

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»



СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа фотоники, электроники и
молекулярной физики
(ФЭФМ)

для студентов **3** курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики (ФЭФМ). – Москва : МФТИ, 2021. – 40 с.

Учебное издание

СБОРНИК программ и заданий

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной (ФЭФМ)

**для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года**

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 ¹/₁₆. Усл. печ. л. 2,5. Тираж 50 экз.
Заказ № 26.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы современной физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФЭФМ**
кафедра: **общей физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:

теор. курс: вариативная часть – 4 зачет. ед.;

физ. практикум: вариативная часть – 2 зачет. ед.;

лекции – 30 часов Экзамен – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов Диф. зачёт – 6 семестр

лабораторные занятия – 30 часов

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90 Самостоятельная работа –
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 60 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. В.Н. Глазков

д.т.н., проф. А.В. Кубышкин

к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский

к.ф.-м.н., доц. А.О. Раевский

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. В. Максимычев

Квантовая макрофизика

1. Кристаллические структуры твердых тел, трансляционная симметрия кристаллов, решетка Бравэ, элементарная и примитивная ячейки, базис. Рентгеновские и нейтронные методы исследования кристаллических структур, дифракция Брэгга–Вульфа, обратная решетка, зона Бриллюэна.
2. Типы связей в кристаллах: кулоновская (ионные кристаллы), ковалентная связь (атомные кристаллы), ван-дер-ваальсовская (молекулярные кристаллы), металлическая (металлы). Энергия отталкивания, потенциал Леннарда–Джонса. Дефекты кристаллической решетки.
3. Гармонические колебания одномерной решетки одинаковых атомов и решетки из чередующихся атомов двух сортов. Адиабатическое приближение. Законы дисперсии, квазиимпульс, акустические и оптические моды колебаний атомов в кристаллах. Переход к нормальным модам. Фононы как квазичастицы, аналогия с фотонами.
4. Возбужденные состояния кристалла. Решеточная теплоемкость. Закон Дюлонга и Пти. Дебаевское приближение для акустической ветви колебаний твердого тела, температура Дебая. Модель Эйнштейна для описания оптических ветвей колебаний твердого тела. Решеточная теплопроводность, процессы переброса.
5. Модель свободных электронов. Характер распределения электронов по энергии при нуле температур, наличие максимальной энергии (энергия Ферми). Энергетическое распределение электронов при ненулевой температуре (распределение Ферми). Химпотенциал, температура вырождения. Плотность электронных состояний при энергии Ферми. Электронная теплоемкость и ее температурная зависимость, соотношение с решеточной теплоемкостью.
6. Физическая причина появления зон разрешенных и запрещенных значений энергии, модели слабой и сильной связи. Теорема Блоха. Расчет закона дисперсии в модели сильной связи. Фотонные кристаллы. Качественное объяснение различия в электропроводности изоляторов, полупроводников и металлов. Понятие о ферми-жидкости, электроны и дырки как квазичастицы.
7. Электропроводность классического газа носителей в модели Друде–Лоренца. Электропроводность металла. Роль длины свободного пробега. Электронная теплопроводность. Качественное различие механизмов релаксации энергии и импульса электронов в процессах тепло- и электропроводности, закон Видемана–Франца. Правило Маттисена для электронов проводимости в металлах. Температурная зависимость сечения рассеяния электронов на фононах и примесях и друг на друге. Закон Блоха–Грюнайзена.

8. Электронные и дырочные возбуждения в полупроводниках, заряд дырок. Эффективная масса носителей заряда. Условие электронейтральности. Собственные и примесные полупроводники, донорные и акцепторные уровни, оценка энергии мелких примесных уровней. Температурная зависимость положения уровня Ферми в полупроводниках.
9. Зависимость концентрации проводящих электронов от температуры. Электропроводность полупроводников. Подвижность носителей. Температурная зависимость времени релаксации электронов. Контактные явления в полупроводниках. Равенство химпотенциалов при равновесии. $(p-n)$ -переход во внешнем электрическом поле. Выпрямляющие свойства $(p-n)$ -перехода.
10. Сверхтекучесть. Квантовые возбуждения в сверхтекучей жидкости, закон дисперсии. Критерий сверхтекучести Ландау. Качественное объяснение отсутствия вязкости в сверхтекучем гелии. Явление сверхпроводимости, отличие сверхпроводника от идеального металла, эффект Мейсснера, лондоновская глубина проникновения. Роль кристаллической решетки в явлении сверхпроводимости, изотоп-эффект, куперовское спаривание. Качественное подобие сверхтекучести и сверхпроводимости как квантовых явлений в системе бозонов.
11. Длина когерентности, нулевой импульс пары, s -спаривание электронов. Связь длины когерентности с величиной сверхпроводящей щели. Величина щели в теории БКШ. Критическое магнитное поле. Критический ток, правило Сильсби. Квантование магнитного потока. Сверхпроводники I и II рода, понятие о вихрях магнитного потока, вихревая решетка, пиннинг. Первое и второе критические поля, оценки их величин. Высокотемпературные сверхпроводники. Области практического использования и перспективы применения сверхпроводимости.
12. Эффект Ааронова–Бома. Низкоразмерные структуры, понятие о квантовых ямах, проволоках и точках. Двухмерный характер движения электронов в структурах металл–окисел–полупроводник (МОП-структура). Квантование Ландау. Эффект Холла в полупроводниках, холловское удельное сопротивление (постоянная Холла). Квантовый эффект Холла, квантовый эталон сопротивления.
13. Магнетизм веществ: диа-, пара- и ферромагнетики. Формула Ланжевена–Бриллюэна для описания намагничивания парамагнетиков. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Квантовая природа ферромагнетизма. Модель Гейзенберга для описания обменного взаимодействия, энергия анизотропии. Одноионная анизотропия. Модель Изинга.
14. Теория среднего поля для описания магнитного упорядочения. Закон Кюри–Вейсса. Возбуждения в спиновой системе ферромагнетиков. Классическое и квантовое описание спиновых волн. Закон $3/2$ Блоха. Ферромагнетизм электронов проводимости, критерий Стонера.

Литература

Основная литература

1. *Ципенюк Ю.М.* Квантовая микро- и макрофизика. Москва: Физматкнига., 2006.
2. *Морозов А.И.* Элементы современной физики твердого тела. Москва: ИД «Интеллект», 2015.
3. *Петров Ю.В.* Основы физики конденсированного состояния. Москва: ИД «Интеллект», 2013.
4. *Гладун А.Д.* Строение вещества. Ч. II. Москва: МФТИ, 2010.
5. *Иванов А.А.* Введение в квантовую физику систем из многих частиц. Москва: МФТИ, 2007.
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т. 2. Москва: Физматлит, 2007.
7. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 5. Москва: Наука, 1986.
8. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. Москва: Наука, 1978.

Дополнительная литература

9. *Мейлихов Е.З.* Электроны и фононы в общей физике твердого тела. Москва: МФТИ, 2005.
10. *Мейлихов Е.З.* Общая физика полупроводников. Москва: МФТИ, 2006.
11. *Мейлихов Е.З.* Общая физика сверхпроводников. Москва: МФТИ, 2003.
12. *Мейлихов Е.З.* Магнетизм. Основы теории. Москва: ИД «Интеллект», 2014.
13. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Кристаллическая решетка. Фононы. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
14. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Электроны в кристалле. Металлы. Полупроводники. Диэлектрики. Магнетики. Сверхпроводники. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
15. *Гольдин Л.Л., Новикова Г.И.* Введение в квантовую физику. Москва: ИД «Интеллект», 2016.
16. *Крылов И.П.* Основы квантовой физики и строение вещества. Москва: МФТИ, 1989.
17. *Петров Ю.В.* Введение в физику твердого тела. Москва: МФТИ, 1999.
18. *Ципенюк Ю.М.* Нулевые колебания. Москва: МФТИ, 2011.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 3-го курса ЛФИ, ФАКТ (только г.Жуковский) и ФЭФМ
на весенний семестр 2020-2021 учебного года

