;. М., Соболева Т. С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. — Москва : Наука, 1984.

Дополнительная

6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — Москва : Издательство иностранной литературы, 1962.
7. *Хелемский А. Я.* Лекции по функциональному анализу. — Москва : МЦНМО, 2004.
8. *Архангельский А.В., Пономарёв В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. — Москва : Наука, 1974.
9. *Кириллов А.А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. — Москва : Наука, 1988.
10. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. — Москва : Мир, 1970.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Власов В. В., Коновалов С. П., Курочкин С. В., Задачи по функциональному анализу. — Москва : МФТИ, 2000.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Сопряжённое пространство. Теоремы Хана—Банаха и Рисса—Фреше

§ 9: 1; 3; 4; 5; 7; 9; 11.

II. Слабая и слабая* топология

§ 10: 3; 4; 6; 7; 14.

1.1. Доказать, что конечномерное линейное нормированное пространство рефлексивно.

1.2. Доказать, что в бесконечномерном линейном нормированном пространстве X слабое замыкание сферы $S_1(0) = \{ \, x \in X \, : \, \|x\| = 1 \, \}$ равно шару $B_1(0) = \{ \, x \in X \, : \, \|x\| \leq 1 \, \}$.

1.3. Доказать, что если в линейном нормированном пространстве X существует последовательность $x_n \in S_1(0)$, слабо сходящаяся к нулю, то слабое секвенциальное замыкание сферы $S_1(0)$ равно шару $B_1(0)$.

1.4. Пусть X — бесконечномерное линейное нормированное пространство. Доказать, что слабая топология в X и слабая* топология в X^* неметризуемы.

1.5. Исследовать последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$ вида

$$x_n(k) = \cos(k) \quad \text{для} \quad k \le n; \qquad x_n(k) = \sin(k) \quad \text{для} \quad k > n,$$

на слабую сходимость в пространстве ℓ_∞. Рассматривая ℓ_∞ как сопряжённое к пространству ℓ_1, исследовать в нём слабую* сходимость последовательности x_n.

1.6. Привести пример функционала $f \in \ell_\infty^*$, не достигающего своей нормы.

1.7. Привести пример несепарабельного банахова пространства X, такого, что замкнутый единичный шар в его сопряжённом пространстве X^* не является слабо* секвенциально компактным.

1.8. Доказать, что в рефлексивном банаховом пространстве X замкнутый единичный шар $B_1(0)$ является слабо секвенциально компактным.

1.9. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $M \subset X$ его замкнутое выпуклое подмножество. Доказать, что для любого $x \in X$ существует $y \in M$, такой, что $\|x - y\| = \rho(x, M)$.

1.10. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, Y — линейное нормированное пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Доказать, что множество $A(B_1(0))$ сильно замкнуто в Y.

III. Сопряжённые линейные ограниченные операторы

§ 11: 1; 3; 10; 12.

1.11. Доказать, что оператор $A\colon \mathbb{L}_2(0, +\infty) \to c$ вида

$$(Ax)(k) = \int\limits_0^k \frac{x(t)}{1+t}\, dt, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2[0, +\infty)$$

является ограниченным, и найти его сопряжённый. Исследовать множество $A(B_1(0))$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве c.

1.12. Доказать, что оператор $A\colon \ell_1 \to \mathbb{L}_3(0,+\infty)$ вида

$$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k}+\sqrt{t}}, \quad \text{п. в. } t>0, \quad \forall\, x \in \ell_1$$

является ограниченным, и найти его сопряжённый. Исследовать множество $A(B_1(0))$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве $\mathbb{L}_3(0,+\infty)$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Банаховы алгебры

2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{A}$.

а) Доказать, что если x и xy обратимы в $\mathcal{A}$, то обратим и y;
б) Доказать, что если xy и yx обратимы в $\mathcal{A}$, то обратимы x и y;
в) Показать на примере, что может быть $xy = e \neq yx$ (например, рассмотрите операторы правого и левого сдвига в ℓ_1);
г) Если $\dim \mathcal{A} < +\infty$, то $yx = e$ равносильно $xy = e$;
д) Доказать, что элемент $e - yx$ обратим, если обратим элемент $e - xy$ (если $z = (e-xy)^{-1}$, то рассмотрите $e + yzx$);
е) Пусть комплексное число $\lambda \in \sigma(xy)$ и $\lambda \neq 0$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(yx)$. Показать на примере, что $\sigma(xy)$ может содержать ноль, тогда как $\sigma(yx)$ нуля не содержит;
ё) Доказать, что если x обратим, то $\sigma(xy) = \sigma(yx)$;
ж) Доказать, что xy и yx всегда имеют один и тот же спектральный радиус (воспользуйтесь $(xy)^n = x(yx)^{n-1}y$);
з) Доказать, что если $P(x) = 0$ для комплексного многочлена P, такого, что $P(0) \neq 0$, то x обратим.