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи для решения	
			Обязательные	Дополнительные
1	01.02–06.02	Структура и колебания кристаллических решёток.	0-1-1, 0-1-2, 2.1, 2.71, Т.1, Т.2, Т.3, Т.4	Т.Ф1(1) Т.Ф1(2)
2	08.02–13.02	Фононы. Модель Дебая.	0-2-1, 0-2-2, 2.23, 2.31, 2.58, 2.61, 2.75, Т.5	Т.Ф2
3	15.02–22.02	Решёточная теплоёмкость и теплопроводность.	0-3-1, 0-3-2, 2.34, 2.40, 2.52, 2.64, 2.65, 2.68	Т.Ф3
4	01.03–06.03	Свободный электронный газ. Энергия Ферми. Теплоёмкость металлов.	0-4-1, 0-4-2, 3.4, 3.17, 3.22, 3.27, 3.44, 3.61	Т.Ф4
5	08.03–13.03	Кинетика электронов в металле.	0-5-1, 0-5-2, 3.65, 3.74, 3.75, 3.88, Т.6, Т.7	Т.Ф5
6	15.03–20.03	Зонный характер спектра электронов в твердых телах; поверхность Ферми.	0-6-1, 0-6-2, 3.1, 3.34, 3.35, 3.43, 3.85, Т.8	Т.Ф6
7	22.03–27.03	Контрольная работа (по семинарским группам)		
8	29.03–04.04	Сдача 1-го задания		
9	05.04–10.04	Полупроводники.	0-9-1, 0-9-2, 4.12, 4.17, 4.43, 4.50, Т.9, Т.10	Т.Ф9
10	12.04–17.04	Сверхпроводники.	0-10-1, 0-10-2, 5.19, 5.21, 5.22, 5.24, 5.27, 5.34	Т.Ф10
11	19.04–24.04	Низкоразмерные системы.	0-11-1, 0-11-2, 3.87, 3.89, 4.16, 4.28, 4.48, Т.11	Т.Ф11

12	26.04– 01.05	Магнетизм.	0-12-1, 0-12-2, 6.60(A), 6.148(Г), 6.251(Г), Т.12, Т.13, Т.14	Т.Ф12(1) Т.Ф12(2)
13	27.04– 02.05	Контрольная работа (по семинарским группам)		
14	03.05– 08.05	Сдача 2-го задания		
15	10.05– 15.05	Подготовка вопросов по выбору		
16	17.05– 22.05	Зачет в лаборатории		

Примечание:

Номера задач без букв соответствуют разделу «Строение вещества». Номера задач с буквой (А) – разделу «Атомная и ядерная физика», с буквой (Г) – разделу избранных задач ГОС экзаменов Сборника задач по общему курсу физики. Часть 3 / под ред. В.А. Овчинкина. М.: МФТИ. 2009.

Контрольные задачи и вопросы к семинарам (задачи группы 0)

0-1-1. При комнатной температуре ниобий ($Z = 93$) кристаллизуется в ОЦК-решетку с ребром куба $a = 3,294 \text{ \AA}$. Найти плотность ниобия.

0-1-2. Найти расстояния между плоскостями d_{110} в моноатомной ОЦК- и ГЦК-решетках, если ребро элементарного куба равно a .

0-2-1. Усредненная скорость звука в меди равна $s = 3600 \text{ м/с}$. Постоянная ГЦК-решетки меди равна $a = 3,61 \text{ \AA}$. Найти дебаевскую частоту.

0-2-2. Найти величину щели (в эВ) между акустической и оптической модами колебаний на границе зоны Бриллюэна для одномерной цепочки NaCl с периодом $2a = 5,6 \text{ \AA}$. Скорость звука $s = 3 \cdot 10^5 \text{ см/с}$.

0-3-1. Оценить, какое количество тепла надо подвести к одному молю диэлектрического кристалла, содержащего один атом в элементарной ячейке, чтобы нагреть его от температуры 2θ до $2,5\theta$.

0-3-2. Имеется диэлектрический кристалл с температурой Дебая $\theta = 300 \text{ К}$. Как изменится его решеточная теплопроводность при увеличении температуры от 5 К до 15 К ? Считать, что при указанных температурах длина свободного пробега фононов ограничена размерами кристалла.

0-4-1. Определить, какая доля электронов проводимости в металле при $T = 0 \text{ К}$ имеет кинетическую энергию, большую $0,5 E_F$.

0-4-2. Оценить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Температура Дебая у серебра равна $\theta = 220$ К, энергия Ферми $E_F = 5,5$ эВ.

0-5-1. Как изменится электропроводность чистого металла, если его температура изменилась от $1,5\theta$ до 2θ ? Вкладом дефектов кристаллической структуры пренебречь.

0-5-2. При нагревании металла от 0 К до 2 К его сопротивление возросло в 5 раз. Во сколько раз изменится сопротивление этого металла при нагревании от 0 К до 4 К?

0-6-1. Закон дисперсии электронов в двумерной структуре с периодом a имеет вид $E(k_x, k_y) = A(\cos k_x a + \cos k_y a)$. Найти модуль групповой скорости электронов в точке $k_x = \pi/2a$, $k_y = \pi/6a$.

0-6-2. Закон дисперсии электронов в одномерной структуре с периодом a имеет вид $\varepsilon(k_x) = A \cos(k_x a)$. Найти ускорение электрона при $k_x = \pi/6a$ в электрическом поле с напряженностью E . Концентрацию электронов считать малой.

0-9-1. Оценить минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в чистом кристалле GaAs, если его электропроводность изменяется в 10 раз при изменении температуры от $+20$ °С до -3 °С.

0-9-2. Оценить, при какой концентрации мелких донорных примесей в кремнии образуется примесная зона? Статическая диэлектрическая проницаемость кремния $\varepsilon = 12$, эффективная масса равна половине массы свободного электрона.

0-10-1. Оценить величину энергетической щели в свинце, у которого критическая температура равна $T_c = 7,2$ К.

0-10-2. При каком напряжении начнет течь ток через туннельный переход металл-диэлектрик-сверхпроводник, если $T_c = 9,2$ К? Измерение проводится при $T \ll T_c$.

0-11-1. В каком минимальном магнитном поле электроны в МОП-структуре будут полностью заполнять нижний спиновый подуровень Ландау? Поверхностная плотность электронов $n_s = 10^{12}$ см⁻².

0-11-2. При приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена, энергия Ферми электронов оказалось равной $E_F = 0,1$ эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене, если $c^* = 10^8$ см/с.

0-12-1. Оценить обменный интеграл (в эВ) в оксиде европия, если спин магнитного иона равен $7/2$, число ближайших соседей – 12, температура Кюри – 77 К.

0-12-2. При температуре T_1 намагниченность ферромагнетика отличается от намагниченности насыщения на 1%, а при температуре T_2 – на 8%. Найти отношение температур T_2/T_1 .

Текстовые задачи (задачи группы 1)

Т.1. Кристаллическая решетка окиси марганца MnO является кубической гранецентрированной (типа $NaCl$). При низких температурах это соединение является антиферромагнетиком: соседние ферромагнитно упорядоченные плоскости (111) ионов магния имеют противоположные направления локального магнитного момента. При дифракции нейтронов с длиной волны $\lambda = 1,204 \text{ \AA}$ на порошкообразном MnO на угол $\alpha = 13^\circ$ наблюдается пик магнитного рассеяния первого порядка. Найти величину ребра элементарного куба.

$$\text{Ответ: } a = \frac{\sqrt{3}\lambda}{4 \sin(\alpha/2)} = 4,5 \text{ \AA}.$$

Т.2. Дана двухатомная цепочка равноотстоящих атомов с отношением масс 2:3. В ней возбуждено такое колебание, что на оптической ветви отношение модулей смещения легкого и тяжелого атомов равно 2. Чему равна (в единицах периода цепочки) максимальная длина волны такого колебания. Учитывать взаимодействие только между ближайшими соседями.

$$\text{Ответ: } \lambda_{\max} = \pi d / \arccos(0.4) \approx 2,7d.$$

Т.3. Так называемый α -карбин представляет собой одномерную цепочку из атомов углерода с чередующимися одинарной и тройной химическими связями $-C \equiv C - C \equiv C -$, а β -карбин – цепочку, в которой атомы углерода связаны двойной химической связью $=C = C = C = C =$. Считая, что жесткость γ химической связи определяется ее кратностью, определить отношение продольных скоростей звука в α - и β -модификациях карбина. Среднее расстояние между атомами, соединенными одинарной и тройной связями в α -карбине, считать равными $d_\alpha^{(1)} = 0,137 \text{ нм}$ и $d_\alpha^{(3)} = 0,125 \text{ нм}$ соответственно, а среднее расстояние между атомами, соединенными двойной связью в β -карбине, равным $d_\beta^{(2)} = 0,128 \text{ нм}$.

$$\text{Ответ: } \frac{s_\alpha}{s_\beta} = \frac{d_\alpha^{(1)} + d_\alpha^{(3)}}{2d_\beta^{(2)}} \sqrt{\frac{2\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_3)}} = \frac{131}{128} \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,89.$$

Т.4. В приближении «ближайших соседей» закон дисперсии фононов $\omega(k)$ в зоне Бриллюэна является монотонно возрастающей функцией. При учете взаимодействия с соседями, следующими за ближайшими, это уже не всегда так. Например, в свинце, в направлении $[100]$ (вдоль ребра элементарного куба), частота фононов достигает максимума при $k_0 = 0,8k_{\text{Брил}}$, где $k_{\text{Брил}}$ – волновое число, соответствующее границе зоны

Бриллюэна в этом направлении. Скорость продольного звука в этом направлении составляет

$s = 2,2 \cdot 10^5$ см/с. Используя модель одномерной цепочки, найти силовые постоянные для первых и вторых соседей. Свинец кристаллизуется в ГЦК-решетку с периодом $d = 4,95 \text{ \AA}$. Период одномерной цепочки – это расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению [100].

$$\text{Ответ: } \beta_1 = -4\beta_2 \cos\left(\pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right) = 12,1 \cdot 10^3 \text{ дн/см,}$$

$$\beta_2 = \frac{M_{\text{Pb}} s^2}{d^2 \left(1 - \cos \pi \frac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right)} = 3,78 \cdot 10^3 \text{ дн/см.}$$

Т.5. Вероятность эффекта Мессбауэра – испускания γ -квантов возбужденным ядром без изменения состояния решетки (рождения фононов) – равна $w = \exp(-2L)$ (т.н. фактор Лэмба–Месссбауэра). Здесь $L = \langle (\vec{k}\vec{u})^2 \rangle / 2$, \vec{k} – волновой вектор γ -кванта, \vec{u} – вектор смещения атома решетки, угловые скобки обозначают усреднение по направлениями векторов и по спектру колебаний решетки. Найти в дебаевском приближении максимально возможную вероятность эффекта Месссбауэра для кристалла иридия-193 (решетка ОЦК), если энергия перехода в ядре иридия $E_\gamma = 129$ кэВ, дебаевская температура $\Theta = 430$ К.

$$\text{Ответ: } w = \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{E_\gamma^2}{M_{\text{Ir}} c^2 k_{\text{B}} \Theta}\right) = 0,154$$

Т.6. В гелиевую ванну ($T = 4,2$ К) помещен намотанный медным проводом соленоид диаметром $D = 10$ мм с числом витков $N = 200$. Какая мощность будет выделяться при пропускании через соленоид тока $I = 100$ мА? Измерение сопротивления единицы длины этого провода показали, что при температуре $T_1 = 1$ К оно равно $R_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ом/см, а при $T_2 = 2$ К – $R_2 = 3,3 \cdot 10^{-5}$ Ом/см. Считать, что для меди выполняется закон Блоха–Грюнайзена.

$$\text{Ответ: } 8,3 \text{ мВт.}$$

Т.7. Чистый образец из золота имеет при температуре $T = 295$ К удельное сопротивление $\rho = 2,2 \cdot 10^{-6} \cdot \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетке с периодом $a = 4,1 \text{ \AA}$. Дебаевская температура золота $\theta = 197 \text{ К}$. Оценить по этим данным среднее (эффективное) сечение рассеяния электронов на фононах.

$$\text{Ответ: } \bar{\sigma} = \frac{2}{9(12\pi^2)^{1/3}} \frac{e^2 \rho a}{\hbar} \frac{\theta}{T} = 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2.$$

Т.8. Найти при $T \approx 0$ К максимальный импульс электрона в проводнике с анизотропным законом дисперсии:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_{\perp}^*} + \frac{p_z^2}{2m_{\parallel}^*}, \quad \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} = 8.$$

Концентрация электронов $n = 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

$$\text{Ответ: } p_{\text{макс}} = \hbar \left(3\pi^2 n \frac{m_{\parallel}^*}{m_{\perp}^*} \right)^{1/3} = 6,5 \cdot 10^{-21} \text{ г} \cdot \text{см/с}.$$

Т.9. При легировании кремния донорами с концентрацией $N_d = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, оказалось, что ток дырок при температуре $T = 600$ К уменьшился в $\gamma = 3$ раза по сравнению со случаем нелегированного образца. Найти долю ионизованных примесей при данной температуре, если эффективные массы электронов и дырок равны $m_n^* = 1,08 m_0$ и $m_p^* = 0,56 m_0$, ширина запрещенной зоны при данной температуре равна $E_g = 1,05$ эВ. Подвижность дырок считать постоянной.

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{n_i}{N_d} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = 0,51,$$

где

$$n_i = 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{m_p^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{E_g}{2k_B T} \right) = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}.$$

Т.10. В ионных кристаллах при конечных температурах возникают дефекты Шоттки – пустые места в узле кристаллической решетки (вакансии). При этом ионы из узлов решетки уходят из объема кристалла на его поверхность. В силу электронейтральности в чистом без примесей кристалле вакансии положительных и отрицательных ионов возникают парами (аналогично электронам и дыркам в полупроводнике). Минимальная энергия образования пары вакансий (т.е. работа по удалению пары ионов)

в кристалле NaCl составляет $E_{\text{Sch}} = 2$ эВ. Найти температуры $t = 330$ °C равновесные концентраций вакансий при в природном NaCl содержащем примесь CdCl₂ с концентрацией ионов кадмия $n_{\text{Cd}^{++}} = 10^{14}$ см⁻³. Ионы кадмия замещают ионы натрия в узлах кристаллической решетки. Концентрация узлов в подрешетках ионов обоих знаков в NaCl равна $n_0 = 2,2 \cdot 10^{22}$ см⁻³.

$$\text{Ответ: } n_{\text{Na}^+} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} + n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} n_i = 1,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

$$n_{\text{Cl}^-} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} - n_{\text{Cd}^{++}} \right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} n_i = 0,62 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3},$$

где

$$n_i = n_0 \exp(-E_{\text{Sch}} / 2k_{\text{B}}T) \cong 10^{14} \text{ см}^{-3}.$$

Т.11. Найти отношение электронной и решеточной теплоемкостей графена при низких температурах. Графен можно считать двумерным бесщелевым полупроводником с линейным законом дисперсии носителей тока $E(\vec{k}) = \pm \hbar c^* k$, где \vec{k} – двумерный волновой вектор, $k = |\vec{k}|$, $c^* = 10^8$ см/с, знак «+» соответствует зоне проводимости, знак «-» – валентной зоне. В зоне Бриллюэна графена имеется два эквивалентных минимума закона дисперсии (две долины). Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене $s = 1,5 \cdot 10^6$ см/с. Наличием изгибных колебаний пренебречь.

Указание: Воспользоваться соотношением $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x + 1} dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \int_0^{\infty} \frac{x^n}{e^x - 1} dx$;

$$\text{Ответ: } \frac{C_s}{C_{ph}} = 3 \left(\frac{s}{c^*} \right)^2 = 6,75 \cdot 10^{-4}.$$

Т.12. Под действием однородного переменного магнитного поля в тонких ферромагнитных пленках могут возбуждаться спиновые волны. Когда на толщине пленки укладывается нечетное число полуволин n , возникает стоячая волна колебаний намагниченности (спин-волновой резонанс). Так в пермаллоевой пленке толщиной $L = 2000$ Å на частоте $f = 9$ ГГц наблюдается резонанс с $n = 7$.