2.2. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, множество

$$G(\mathcal{A}) = \left\{\, x \in \mathcal{A} \ : \ \exists\, x^{-1} \in \mathcal{A} \,\right\}.$$

а) Доказать, что множество $G(\mathcal{A})$ открыто в $\mathcal{A}$;
б) Доказать, что для любой граничной точки x множества $G(A)$ и для любой последовательности $x_n \in G(\mathcal{A})$, сходящейся к x, выполнено

$$\left\| x_n^{-1} \right\| \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, такая, что

$$\exists\, M > 0 \quad \forall\, x, y \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \|x\|\,\|y\| \leq M\|xy\|.$$

Доказать, что $\mathcal{A}$ изометрически изоморфна $\mathbb{C}$.

2.4. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, $x \in \mathcal{A}$. Доказать, что для любого открытого множества $V \subset \mathbb{C}$ вида $\sigma(x) \subset V$ существует число $\delta > 0$, такое, что для любого $y \in \mathcal{A}$ вида $\|y - x\| < \delta$ выполнено $\sigma(y) \subset V$.

II. Спектр и резольвента

§ 7: 1; 7; 11; 13; 15.

§ 11: 9.

2.5. Найти спектр и резольвенту оператора Вольтерра $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ вида

$$(Af)(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt, \quad x \in [0,1], \quad f \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

2.6. Пусть число $a \neq 0$. Найти спектр и резольвенту оператора трансляции $T_a\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида $(T_a f)(x) = f(x+a)$ для всех $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ и п. в. $x \in \mathbb{R}$.

III. Эрмитово–самосопряжённые ограниченные операторы

§ 11: 5; 7; 11; 13.

§ 12: 18.

2.7. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Пусть оператор A^*A компактен. Доказать, что оператор A также является компактным.

2.8. Доказать, что оператор инверсии $J\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида

$$(Jf)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}),$$

является эрмитово–самосопряжённым, и найти его спектр и резольвенту.

2.9. Пусть $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ — оператор Вольтерра (см. задачу 12.18). Найти спектр и резольвенту эрмитово–самосопряжённых операторов A^*A и AA^*.

IV. Идеалы и гомоморфизмы. Преобразование Гельфанда

2.10. Доказать, что линейное пространство $C^1[0,1]$ с нормой

$$\|f\|_{c^1} = \|f\|_c + \|f'\|_c$$

является коммутативной банаховой алгеброй относительно поточечного умножения. Найти множество всех гомоморфизмов этой банаховой алгебры. Для любой функции $f \in C^1[0,1]$ найти её преобразование Гельфанда $\hat{f}$.

2.11. В линейном пространстве

$$\ell_1 = \left\{ x\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)| < +\infty \right\} \quad \text{с нормой} \quad \|x\|_1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|$$

рассматривается произведение

$$(xy)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad x, y \in \ell_1.$$

Доказать, что ℓ_1 с таким произведением является коммутативной банаховой алгеброй. Найти множество всех гомоморфизмов этой банаховой алгебры. Для любого элемента $x \in \ell_1$ найти его преобразование Гельфанда $\hat{x}$.

2.12. Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, элементы $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{A}$ таковы, что $xy = yx$. Доказать, что спектральный радиус элемента $x + y$ не превосходит суммы спектральных радиусов x и y, а спектральный радиус элемента xy не превосходит произведения спектральных радиусов x и y.

V. Спектральная теорема для ограниченных операторов

2.13. Найти спектральное разложение для эрмитово–самосопряжённого оператора инверсии $J\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ (см. задачу 2.8).

2.14. Пусть $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ — оператор Вольтерра (см. задачу 12.18 или задачу 2.5). Найти спектральные разложения для эрмитово–самосопряжённых операторов A^*A и AA^*.

2.15. Пусть функция $h \in \mathbb{L}_\infty[0,1]$, линейный оператор $A\colon \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ имеет вид

$$(Af)(x) = h(x)f(x) \quad \text{п. в. } x \in [0,1], \quad \forall\, f \in \mathbb{L}_2[0,1].$$

Доказать, что A — нормальный оператор, найти его норму, спектр (указав все компоненты спектра) и спектральное разложение.

2.16. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Пусть нормальный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет счётный спектр

$$\sigma(A) = \{\ \lambda_k\ \}_{k=1}^{\infty}$$

и спектральное разложение E. Доказать, что вектор $y \in \operatorname{Im} A$ если и только если

$$y \in (\operatorname{Ker} A)^{\perp} \quad \text{и} \quad \sum_{k\colon \lambda_k \neq 0} \frac{\left\|E(\lambda_k)y\right\|^2}{|\lambda_k|^2} < +\infty.$$

2.17. Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство. Доказать, что остаточный спектр нормального оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ пуст.

2.18. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельно гильбертово пространство. Доказать, что точечный спектр нормального оператора $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ не более чем счётен.

2.19. Пусть нормальный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ таков, что $|A| = |A - I|$, где I - тождественный оператор в $\mathcal{H}$. Для любого $x \in \mathcal{H}$ найти $(A + A^*)(x)$.

2.20. Найти спектральное разложение для унитарного оператора трансляции $T_a\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ (см. задачу 2.6). Найти спектр оператора $|T+T^*|$ и классифицировать его компоненты.

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент Р. В. Константинов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школы: **ЛФИ, ФПМИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 5 зач. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил
д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Смешанная задача для уравнения теплопроводности на отрезке. Метод Фурье**. Постановка смешанной задачи на конечном отрезке с граничными условиями Дирихле, единственность решения. Метод разделения переменных для задачи с однородными граничными условиями. Построение формального решения для случаев однородного и неоднородного уравнений. Обоснование метода Фурье. Условия согласования начального и граничных условий. Решение смешанной задачи при неоднородных граничных условиях.

2. **Смешанная задача для уравнения колебаний струны на отрезке**. Постановка смешанной задачи для струны с закреплёнными концами. Единственность её решения (метод интеграла энергии). Построение формального решения методом Фурье (случаи однородного и неоднородного уравнений). Обоснование метода, условия согласования. Существование классического решения.

3. **Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны**. Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Разделение переменных. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя, неограниченные в нуле. Представление собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закреплёнными краями через функции Бесселя. Ортогональность собственных функций и функций Бесселя. Полнота системы собственных функций (без доказательства).

4. **Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$**. Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области.
   Пространство основных функций $D(\mathbb{R}^n)$. Понятие сходимости последовательности функций в $D(\mathbb{R}^n)$. Пространство обобщённых функций $D'(\mathbb{R}^n)$, сходимость последовательности элементов из $D'(\mathbb{R}^n)$. Локально интегрируемые функции и регулярные обобщённые функции. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.
   Гармонические функции в $\mathbb{R}^3$ и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума.
   Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона, единственность классического решения. Функция Грина задачи Дирихле; решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Симметричность функции Грина (без доказательства). Функция Грина для шара. Формула Пуас-

сона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Преобразование Кельвина. Регулярность поведения гармонической функции на бесконечности.
Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в $\mathbb{R}^3$.

5. **Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Сферические функции**. Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические функции как собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере S_1. Шаровые функции (гармонические многочлены). Собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами. Дифференциальное уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Выражение сферических функций в сферической системе координат.
Ортогональность и полнота (без доказательства) сферических функций в $L_2(S_1)$. Решение задач Дирихле и Неймана в шаре и шаровом слое в форме рядов по шаровым функциям.

6. **Интегральные уравнения**. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Непрерывность интегральных операторов с непрерывными и полярными ядрами в пространстве $C(\overline{G})$. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции ядра интегрального оператора.
Интегральные уравнения с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.
Интегральные уравнения с непрерывными и полярными ядрами. Уравнение с малым по норме оператором. Ряд Неймана.
Сведение интегральных уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае.
Уравнения с эрмитовыми ядрами. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема о существовании характеристических чисел. Теорема Гильберта–Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.

7. **Задача Штурма–Лиувилля**. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля; её существование, симметричность, непрерывность. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Свойства спектра и собственных функций. Теорема Стеклова.

8. **Потенциалы**. Объемный потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя, его непрерывность в $\mathbb{R}^3$. Потенциал двойного слоя. Формула Гаусса, скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя, формула для скачка нормальной производной.

   Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2008.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — 7-е изд. — Москва : Изд-во МГУ, Наука, 2004.
4. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 3-е изд. — Москва : Физматгиз, 1961.
5. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : МЦНМО, 2001.
6. *Пальцев Б. В.* Сферические функции: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2000.
7. *Зубов В. И.* Функции Бесселя: учеб.-метод. пособие. — Москва : МФТИ, 2007.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Владимиров В.С., Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье

1. 20.50(1,б); <u>20.14(4)</u>; <u>20.56(5)</u>; <u>20.16(5)</u>; 20.3(3).

2. Решить смешанные задачи:

<u>а</u>) $u_{tt} = u_{xx} - 2\cos 3t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi \cos 3t, \quad t \geq 0,$
$u|_{t=0} = x^2, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi;$

б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
$u|_{x=0} = te^{-9t}$, $u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi$, $t \geq 0,$
$u|_{t=0} = \pi x - \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

в) $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u|_{t=0} = x + \cos\frac{x}{2}, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad x \in [0, \pi],$
$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad t \geq 0;$

г) $u_t = u_{xx} - u + \frac{1}{2\pi}t(x^2 - 2), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
$u|_{t=0} = \cos x, \quad x \in [0, \pi],$
$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad t \geq 0.$

II. Смешанная задача в прямоугольнике. Метод Фурье

1. 20.59; <u>20.22</u>; 20.21.

III. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны

1. <u>20.34(2)</u>; 20.37(2); <u>20.62(2)</u>; <u>20.60(2)</u>; 20.38*.

<u>2</u>. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, и пусть

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad (x, y) \in D, \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0,$$

$$u_k \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \quad u_k \not\equiv 0, \quad k = 1, 2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Доказать, что

$$\iint_D u_1(x, y) u_2(x, y)\, dx\, dy = 0.$$

3. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. С помощью результата предыдущей задачи доказать, что

$$\int_0^1 r J_2(\mu_m r) J_2(\mu_n r)\, dr = 0, \quad \text{если} \quad m \neq n.$$

4. Найти собственные функции $u(x, y)$ и собственные значения λ задачи $-\Delta u = \lambda u, \ (x, y) \in D = \big\{(x, y) \colon y > 0,\ x^2 + y^2 < R^2\big\}, \quad u|_{\partial D} = 0.$

5. Решить смешанные задачи ($f(r)$ и $g(r)$ — достаточно гладкие функции):

а) $u_{tt} = 4\Delta u + f(r)\cos^2\varphi$, $(t > 0,\ r < 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{r=3} = 0$, $(t \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $(r \le 3,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$, $f(3) = 0$;

б) $u_t = \frac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t}f(r)\sin 3\varphi$, $(t > 0,\ r < 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{r=4} = 0$, $(t \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{t=0} = g(r)\cdot\sin 2\varphi$, $(r \le 4,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$f(4) = 0$, $g(4) = 0$;

в) $u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi$, $(t > 0,\ r < 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{r=2} = 0$, $(t \ge 0,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$u|_{t=0} = g(r)\cdot\cos(2\varphi + \pi/4)$, $(r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi)$,
$g(2) = 0$, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(x)$.