(а) Чему равна эффективная масса (в единицах массы свободного электрона) этих квазичастичных возбуждений?

(б) Считая, что пленка сделана из чистого железа и используя результат (а), найти относительное изменение намагниченности пленки при нагреве ее от $T = 0$ К до $T = 300$ К. Спин иона железа считать равным $S = 5/2$, размер элементарного куба ОЦК-решетки $a = 2,87 \text{ \AA}$.

Указание: Закон дисперсии спиновых волн считать квадратичным;

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = 4\pi^2 \cdot 0,0587 .$$

Ответ: (а) $m^* = \frac{\pi \hbar n^2}{4 f L^2} \approx 1,13 \cdot 10^{-26} \text{ г}$, или $m^* \approx 12,4 m_e$.

$$(б) \frac{\Delta M}{M(0)} = 0,0587 \left(\frac{2m^* k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{a^3}{2S} \approx 0,7\% .$$

Т.13. Магнитная восприимчивость жидкого ^3He выше температуры 1 К ведет себя точно по закону Кюри, т.е. $\chi \propto 1/T$. Вычислить величину восприимчивости ^3He при температуре $T = 2$ К. Плотность ^3He при данной температуре равна $\rho = 0,07 \text{ г/см}^3$.

Ответ: $\chi = \frac{J(J+1)g_{sm}^2 \mu_{\text{яб}}^2}{3k_B T} \frac{\rho}{\mu} N_A = 4,735 \cdot 10^{-9}$.

Т.14. Гетероструктура AlGaIn/GaN, охлажденная до температуры $T = 4$ К, помещена в магнитное поле $B = 4$ Тл. Оценить теплоемкость единицы поверхности двумерного электронного газа, если при $T = 0$ К полностью заполнен только один подуровень Ландау. Эффективная масса электронов равна $m^* = 0,16m_0$, где m_0 – масса свободного электрона.

Ответ: $C \approx 2n_s k_B \left(\frac{\mu_B B}{k_B T} \right)^2 \frac{\exp \frac{\mu_B B}{k_B T}}{\left(\exp \frac{\mu_B B}{k_B T} + 1 \right)^2} = 2,7 \cdot 10^{-6} \text{ эрг/(К} \cdot \text{см}^2)$,

где $n_s = B / \Phi_0 = eB / hc$.

Задачи повышенной сложности (задачи группы 2)

Т.Ф1(1). Для базоцентрированной ромбической решётки с параметрами решётки a , $b=2a$, c построить обратную решётку, выделить первую зону Бриллюэна, найти объём первой зоны Бриллюэна и сравнить с объёмом элементарной ячейки исходной ромбической решётки.

$$\text{Ответ: } V_{\text{зБ}} = \frac{(2\pi)^3}{a^2 c}.$$

Т.Ф1(2). При изучении структуры кристаллов широко используется метод Дебая–Шерера: на порошковый образец, состоящий из маленьких случайно ориентированных кристаллов, падает монохроматическое рентгеновское излучение. Наблюдаемая на расположенном за образцом перпендикулярно к падающему лучу плоском детекторе картина дифракции состоит из семейства концентрических окружностей. Определить радиусы первой из этих окружностей для кристаллов с простой кубической и ГЦК решетками. В обоих случаях ребро кубической элементарной ячейки $a=3.14\text{Å}$, длина волны падающего излучения $\lambda = 0.7\text{Å}$ (K- α линия молибдена), расстояние до детектора $L=10\text{ см}$.

$$\text{Ответ: для кубической решетки: } R \approx L \frac{\lambda}{a} = 2.2 \text{ см},$$

$$\text{для ГЦК решетки } R \approx \sqrt{3}L \frac{\lambda}{a} = 3.8 \text{ см}.$$

Т.Ф2. В свободном (подвешенном) графене существует длинноволновая изгибная мода колебаний с законом дисперсии $\omega = \alpha k^2$, где $\alpha = 5 \times 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}$, а k – двумерный волновой вектор. Оценить в рамках низкотемпературного приближения при какой температуре вклад в теплоемкость от изгибной моды сравняется с вкладом звуковых ветвей. Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене равна $\bar{s} = 16,2 \text{ км/с}$.

$$\text{Указание: } \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \cong 2.40, \quad \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Ответ: } T_* = \frac{\pi^2}{86,4} \frac{\hbar \bar{s}^2}{\alpha k} \cong 458 \text{ К}.$$

Т.Ф3. Искусственный алмаз, выращенный из изотопически чистого углерода ^{12}C , обладает при комнатной температуре теплопроводностью $\kappa = 25 \text{ Вт}/(\text{см}\cdot\text{К})$. Теплопроводность же алмаза, выращенного из естественной смеси изотопов (с 1%-ым содержанием изотопа ^{13}C), на 1% меньше. Оценить длину свободного пробега фононов, обусловленную рассеянием на дефектах, роль которых играют атомы ^{13}C . Температура Дебая алмаза $\Theta = 2250 \text{ К}$, скорость звука $s = 17,5 \text{ км/с}$, ребро элементарного куба решетки алмаза, содержащего 8 атомов, равно $a = 3,57 \text{ Å}$.

$$\text{Ответ: } \lambda = \frac{15\kappa a^3}{48\pi^4 k_B s} \left(\frac{\Theta}{T} \right)^3 \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ см.}$$

Т.Ф4. При облучении золотого фотокатода ультрафиолетовым излучением с энергией кванта 16.9 эВ образуются фотоэлектроны с энергиями от $\varepsilon_1 = 7.1$ эВ до $\varepsilon_2 = 11.6$ эВ. Считая спектр электронов проводимости в золоте изотропным и квадратичным, оценить величину эффективной массы электронов. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетку с ребром элементарного куба $a = 4,08 \text{ \AA}$.

$$\text{Ответ: } \frac{m^*}{m_0} = \frac{\hbar^2 (12\pi^2)^{2/3}}{2m_0 a^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = 1,21$$

Т.Ф5. Медный стержень прикреплен одним концом к криостату, поддерживающему температуру $T_1 = 400$ мК, а другой его конец нагрет до температуры $T_2 = 2$ К. Чему равна температура в точке посередине стержня (на равном удалении от концов). Стержень находится в глубоком вакууме, радиационный теплообмен не учитывать.

$$\text{Ответ: } T_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{T_2^2 + T_1^2}{2}} \cong 1,44 \text{ К.}$$

Т.Ф6. Атомы лития образуют одномерную цепочку так, что возникает перекрытие волновых функций электронов и уровни $1s$ и $2s$ отдельного атома расщепляются в зоны. Законы дисперсии электронов в первой и второй зонах: $E_1(k) = -7E_0 - E_0 \cos ka$ и $E_2(k) = -3E_0 + 2E_0 \cos ka$, где энергия отсчитывается от уровня энергии покоящегося электрона в вакууме, $E_0 = 2$ эВ, межатомное расстояние $a = 3 \text{ \AA}$. Найти электронный вклад в теплоёмкость единицы длины такой цепочки при $T = 10$ К.

$$\text{Ответ: } c_L = C(T)/L = \pi \kappa^2 T / (3E_0 a) = 2,1 \cdot 10^{-12} \text{ эрг/(см К).}$$

Т.Ф9. Найти концентрацию носителей тока при температуре $T = 4,2$ К в двухслойном (верхний слой повернут на 60° относительно нижнего, как в графите) идеальном графене, который является бесщелевым полупроводником. У двухслойного графена в зоне Бриллюэна находится два эквивалентных минимума (долины) закона дисперсии, вблизи которых

$E(\vec{k}) = \pm \hbar^2 k^2 / 2m^*$. Верхний знак соответствует зоне проводимости, нижний – валентной зоны; эффективная масса носителей $m^* = 0,054m_0$. Во сколько раз изменится концентрация, если увеличить температуру вдвое?

$$\text{Ответ: } n_s = \frac{2 \ln 2}{\pi} \frac{m^* \kappa T}{\hbar^2} = 1,14 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}.$$

Т.Ф10. Ниобий является сверхпроводником второго рода, у которого при абсолютном нуле глубина проникновения и длина когерентности практически совпадают. Считая, спектр электронов в ниобии является изотропным квадратичным, что найти концентрацию и эффективную массу электронов в ниобии. Удельная электронная теплоемкость ниобия в нормальном состоянии описывается законом $C(T)/T = \gamma = 7,18 \cdot 10^3 \text{ эрг}/(\text{см}^3 \text{ K}^2)$. Величина энергетической щели в ниобии при абсолютном нуле $\Delta = 1,4 \text{ мэВ}$.