6. Решить смешанную задачу для круга:
$u_t = \Delta u, \quad t > 0, \quad r < 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
$u|_{t=0} = (r-2)^2, \quad r \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi;$
$u|_{r=2} = 16t\sin 5\varphi, \quad t \ge 0, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$

IV. Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$. Функция Грина задачи Дирихле

1. Доказать, что функция $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

2. 17.1(<u>1</u>,2); 17.2(1,2); 17.7; 17.4(1,<u>2</u>,7); <u>17.8(2)</u>.

3. Найти ограниченные в $D = \{x = (x_1, x_2, x_3)\colon x_1 \in \mathbb{R}^1,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$ решения задач:

<u>а</u>) $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = \cos 4x_1 \cdot \sin 3x_2$;
б) $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u_{x_2}|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^{-1/2}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Интегральные уравнения

1. <u>5.20</u>; 5.22; 5.23(<u>4</u>,8); 5.25(2).

2. Найти характеристические числа, собственные функции ядра интегрального оператора и решить при всех λ уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + y\cos x)u(y)\,dy + f(x),$$

$$-\pi/2 \le x \le \pi/2, \quad f(x) \in C\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Найти условия его разрешимости при характеристических значениях λ, а также его резольвенту $R(x, y; \lambda)$. Проиллюстрировать справедливость теорем Фредгольма на примере этой задачи.

3. Сколько решений имеет интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{30}{115}\int_0^1 \left(e^{\frac{x^2+y^2}{2}} - \cos(x+2y)\right) u(y)\, dy + \frac{95}{1+x^2}, \quad 0 \le x \le 1.$$

4. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение:

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (|y|\sin|x| + |x|y)u(y)dy + a|x| + bx, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}].$$

5. 5.34; <u>5.41(1,4)</u>; 5.43(2); 5.44*.

II. Задача Штурма–Лиувилля

1. <u>15.1(4,5)</u>; 15.4(1,2); 15.21(<u>2</u>,4); 15.15(1,7); 15.17.

2. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу

$$x^2y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x), \quad 1/2 < x < 1,$$

$$2y\,(1/2) - y'\,(1/2) = 0, \quad y(1) = 0.$$

III. Потенциалы

1. <u>18.6(5)</u>; 18.7(1); 18.16; <u>18.19(1)</u>; <u>18.22(1)</u>; 18.33(1).

2. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в $\mathbb{R}^3$.

<u>Указание.</u> Решение рекомендуется искать в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Составитель задания — д. ф.-м. н., профессор В. И. Зубов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.;

лекции – 30 часов Экзамен – нет
практические (семинарские)
занятия – нет
лабораторные занятия – 30 часов Диф. зачёт – 6 семестр

Самостоятельная работа – 75 часов
ВСЕГО ЧАСОВ – 60

Программу и задание составил
д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН И. Б. Петров

Программа принята на заседании кафедры
вычислительной физики
24 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН И. Б. Петров

1. Жесткие задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (неявные методы Рунге–Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад). *Методы Гира в представлении Нордсика. *Исследование схем на A-устойчивость, L–устойчивость .
2. Численные методы решения краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, прогонка). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). *Метод конечных элементов. Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Понятие жесткой краевой задачи.
3. Численные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Исследование разностных схем на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости, принцип замороженных коэффициентов. *Элементы теории Самарского об исследовании устойчивости двухслойных схем на основе энергетических неравенств.
4. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. *Теорема Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем.
5. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Разностные схемы для характеристической формы записи системы. Нелинейное уравнение Хопфа. *Понятие о сильных и слабых разрывах, скорость движения сильного разрыва.
6. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. *Квазилинейное уравнение теплопроводности и его автомодельное решение.

   Численное решение многомерных уравнений теплопроводности. Методы расщепления.
7. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема «крест» для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. *Оценка

количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

8. *Введение в методы решения уравнений газовой динамики.

Литература

(<u>*Основная*</u>)

1. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с.; 3-е изд. Москва : Физматлит, 2008. — 288 с. (Физтеховский учебник).
2. *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику / под редакцией А. И. Лобанова. – 2-е изд. – Москва : Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с., Долгопрудный: Интеллект, 2008. 504 с. (Физтеховский учебник).
3. *Лобанов А.И.*, *Петров И.Б.* Лекции по вычислительной математике. – Москва : Интернет–Университет информационных технологий, 2006. — 522 с.
4. *Аристова Е.Н., Лобанов А.И.* Практические занятия по вычислительной математике в МФТИ. Часть II. – Москва : МФТИ, 2015. – 310 с.

(<u>*Дополнительная*</u>)

1. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. – Санкт-Петербург : БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
2. Лабораторный практикум «Основы вычислительной математики». 2-е изд, исправленное и дополненное / *В. Д. Иванов, В. И. Косарев, А. И. Лобанов, И. Б. Петров, В. Б. Пирогов, В. С. Рябенький, Т. К. Старожилова, А. Г. Тормасов, С. В. Утюжников, А. С. Холодов*. – Москва : Изд-во МЗ-пресс, 2003. – 196 с.
3. *Хайрер Э.*, *Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.
4. *Самарский А А., Гулин А В*. Численные методы. – Москва : Наука, 1989.

Аудиторная контрольная работа — вторая декада марта

Задание 1 (срок сдачи — вторая неделя марта)

Задачи из пособия [4].
IX.7.7, IX.7.11*, IX.7.15 7), IX.7.18, IX.7.19, IX.7.20,
X.7.1, X.7.2, X.7.3, X.7.4, X.7.5, X.7.10, X.7.12, X.7.13, X.7.19, X.8.12,
XI.8.1, XI.8.2 в, XI.8.3, XI.8.4 в, д, XI.8.5, XI.8.10 б, XI.9.1, XI.9.3.

*Одна задача из раздела X.9 или XI.9 по согласованию с преподавателем

*****Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:
1. Жесткая задача Коши для систем ОДУ.
2. Краевая задача для систем ОДУ.

Потоковая контрольная работа — первая декада мая

Задание 2 (срок сдачи 20–31 апреля)

Задачи из пособия [4].
XII.7.1, XII.7.2, XII.7.3, XII.7.4, XII.7.6, XII.7.8, XII.7.15, XII.7.19, XII.7.27,
XIII.7.3, XIII.8.2, XIII.9.1, XIII.9.2, XIII.9.7, XIII.9.8, XIII.9.9, XIII.9.17,
XIV.7.3, XIV.8.5, XIV.9.1, XIV.9.2 в,г,ж, XIV.9.6, XIV.9.8 (кабаре),
XIV.9.11 а, XIV.9.14 б,
XV.6.3, XV.7.1, XV.7.4

***** Лабораторные работы по курсу «Вычислительная математика»:
1. Уравнение переноса.
2. Уравнение теплопроводности.
4.* Курсовая работа – самостоятельная реализация разностной схемы для нелинейного уравнения в частных производных или системы нелинейных уравнений в частных производных (по согласованию с преподавателем).

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Квантовая механика**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФПМИ**

кафедра: **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 2 зачет. ед.
лекции – 30 часов Дифф. зачет – 6 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60 Самостоятельная работа – 30 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф.
А. И. Тернов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой Ю. М. Белоусов
д.ф.-м.н., профессор

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

I. Введение

Экспериментальные предпосылки возникновения квантовой теории. Гипотезы Планка и Эйнштейна. Гипотеза де Бройля. Волновая функция и ее физическая интерпретация. Волновой пакет. Принцип линейной суперпозиции состояний. Уравнение Шредингера.

II. Математический аппарат квантовой теории

Состояния физической системы как векторы гильбертова пространства. Динамические переменные – эрмитовы операторы в пространстве состояний. Проблема собственных значений эрмитовых операторов. Понятие о дискретном и непрерывном спектре. Вероятностная интерпретация коэффициентов разложения по собственным векторам. Формула для вычисления среднего значения физической величины.

Соотношение неопределенностей для динамических переменных, представляемых некоммутирующими операторами. Одновременная измеримость физических величин.

III. Временная эволюция физической системы

Представление Шредингера и представление Гайзенберга. Гайзенберговские уравнения движения. Квантовые скобки Пуассона. Фундаментальные коммутационные соотношения. Интегралы движения в квантовой теории. Теоремы Эренфеста.

IV. Уравнение Шредингера и его свойства

Элементы теории представлений. Координатное и импульсное представления. Временное уравнение Шредингера. Уравнение непрерывности. Плотность вероятности и плотность тока вероятности. Нормировка волновой функции в случае дискретного и непрерывного спектра. Стационарное уравнение Шредингера.

V. Одномерное движение

Свободная частица. Потенциальная яма. Дискретный спектр и связанные состояния в одномерном и двумерном случаях.

Непрерывный спектр. Коэффициенты отражения и прохождения. Туннельный эффект.

Линейный гармонический осциллятор в координатном и в импульсном представлении. Повышающие и понижающие операторы. Когерентные состояния осциллятора.

Движение в одномерном периодическом поле. Теорема Флоке. Квазиимпульс. Теорема Блоха. Зоны энергии.

VI. Движение в поле центрально-симметричного потенциала

Угловой момент в квантовой механике. Операторы момента количества движения и квадрата момента. Собственные значения и собственные функции. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша–Гордана.

Радиальное уравнение Шредингера. Пространственно-изотропный осциллятор. Водородоподобный атом. Энергетический спектр, волновые функции. Вырождение.

VII. Спин электрона

Гипотеза Уленбека и Гаудсмита. Оператор спина. Матрицы Паули и их свойства. Спиновая волновая функция. Уравнение Паули для электрона во внешнем поле. Градиентная инвариантность. Методы измерения спина.