Указание. Для упрощения вычислений, можно считать, что $(3\pi^2)^{1/3} \cong \pi$.

$$\text{Ответ: } n \cong 1,7 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}, m^* = 75 \cdot 10^{-28} \text{ г или } 8,24 m_0.$$

Т.Ф.11. В объемном образце полуметалла имеется перекрытие зоны проводимости и валентной зоны. Из этого образца изготовлены различные тонкие пленки. Оказалось, что пленки с толщиной меньшей $d = 300 \text{ \AA}$ не обладают проводящими свойствами, а с большей - обладают. Найти величину перекрытия. Эффективные массы электронов и дырок равны соответственно $m_e^* = 0,04m_0$ и $m_h^* = 0,02m_0$. Считать, что электроны и дырки не могут выйти за границы пленки. Принять, что $T \cong 0 \text{ К}$.

$$\text{Ответ: } \Delta = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_0 d^2} \left(\frac{m_0}{m_h^*} + \frac{m_0}{m_e^*} \right) = 0,3 \text{ эВ}.$$

Т.Ф12(1). При измерении низкотемпературной теплоёмкости парамагнитной соли с магнитными ионами Ni^{2+} ($S=1$) в магнитном поле $B = 4 \text{ Тл}$ наблюдается характерный пик теплоёмкости (аномалия Шоттки). Считая магнетизм чисто спиновым, определить при какой температуре наблюдается максимум теплоёмкости. Оценить, во сколько раз теплоёмкость в максимуме превышает решёточную (для оценки использовать характерные значения для диэлектрических кристаллов).

Указание: функция $y = x^2(4+2\text{ch } x)/(1+2\text{ch } x)^2$ имеет максимум при $x \approx 1.881$ равный $y_{\max} \approx 0.63$

$$\text{Ответ: } T_{\max} = \frac{g\mu_B B}{1,881k_B} = 2,86 \text{ К}, \quad C(T_{\max}) = 0,637 k_B.$$

Т.Ф12(2). Определить относительное изменение частоты света при рассеянии на 90° с испусканием магнона в ферромагнитном диэлектрике с простой кубической решёткой. Величина обменного интеграла $|J|=100$ К, спин магнитного иона $S = 5/2$, взаимодействуют только ближайшие соседи, длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм, показатель преломления среды $n = 1.3$. Спектр спиновых волн в указанном материале $\omega = (2|J|S/\hbar)(3 - \cos(K_x a) - \cos(K_y a) - \cos(K_z a))$.

$$\text{Ответ: } \frac{\delta\omega}{\omega} \approx \frac{4\pi|J|Sa^2n^2}{\hbar c\lambda} = 5,2 \cdot 10^{-7}$$

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Уравнения математической физики
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладная математика и физика»
физтех-школы: ФАКТ, ФЭФМ
кафедра: высшей математики
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:

теор. курс: базовая часть — 5 зачет. ед.;

лекции — 45 часов

практические (семинарские)

занятия — 30 часов

лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составил

к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор

Г. Е. Иванов

1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
2. Теорема о разрешимости интегрального уравнения с малым непрерывным ядром.
3. Лемма об эквивалентности интегрального уравнения с непрерывным ядром интегральному уравнению с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
4. Свойства собственных значений и собственных функций интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром. Теорема Гильберта–Шмидта.
5. Задача Штурма–Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля. Её свойства. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.
6. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова. Полнота системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.
7. Уравнение Бесселя. Представление функций Бесселя в виде степенного ряда. Интегральные представления функций Бесселя. Рекуррентные соотношения.
8. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя.
9. Построение формального решения смешанной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю.
10. Гармонические функции в \mathbb{R}^3 . Основная интегральная теорема. Теорема о среднем. Принцип максимума (строгий).
11. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.
12. Правильная нормальная производная. Условия разрешимости внутренней задачи Неймана. Неединственность решения. Внешняя задача Неймана.
13. Функция Грина задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара, формула Пуассона.
14. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Производящая функция. Присоединенные функции Лежандра. Решение задачи Дирихле для шара.
15. Объемный потенциал, его свойства. Поверхности Ляпунова. Потенциал простого слоя, его свойства. Разрыв нормальной производной простого слоя.

16. Потенциал двойного слоя, непрерывность на поверхности. Разрыв потенциала двойного слоя.
17. Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Разрешимость краевых задач.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 2000
3. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — 2-е изд. — Москва : Наука, 1988.
4. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
5. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — 7-е изд. — Москва : Наука, 1992.
6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1997.
7. *Уровев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Язуза, 1998.
8. *Масленникова В. Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — Москва : Изд-во РУДН, 1997.
9. *Шубин М. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — Москва : МЦНМО, 2001.
10. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях математической физики. — 2-е изд. — Москва : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге: *Владимиров В. С., Ваширин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., исправл. и доп. — Москва : Физматлит, 2016.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

I. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Метод Фурье

20.23(2); 20.38; 20.60(2).

1. Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, (r, φ) — полярные координаты (x, y) :

а) $u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r) \cos \varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = g(r) \cos 3\varphi, \quad 0 < r < 6, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$
 $|u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=6} = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$

б) $4u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin^2 2\varphi, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = g(r) \cos 2\varphi, \quad u_t|_{t=0} = J_0(\mu_{0,3}r), \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$
 $|u|_{r=0} < \infty, \quad u|_{r=1} = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0,$

где μ_{kj} — j -й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k , $k \in \overline{0, \infty}$, $j \in \mathbb{N}$.

2. Найти формальное решение смешанной задачи для круга

$$u_{tt} = \Delta u + \sin \mu_{0,1}t, \quad r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_0(\mu_{0,1}r), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad r < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$u|_{r=1} = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0;$$

где μ_{01} — первый положительный нуль функции Бесселя.

3. Решить смешанную задачу для круга:

$$u_t = \Delta u + y + e^{-\mu_{0,2}^2 t} J_0(\mu_{0,2}r), \quad x^2 + y^2 < 1, \quad t > 0;$$

$$u|_{t=0} = J_2(\mu_{2,3}r) \cos(2\varphi - \frac{\pi}{6}), \quad x^2 + y^2 < 1;$$

$$u|_{r=1} = ty, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad t > 0;$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \varphi(x, y)$ — полярные координаты точки (x, y) , $\varphi(0, 0) = 0$, $\mu_{n,i}$ — i -тый положительный нуль функции Бесселя $J_n(\rho)$.

II. Интегральные уравнения

(5.22); 5.23(5); 5.24(2); 5.25(2).

4. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin |x| + |x|y) \varphi(y) dy + a|x| + bx.$$

5. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(xe^{x^2} \cos^3 t + \frac{1 - \cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t) dt + f(x).$$

При каких $f(x) \in C[-1; 1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

6. Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α , при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{|y| < 1} (6|x|^2 - 2|y|^2) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha,$$

$$|x| < 1, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2)$$

разрешимо для любых λ . Найти решения при этом значении α .

5.34; 5.41(2); 5.44*.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 мая)

I. Задача Штурма–Лиувилля

15.4(8); 15.6(3); 15.15(6,7); 15.17.

1. Свести к интегральному виду задачи:

а) $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y, \quad 0 < x < \ln 2, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y'(\ln 2) = 0;$

б) $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x), \quad 0 < x < 1, \quad y'(0) = \alpha y(0), \quad y'(1) = 0,$

где $\alpha \geq 0$, f — непрерывная на отрезке $[0; 1]$ функция.

II. Уравнения Лапласа и Пуассона в круговых областях. Метод Фурье

16.1(3); 16.2(3).

2. Решить краевые задачи:

а) $\Delta u = 12x, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 < r < 2,$

$u|_{r=1} = 2 \cos^3 \varphi + 1 - \sin \varphi \cos \varphi,$

$u|_{r=2} = 16 \cos^3 \varphi - 4 \sin \varphi \cos \varphi;$

$$\text{б)} \quad \Delta u = 4 \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}, \quad 1 < r < 2, \quad r = \sqrt{x^2+y^2},$$

$$(2u - u_r)|_{r=1} = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad u_r|_{r=2} = \frac{8x^2}{x^2+y^2}.$$

3. а) В круге $r < 2$ исследовать, при каких значениях α задача Неймана

$$\Delta u = y, \quad u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi$$

имеет решение, и найти это решение.

б) Решить краевую задачу:

$$\Delta u = \frac{3(x^2 - y^2) + y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}, \quad r > 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$u_r|_{r=1} = -2 \sin \varphi + 4 \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

III. Сферические функции

16.26(2); 16.28(2); 16.30(7); 16.31(1); 16.24*.

4. Для шара $D : x^2 + y^2 + z^2 < 4$ найти все функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in D$ и граничному условию $\left(u + \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = xz^2$, $x^2 + y^2 + z^2 < 4$, где \bar{n} – внешняя нормаль к границе области D .

5. Для сферического слоя $D : 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4$ найти все функции $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$, $(x, y, z) \in D$, и граничному условию $\left(u + \frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\right)\Big|_{x^2+y^2+z^2=1} = y$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}\Big|_{x^2+y^2+z^2=4} = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, где \bar{n} – внешняя нормаль к границе области D .

IV. Функция Грина задачи Дирихле

17.1(1,2); 17.2(2); 17.4(1); 17.11*; 17.12(3); 17.15(4).

V. Потенциалы

18.6(1); 18.16; 18.18(4); 18.19(1); 18.20; 18.22(3); 18.43*.

Задания составили:

к. ф.-м. н., доцент В. В. Шаньков
ст. преподаватель С. И. Колесникова

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: Вычислительная математика

по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФЭФМ

кафедра: вычислительной физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.:

лекции – 30 часов

Экзамен – нет

практические (семинарские)

занятия – нет

лабораторные занятия – 30 часов

Диф. зачёт – 6 семестр

ВСЕГО ЧАСОВ – 60

Самостоятельная работа – 75 часов

Программу и задания составил

д.ф.-м.н., проф. В. В. Демченко

Программа принята на заседании кафедры

вычислительной физики

24 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН

И. Б. Петров

VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Задача Коши (расчёты химических реакций, электрических цепей).*¹

Понятия о жёстких уравнениях и системах ОДУ. *A*-устойчивые схемы. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.

VIII. ОДУ. Краевые задачи (стационарные задачи диффузии вещества, теплопроводности).

Численные методы решения краевых задач:

- 1) метод численного построения общего решения;
- 2) метод прогонки;
- 3) метод стрельбы;
- 4) метод квазилинеаризации;
- 5) вариационные методы:
 - а) Рунге;
 - б) Галёркина;
 - в) интегро-интерполяционный.

IX. Задачи на собственные значения (проблема устойчивости конструкций и оболочек).

Задачи на собственные значения. Численные методы решения задачи Штурма—Лиувилля.

X. Разностные схемы для уравнений с частными производными (задачи переноса излучения, динамики разреженного газа).

Примеры разностных схем для уравнений с частными производными. Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Методы построения аппроксимирующих разностных схем. Спектральный признак устойчивости разностной задачи Коши. Принцип замороженных коэффициентов.

XI. Уравнения и системы уравнений с частными производными гиперболического типа (задачи акустики, газодинамики, механики сплошных сред).

Характеристические свойства уравнений. Численные методы решения уравнений переноса, волнового уравнения и систем уравнений

¹ Знаком * помечены пункты вариативной части программы.

*акустики, *газодинамики. Корректная постановка начальных и краевых условий.

ХII. Численные методы решения эллиптических уравнений с частными производными (потенциальное течение жидкости, квазистационарные электромагнитные поля).

Метод установления для численного решения стационарных уравнений. *Конечные ряды Фурье. Условия сходимости. *Чебышевский набор итерационных параметров. *Попеременно-треугольный метод. *Метод конечных элементов.

ХIII. Многомерные уравнения с частными производными параболического типа (задачи теплопроводности, диффузии вещества в механике сплошных сред и физике плазмы).

Линейные и квазилинейные уравнения. Явные и неявные разностные схемы, особенности их алгоритмической реализации. Экономичные методы. Метод дробных шагов.

Литература

Основная

- 1.*Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. II. / под ред. В.В. Демченко. – Изд. 2-е перераб. и доп. – Москва : МФТИ, 2019.
- 2.** Демченко В.В. Вычислительный практикум по прикладной математике. – Москва : МФТИ, 2007. – 196 с.
- 3.*** Сборник задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенского. – Москва : МФТИ, 1996.
4. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. – 335 с.; 3-е изд. – Москва : Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтехковский учебник).
5. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. – Москва : Наука, 1977. – 400с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – Москва : Физматгиз, 1963. – 400 с.
7. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.

Дополнительная

1. Самарский А.А. Теория разностных схем. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – Москва : Наука, 1980. – 608 с.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – Москва : Наука–Физматлит, 1978. – 592 с.
4. Демченко В.В. Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка. – 2 изд. – Москва : МФТИ, 2004. – 116 с.

1-я контрольная работа — первая половина марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи — вторая декада марта)

По 1*: 7.1.2.; 7.1.13.; 7.1.20.; 7.2.1.; 7.2.5.; 8.1.1.; 8.1.2.; 8.2.2.; 8.3.2.; 8.5.2.; 8.5.4.; 8.6.2.; 9.2.; 9.12.; 9.17.

16.** Задача дается преподавателем для практического решения на ЭВМ.

2-я контрольная работа — первая половина мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи — первая декада мая)

По 1*: 10.1.2.; 10.1.11.; 10.1.15.; 10.2.2.; 10.2.12.; 10.2.20.; 11.1.8; 11.2.1; 11.2.16; 11.3.1; 12.3.8; 13.2.1.

По 3***: VIII.1, VIII.2, VIII.4, VIII.5, VIII.6, VIII.7, IX.1, IX.4.

21, 22**.** Задачи даются преподавателем для практического решения на ЭВМ.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: Квантовая механика

по направлению подготовки:

03.03.01 «Прикладные математика и физика»

физтех-школа: ФЭФМ

кафедра: теоретической физики

курс: 3

семестр: 6

Трудоемкость:

теор. курс: базовая часть – 2 зачет. ед.

лекции – 30 часов

Дифф. зачет – 6 семестр

практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа
– 30 часов

Программу и задание составил д.ф.-м.н., профессор
Ю.М. Белоусов

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

Ю. М. Белоусов

Принципы квантовой механики. Одночастичные системы

1. Постулаты квантовой механики. Векторная (дираковская) формулировка

Состояние и пространство состояний, физические величины (наблюдаемые) и операторы, принцип суперпозиции, полнота описания квантовой системы, уравнение Шредингера. Понятие представления, координатное и импульсное представление, волновая функция, матричные элементы операторов. Задача на собственные значения. Эрмитовское сопряжение и эрмитовы операторы, свойства их собственных векторов.

2. Гамильтониан и другие основные операторы

Гамильтоновы системы, классический и квантовый гамильтонианы. Эволюция физических величин во времени, скобки Пуассона. Квантовые скобки Пуассона – коммутаторы. Соответствие между физическими величинами и операторами. Соотношения неопределенностей для квантовых систем. Постулат коммутационного соотношения между операторами координаты и импульса. Представление операторов координаты и импульса в координатном и импульсном представлении. Функция от оператора, уравнение Шредингера в координатном и импульсном представлении.