VIII. Симметрии в квантовой механике и законы сохранения

Инвариантность квантово-механической системы относительно групп преобразований. Симметрии физической системы и законы сохранения. Группа пространственных трансляций и закон сохранения импульса. Группа временных трансляций и закон сохранения энергии. Группа трехмерных вращений и закон сохранения орбитального момента. Неприводимые представления группы трехмерных вращений. Спин и полный момент. Группа пространственной инверсии и закон сохранения четности. Группа обращения времени.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. – Москва : Наука, 1989.
2. *Мессиа А.* Квантовая механика. – Москва : Наука. Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – Долгопрудный : ИД «Интеллект», 2013.
4. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.

Дополнительная

5. *Блохинцев Д.И.* Основы квантовой механики. – Москва : Наука, 1976.
6. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. – Москва : Наука, 1973.
7. *Шифф Л.* Квантовая механика. – Москва : ИЛ, 1967.
8. *Дирак П.А.* Принципы квантовой механики. – Москва : Наука, 1979.
9. *Елютин П.В., Кривченков В.Д.* Квантовая механика. – Москва : Наука, 1976.
10. *Флюгге З.* Задачи по квантовой механике. Т. I. – Москва : Мир, 1974.
11. *Белоусов Ю.М.* Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2005.
12. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. – Ленинград : Изд. Ленинградского ун-та, 1980.
13. *Садбери А.* Квантовая механика и физика элементарных частиц. – Москва : Мир, 1989.
14. *Боум А.* Квантовая механика: основы и приложения. – Москва : Мир, 1990.
15. *Петрашень М.И., Трифонов Е.А.* Применение теории групп в квантовой механике. – Москва : Наука, 1967.
16. *Аллилуев С.П., Белоусов Ю.М.* Введение в теорию симметрии и ее применения в физике: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2007.
17. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику : учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2005.

ЗАДАНИЕ

Первое задание

1. [c] Найти уровни энергии и собственные функции частиц:

   а) в потенциальной яме вида
$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a\,, \\ 0, & |x| \geqslant a\,; \end{cases}$$

   б) в потенциальной яме вида
$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leqslant 0\,, \\ -U_0, & 0 < x < a\,, \\ 0, & x \geqslant a\,. \end{cases}$$

   Указать условие существования дискретного уровня энергии в такой яме.

2. [c] Найти уровни энергии и собственные функции частицы в потенциальном ящике
$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a\,, \\ \infty, & x \leqslant 0, \quad a \leqslant x\,. \end{cases}$$

   Найти $\langle \widehat{\mathrm{x}} \rangle$ и $\langle \Delta\widehat{\mathrm{x}}^2 \rangle$ для n-го стационарного состояния. Используя формулу $\partial E_n/\partial\lambda = \langle n|\partial\widehat{\mathrm{H}}/\partial\lambda|n\rangle$, вычислить силу, с которой частица действует на стенку потенциального ящика. Найти фазовый объем, приходящийся на одно квантовое состояние.

3. Найти коэффициенты прохождения и отражения:

   а) для прямоугольной ямы;
   б) для прямоугольного потенциального барьера.

4. [c] Найти собственное значение энергии и собственную функцию связанного состояния частицы в поле
$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0\delta(x).$$

   Найти $\langle \widehat{\mathrm{x}} \rangle$, $\langle \widehat{\mathrm{x}}^2 \rangle$ $\langle \widehat{\mathrm{p}} \rangle$, $\langle \widehat{\mathrm{p}}^2 \rangle$, проверить, выполняется ли соотношение неопределенностей.

   Найти вероятность «ионизации» при внезапном изменении параметра ямы от $\varkappa_0$ до $\varkappa_1$. Найти коэффициенты отражения и прохождения частицы в этом поле.

5. [c] Найти уровни энергии и собственные функции связанных состояний частицы в поле:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0 \left\{\delta(x+a) + \delta(x-a)\right\}.$$

Особо рассмотреть случай ($\varkappa_0 a \gg 1$).
Пусть при $t = 0$ волновая функция частицы имеет вид

$$\psi(x,0) \simeq A\mathrm{e}^{-\varkappa_0|x-a|}.$$

Найти вероятность того, что частица в момент t локализована вблизи точки $x = -a$.

6. [c] Найти разрешенные зоны энергии для частицы, движущейся в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2}{m}\varkappa_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na).$$

Рассмотреть предельные случаи:

а) $\varkappa_0 a \gg 1$ (сильная связь).
Особо рассмотреть первую разрешенную зону;
б) $\varkappa_0 a \ll 1$ (слабая связь).

7. Определить волновые функции частицы в однородном поле

$$U(x) = -Fx.$$

8. а) Частица движется в потенциальном поле

$$U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

Определить вероятность нахождения частицы вне классических границ для основного состояния.
б) Найти энергетические уровни частицы, движущейся в потенциальном поле вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

9. ^{c} Проверить эрмитовость основных операторов (координаты, импульса, момента импульса, гамильтониана). Проверить справедливость соотношений (условий полноты):

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1; \qquad \int |\lambda\rangle\langle\lambda| d\lambda = 1.$$

Показать, что $\widehat{\mathrm{A}}^{+}\widehat{\mathrm{A}}$ – эрмитов оператор (при любом $\widehat{\mathrm{A}}$) и что $\langle\widehat{\mathrm{A}}^{+}\widehat{\mathrm{A}}\rangle \geqslant 0$.