3. Некоторые свойства операторов

Эволюция состояния во времени, оператор эволюции. Интегралы движения. Условия одновременной измеримости физических величин. Интегралы движения и полный набор физических величин. Вырождение спектра и неоднозначность выбора представления (способа описания) состояния квантовой системы. Понятие симметрии.

4. Волновая функция

Волновая функция как координатное представление состояния. Физический смысл и свойства волновой функции. Граничные условия для связанных состояний и инфинитного движения. Уравнение непрерывности. Плотность вероятности и плотность потока вероятности. Теоремы Эренфеста. Общие свойства одномерного движения. Невырожденность дискретного спектра, осцилляционная теорема.

5. Гармонический осциллятор как одна из точно решаемых моделей

Гамильтониан, трехмерный и одномерный гармонические осцилляторы. Осцилляторные единицы энергии, длины и импульса. Повышающий \hat{a}^+ и понижающий \hat{a} операторы и запись с их помощью гамильтониана. Решение задачи в энергетическом представлении, энергетический спектр осциллятора и состояния. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса в осцилляторе и его минимизация в основном состоянии. Понятие когерентного состояния. Состояния осциллятора в координатном и импульсном представлении.

6. Момент импульса

Изотропия пространства и момент импульса. Оператор поворота и его связь с оператором импульса. Коммутационные соотношения для проекций оператора импульса. Собственные состояния системы, обладающей определенным значением импульса. Значения, которые может принимать момент импульса. Координатное представление оператора момента, собственные функции. Полуцелые значения и понятие спина.

7. Центральное поле и атом водорода

Задача двух тел в классической и квантовой механике. Гамильтониан системы в случае центрального взаимодействия. Разделение радиальных и угловых переменных в сферической системе координат. Угловая часть волной функции и собственная функция оператора момента импульса. Вырождение энергетического спектра частицы в центральном поле. Кулоновское поле и атом водорода. Кулоновская и атомная система единиц. Энергетический спектр и состояния атома водорода, вырождение спектра водородоподобного атома. Классификация состояний атома водорода и частицы в произвольном центральном поле.

Приближенные методы квантовой механики

1. Квазиклассическое приближение

Действие в классической механике и уравнение Гамильтона–Якоби. Волновая функция стационарного состояния и ее выражение через квантовое действие. Уравнение для квантового действия, квазиклассическое разложение по степеням \hbar . Критерии применимости квазиклассического приближения, классически разре-

шенные и запрещенные области, вид волновой функции. Правила квантования Бора–Зоммерфельда и проникновение через потенциальный барьер. Понятие квазистационарных состояний, описание распада в квантовой механике.

2. Стационарная теория возмущений

Постановка задачи теории возмущений, стационарный случай. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера и ряд стационарной теории возмущений. Поправки к состояниям и уровням энергии дискретного спектра. Случай вырожденного энергетического спектра. Непрерывный спектр.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : Физматлит, 2010.
2. *Белоусов Ю.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – Москва : МФТИ, 2006.
3. *Белоусов Ю.М.* Методы теоретической физики. Часть 1. – Москва : МФТИ, 2010.
4. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физики. – Долгопрудный : ИД “Интеллект”, 2013.
5. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – Москва : Наука, 1981.

Дополнительная

1. *Мессиа А.* Квантовая механика. – Москва : Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
2. *Киселев В.В.* Квантовая механика. – Москва : МЦНМО, 2009.
3. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – Москва : МФТИ, 2005;
4. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный : ИД “Интеллект”, 2009.
5. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — Москва : Наука, 1973.

ЗАДАНИЕ 1

Упражнения

- (2) Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к операторам: а) инверсии \hat{I} и б) трансляции \hat{T}_a .
- ^C(1) Найдите собственные значения и собственные состояния оператора инверсии \hat{I} .
- ^C(1) Найдите собственные значения и собственные состояния оператора трансляции \hat{T}_a .
- (1) Покажите, что действие оператора трансляции \hat{T}_a на собственный вектор оператора координаты $|\mathbf{r}\rangle$ может быть определено с помощью экспоненты от оператора ∇ .
- (2) Найдите явный вид оператора $e^{i\varphi\hat{I}}$.
- (1) Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

- ^C(1) Докажите следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}_\alpha, F(\hat{\mathbf{p}})] = i\hbar \frac{\partial F(\hat{\mathbf{p}})}{\partial \hat{p}_\alpha};$$

$$[\hat{p}_\alpha, G(\hat{\mathbf{r}})] = -i\hbar \frac{\partial G(\hat{\mathbf{r}})}{\partial \hat{x}_\alpha}$$

- (3) Пусть $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}$ Покажите, что в этом случае они удовлетворяют соотношению неопределенности

$$\langle \Delta \hat{A}^2 \rangle \langle \Delta \hat{B}^2 \rangle \leq \frac{1}{4} \langle \hat{C} \rangle,$$

где $\Delta \hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$.

- (1) Используя “табличный” коммутатор операторов импульса и координаты и результаты упражнений 6 и 7, раскройте следующие коммутаторы:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}^2], \quad [U(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}], \quad [U(r), \hat{\mathbf{p}}^2],$$

- 10.* (3) Используя свойства оператора трансляции и результаты упражнений 7 и 9, преобразуйте операторное выражение

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \hat{\mathbf{p}}} U(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathbf{a} \hat{\mathbf{p}}}.$$

- 11.^C (1) Эрмитов оператор с дискретным спектром $\hat{f}(\lambda)$ зависит от параметра λ . Собственные значения $f_n(\lambda)$ и собственные векторы $|n(\lambda)\rangle$ этого оператора также зависят от λ . Докажите теорему Гельмана–Фейнмана:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle n(\lambda) \left| \frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial \lambda} \right| n(\lambda) \right\rangle.$$

12. (2) Постройте оператор, соответствующий физической величине $\varphi = (\mathbf{r}\mathbf{p})$, где \mathbf{r} и \mathbf{p} – соответственно радиус-вектор и импульс частицы.
13. (2) Воспользовавшись повышающим и понижающим операторами \hat{a}^+ и \hat{a} , найдите средние значения операторов \hat{x}^2 , \hat{x}^4 и \hat{x}^{2k+1} в n -м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора.
14. (3) Раскройте коммутаторы:

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma, \hat{p}_\nu].$$

15. (3) Раскройте следующие коммутаторы:

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{r}}^2], \quad [\hat{l}_\alpha, (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}})],$$

$$[\hat{l}_\alpha, f(r)], \quad [\hat{l}_z, f(\rho)], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ЗАДАЧИ

1. (3) Частица массы m совершает финитное движение в одномерной “прямоугольной” потенциальной яме конечной глубины:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Исследуйте, существуют ли связанные состояния в “прямоугольной” потенциальной яме фиксированной ширины $2a$, если $U_0 \rightarrow 0$? Согласуется ли результат с соотношением

неопределенностей? Проиллюстрируйте результаты с помощью одной из стандартных компьютерных программ.

Воспользуйтесь полученными результатами для оценки числа уровней электрона в металлическом образце (глубина потенциала $U_0 = 10$ эВ примерно равна работе выхода), если а) $a = 0.1$ нм (“атом”); б) $a = 10$ нм (“наночастица”); в) $a = 1$ см (“макроскопический образец”).

2. (2) Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для частицы массы m в одномерной потенциальной яме следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Что здесь можно сказать о связанных состояниях при фиксированном a и $U_0 \rightarrow 0$?

3. (3) Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и в области $x > 0$ попадает в область действия потенциала, который имеет вид: а) прямоугольной потенциальной ямы ширины a и глубины U_0 , б) прямоугольного потенциального барьера ширины a и высоты U_0 . Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы от указанных потенциалов. Постройте графики с помощью одной из стандартных компьютерных программ. Существуют ли энергии, при которых ямы и барьеры полностью прозрачны для падающих частиц? Если “да”, то сформулируйте, чем определяются эти энергии.