10. ^{c} Найти

а) собственные значения и собственные функции оператора инверсии $\widehat{\mathrm{I}}$;

б) собственные значения и собственные функции оператора трансляции $\widehat{\mathrm{T}}_a$.

11. Доказать справедливость соотношения

$$[\widehat{\mathrm{A}}\widehat{\mathrm{B}}, \widehat{\mathrm{C}}] = \widehat{\mathrm{A}}[\widehat{\mathrm{B}}, \widehat{\mathrm{C}}] + [\widehat{\mathrm{A}}, \widehat{\mathrm{C}}]\widehat{\mathrm{B}}.$$

Раскрыть коммутаторы:

$$[\widehat{\mathrm{p}}_i, f(r)]\,, \ \left[\widehat{\mathrm{x}}, \exp(\frac{i}{\hbar} a\widehat{\mathrm{p}}_x)\right], \ \left[\widehat{\mathrm{p}}_i^2, f(r)\right], \quad \text{где } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

$$\left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathrm{x}}_k\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathrm{p}}_k\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathrm{L}}_k\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, f(r)\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathrm{p}}_k\widehat{\mathrm{p}}_l\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathbf{r}}^2\right],$$

$$\left[\widehat{\mathrm{L}}_i, \widehat{\mathbf{p}}^2\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, (\widehat{\mathbf{p}\mathbf{r}})\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_i, (\widehat{\mathbf{p}\mathbf{r}})\widehat{\mathrm{p}}_k\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_z, \widehat{\mathrm{L}}_\pm\right], \ \left[\widehat{\mathrm{L}}_+, \widehat{\mathrm{L}}_-\right].$$

12. ^{c} Доказать справедливость соотношения:

$$\mathrm{e}^{\xi\widehat{\mathrm{A}}}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{-\xi\widehat{\mathrm{A}}} = \widehat{\mathrm{B}} + \xi[\widehat{\mathrm{A}}, \widehat{\mathrm{B}}] + \frac{\xi^2}{2!}\left[\widehat{\mathrm{A}}, [\widehat{\mathrm{A}}, \widehat{\mathrm{B}}]\right] + \cdots$$

Используя данное соотношение, преобразовать выражение $\mathrm{e}^{-i\mathbf{a}\widehat{\mathbf{p}}/\hbar}\widehat{\mathrm{U}}(\mathbf{r})\mathrm{e}^{i\mathbf{a}\widehat{\mathbf{p}}/\hbar}$, где $\mathbf{a} = \mathrm{const}$.

Второе задание

13. ^{c} Пусть z – произвольное комплексное число, состояние $|z\rangle$ получается из основного состояния гармонического осциллятора: $|z\rangle = \exp(z\widehat{a}^{+})|0\rangle$. Доказать, что

$$\frac{\langle z|\widehat{\mathrm{H}}|z\rangle}{\langle z|z\rangle} = \hbar\omega\left(|z|^2 + \frac{1}{2}\right),$$

где $\widehat{\mathrm{H}}$ – гамильтониан гармонического осциллятора с частотой ω.

14. Показать, что в состоянии $|l, m\rangle$ (определена проекция на ось z) выполняются соотношения:

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \langle\widehat{\mathrm{l}}_x\rangle = \langle\widehat{\mathrm{l}}_y\rangle = 0,\\
&\text{б) } \langle\widehat{\mathrm{l}}_x\widehat{\mathrm{l}}_y\rangle = -\langle\widehat{\mathrm{l}}_y\widehat{\mathrm{l}}_x\rangle = im/2,\\
&\text{в) } \langle\widehat{\mathrm{l}}_x^2\rangle = \langle\widehat{\mathrm{l}}_y^2\rangle = \langle\Delta\widehat{\mathrm{l}}_x^2\rangle = \tfrac{1}{2}\left[l(l+1) - m^2\right].
\end{aligned}
$$

15. Найти собственные значения и собственные функции спиновых операторов:

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \widehat{\sigma}_x,\ \ \widehat{\sigma}_y,\ \ \widehat{\sigma}_z;\\
&\text{б) } \widehat{\sigma}_n = (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}_0),
\end{aligned}
$$

где $\mathbf{n}_0$ – единичный вектор с составляющими $\mathbf{n}_0 = \{\sin\theta_0\cos\varphi_0,\ \sin\theta_0\sin\varphi_0,\ \cos\theta_0\}$.

16. Электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z, равной $1/2$. Какова вероятность различных значений, которые может принимать проекция спина на ось $\mathbf{n}_0$ (см. задачу № 15)? Найти явный вид оператора преобразования спинора при повороте системы координат, при котором ось z совмещается с направлением $\mathbf{n}_0$.