В случае потенциальной ямы предложите способ оценки энергии E_0 , выше которой квантовые ответы практически совпадают с классическими. Какова эта энергия при прохождении электрона сквозь наноскопический слой металла: $a = 10$ нм и $U_0 = 10$ эВ?

- 4.^C (1) Частица массы m совершает финитное движение в одномерной модельной потенциальной яме, вид которой может быть представлен δ -функцией:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \delta(x),$$

где κ_0 – параметр ямы. Покажите, что в этой яме имеется только одно связанное состояние; найдите энергию уровня и волновую функцию частицы в координатном представлении. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии.

5.* (4) Получите стационарное уравнение Шредингера в задаче 4 в импульсном представлении. Найдите решение этого уравнения, описывающее связанное состояние частицы. Преобразуйте найденную волновую функцию частицы в импульсном представлении в волновую функцию в координатном представлении и удостоверьтесь в правильности ответа.

6.^C (2) Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} (\delta(x+a) + \delta(x-a)),$$

где κ_0 – параметр потенциала. Найдите энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров a и κ_0 ?

Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода H_2 , исследуйте зависимость энергий уровней от a при фиксированном κ_0 .

Покажите, что в случае $\kappa_0 a \gg 1$ связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. Обсудите связь со структурой низколежащих уровней молекулы аммиака NH_3 . В этом же пределе $\kappa_0 a \gg 1$ найдите вероятность нахождения частицы в момент t в правой яме ($x = a$), если при $t = 0$ она находилась в левой яме ($x = -a$).

7.^C (2) Частица массы m движется в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где κ_0 и a – параметры потенциала. Исследуйте, при каких отрицательных и положительных энергиях E частицы такое движение возможно. Покажите, что имеются зоны “разрешенных” и “запрещенных” энергий.

Исследуйте, что происходит с шириной зон в предельных случаях $\kappa_0 a \gg 1$ (сильная связь) и $\kappa_0 a \ll 1$ (слабая связь).

8. (2) Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ -потенциала (см. задачу 4). Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы; нарисуйте графики.

- 9.^C (2) Частица массы m находится в связанном состоянии в δ -потенциале (см. задачу 4). В момент $t = 0$ происходит мгновенное изменение параметра ямы от \varkappa_0 до \varkappa_1 . Найдите вероятность “ионизации”. Обсудите эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $\varkappa_1 = 0$.

ЗАДАНИЕ 2

Упражнения

1. (3) Постройте матрицы операторов углового момента $\hat{j}_x, \hat{j}_y, \hat{j}_z$, а также $\hat{\mathbf{j}}^2, \hat{j}_+$ и \hat{j}_- для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$. Как выглядят собственные векторы операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и \hat{j}_z ?
- 2.^C (1) Воспользовавшись явным видом матриц Паули, докажите справедливость следующих соотношений:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i \epsilon_{klm} \sigma_m,$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \mathbf{b}) + i(\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]),$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – произвольные векторы.

- 3.^C (2) Найдите явный вид оператора $e^{i\alpha(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})}$.
- 4.^C (2) Найдите собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\hat{\sigma}_n = (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n})$, где \mathbf{n} – единичный вектор с составляющими:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Обсудите случаи, когда вектор \mathbf{n} направлен вдоль осей x, y и z .

5. (1) Пусть электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z , равной $1/2$. Найдите вероятность того, что проекция спина этого электрона на направление \mathbf{n} равна $1/2$ (или $-1/2$).
6. (1) Разложите в ряд по степеням λ оператор $\hat{G} = (\hat{A} - \lambda \hat{B})^{-1}$.

ЗАДАЧИ

- 1.^C (2) Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Найти максимальное значение дипольного момента атома $\mathbf{d} = \langle \psi | e \mathbf{r} | \psi \rangle$ и волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$, описывающую состояние с максимальным электрическим дипольным моментом.

- 2.^C (2) Отрицательно заряженный мюон находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда “включается” магнитное поле \mathbf{H} , направленное по оси x , спиновое состояние мюона определяется вектором состояния с положительной проекцией спина на ось z . Определите спиновое состояние мюона $|\chi(t)\rangle$ во все последующие моменты времени в представлении Шредингера. Как выглядит оператор спина мюона $\hat{s}(t)$ в представлении Гайзенберга?

Найдите вектор поляризации спина мюона $\mathbf{P}(t) = 2\langle\chi|\hat{s}|\chi\rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гайзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\mathbf{P}(t)$? Меняется ли во времени длина вектора поляризации $|\mathbf{P}(t)|$?

3. (3) Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц с массами m_1 и m_2 , $U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ зависит только от расстояния между частицами. Запишите стационарное уравнение Шредингера, определяющее волновую функцию состояния этих частиц с определенной энергией E . Покажите, что для решения этого уравнения удобно воспользоваться следующими переменными:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Какой вид принимает при этом волновая функция $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$?

4. (3) Частица массы m движется в трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном и бесконечно высокими стенками:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции s -состояний.

- 5.* (4) Частица массы m движется в мелкой двумерной потенциальной яме с “плоским” дном:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Покажите, что при сколь угодно малом U_0 существует связанное стационарное состояние частицы в этом потенциале. Найдите энергию этого состояния.

Существует ли аналогичное связанное состояние в мелкой трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном? Если “нет”, то каким должно быть U_0 для появления связанного состояния?

6. (3) Получите стационарное уравнение Шредингера для атома водорода в импульсном представлении? Как выглядит решение этого уравнения, отвечающее минимальной энергии (волновая функция основного состояния атома водорода в импульсном представлении)?
- 7.* (6) Частица массы m движется в потенциале трехмерного изотропного осциллятора:

$$U(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

Найдите энергии уровней, кратности их вырождения, а также волновые функции стационарных состояний, разделяя переменные: а) в декартовых координатах, б) в сферических координатах. Обсудите связь задачи с моделью ядерных оболочек и получите первые магические числа: 2, 8, 20.

Определите четности стационарных состояний. Может ли осциллятор, находящийся в состоянии с определенной энергией, обладать отличным от нуля электрическим дипольным моментом?

- 8.^C(2) Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и волновые функции связанных состояний для случаев

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & U(x) = m\omega^2 x^2/2, \\ \text{б)} \quad & U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ m\omega^2 x^2/2, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае а) (одномерный гармонический осциллятор) приведите волновые функции в квазиклассическом приближении к такому виду, чтобы было ясно, что они обладают нужной четностью. Для первых трех состояний постройте графики волновых функций, найденных в квазиклассическом приближении, и сравните их с графиками точных волновых функций.

9. (3) Частица массы m с энергией E “заперта” в области $r < r_0$, где $U(r) = -U_0$, высоким потенциальным барьером:

$$U(r) = 2Ze^2/r, \quad r > r_0; \quad E \ll 2Ze^2/r_0.$$

Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите коэффициент прохождения сквозь барьер.

Обсудите связь этой задачи с элементарной теорией α -распада и получите закон Гейгера–Неттола.

10. (3) Частица совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$; E_n – энергии стационарных состояний. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите изменения δE_n энергий стационарных состояний при малом изменении потенциала $U(x) \rightarrow U(x) + \delta U(x)$.

11.^C(2) Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии линейного гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$a) \hat{V} = \alpha x, \quad б) \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

В случае *a)* вычислите среднее значение координаты в основном состоянии. Объясните полученный результат.

12.^C(2) Определите расщепление уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом $n = 2$ в однородном электрическом поле (эффект Штарка). Найдите правильные волновые функции нулевого приближения и изобразите графически зависимость энергии расщепления от напряженности поля.

13.*(4) В результате β -распада ядра атома трития образуется ион ${}^3\text{He}^+$. Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: *a)* в основном состоянии; *б)* на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей?

Срок сдачи первого задания 22–27 марта 2021 г.

Срок сдачи второго задания 10–15 мая 2021 г.

¹ В скобках указано количество баллов за соответствующие упражнения и задачи.

За первое задание базовый балл равен **46** и дополнительный балл – **10**.

Максимально возможный балл за первое задание равен **56**.

За второе задание базовый балл равен **30** и дополнительный балл – **14**.

Максимально возможный балл за второе задание равен **44**.