17. [c] Доказать соотношения:

а) $\widehat{\sigma}_j\widehat{\sigma}_k = \delta_{jk}\widehat{1} + i\mathrm{e}_{jkl}\widehat{\sigma}_l$,

б) $(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\widehat{\mathbf{A}})(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\widehat{\mathbf{B}}) = (\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}) + i(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}[\widehat{\mathbf{A}}\widehat{\mathbf{B}}])$,
где $\widehat{\mathbf{A}}$ и $\widehat{\mathbf{B}}$ – обычные (не спиновые) векторные операторы.

18. [c] Показать, что в однородном магнитном поле, переменном во времени, волновая функция частицы со спином распадается на произведение координатной и спиновой функций.

19. [c] Найти зависимость от времени спиновой функции покоящегося μ-мезона, если в начальный момент

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и включается магнитное поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленное вдоль оси x. Найти также средние значения $\langle\widehat{\sigma}_x\rangle$, $\langle\widehat{\sigma}_y\rangle$, $\langle\widehat{\sigma}_z\rangle$. Убедиться в том, что магнитный момент μ-мезона вращается. Получить вид спиновых операторов в представлении Гейзенберга. Чему равна вероятность иметь в момент t проекцию на ось z, равную $-1/2$?

20. *Частица со спином $1/2$ находится в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}(t)$ вида
$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \{\mathcal{H}_1 \cos\omega t, \mathcal{H}_1 \sin\omega t, \mathcal{H}_0\}\,,$$
где $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_0$, ω – постоянные величины. При $t = 0$ частица находится в состоянии с проекцией спина на ось z, равной $s_z = 1/2$. Найти вероятность перехода частицы к моменту времени t в состояние, в котором проекция спина на ось z будет равной $s_z = -1/2$.

21. Бесспиновая частица с зарядом e и массой m заключена в ящик большого объема V и находится в постоянном однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Найти ее уровни энергии и кратность их вырождения.

22. Записать уравнение Шредингера для двух частиц с массами m_1 и m_2, взаимодействующих по закону $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ в системе центра масс. Какой вид имеет волновая функция $\psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$?

23. Определить энергетические уровни и волновые функции частицы, находящейся в сферическом «потенциальном ящике»:
$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a\,, \\ \infty, & r \geqslant a\,. \end{cases}$$
Особо рассмотреть случай $l = 0$. *Сравнить полученное при этом расположение уровней энергии со случаем, рассмотренным в задаче № 29.

24. *Определить дискретный спектр энергии частицы с моментом l=0, находящейся в центрально-симметричной потенциальной яме:
$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a\,, \\ 0, & r \geqslant a\,. \end{cases}$$

25. *Предполагая, что квантовая система состоит из одной частицы, движущейся в потенциале $U(\mathbf{r})$, найти условия, при которых такая система будет
а) инвариантна относительно трансляций,
б) инвариантна относительно трехмерных вращений.

26. *Рассмотреть неприводимое представление D(1) (векторное) группы 3-мерных вращений. Найти матрицы генераторов этого представления. Найти явный вид оператора преобразования вектора состояния при повороте системы координат, при котором ось z совмещается с направлением $\mathbf{n}_0$ (см. задачу № 15).

27. *Определить группу симметрии двумерного изотропного осциллятора.

28. [c] Найти среднее значение операторов r^2, $\frac{1}{r}$, $\widehat{\mathbf{p}}^2$ и волновую функцию в импульсном представлении $\phi(\mathbf{p})$ для основного состояния атома водорода.

    Доказать теорему Гельмана–Фейнмана: $\frac{\partial E_n}{\partial\lambda} = \left\langle\frac{\partial\widehat{\mathrm{H}}}{\partial\lambda}\right\rangle_n$ и с ее помощью вычислить средние значения $\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle$ и $\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle$ в произвольном состоянии атома водорода.

    Используя теорему Эренфеста для радиального движения $\frac{d\langle\widehat{\mathrm{p}}_r\rangle}{dt} = \langle\widehat{\mathrm{F}}_r\rangle$, вычислить $\left\langle\frac{1}{r^3}\right\rangle$ для состояний атома водорода с орбитальным квантовым числом $l > 0$.

29. *Найти уровни энергии и волновые функции трехмерного изотропного осциллятора путем разделения переменных в уравнении Шредингера

    а) в декартовой системе координат,

    б) в сферической системе координат.

    Найти кратность вырождения уровней энергии.

30. *Показать, что уравнение Шредингера для движения электрона в поле двух неподвижных кулоновских центров допускает разделение переменных в эллиптической системе координат.

    (Эллиптические координаты определяются следующим образом:

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{R}; \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{R}; \quad 1 \leqslant \xi < \infty; \quad -1 \leqslant \eta \leqslant 1,$$

    а третья координата φ есть угол поворота вокруг оси, проходящей через два кулоновских центра, находящихся на расстоянии R друг от друга.)

31. *Показать, что уравнение Шредингера в задаче об атоме водорода в однородном электрическом поле допускает разделение переменных в параболической системе координат. (Параболические координаты определяются формулами:

$$\xi = r + z; \quad \eta = r - z; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$0 \leqslant \xi < \infty; \quad 0 \leqslant \eta < \infty; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.)$$

1-я контрольная работа – вторая декада марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи 16.03–23.03.2021 года)

2-я контрольная работа – первая декада мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи 12.05–18.05.2021 года)

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Усл. печ. л. 2,0. Тираж 100 экз. Заказ № 28.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru