Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

МФТИ

СБОРНИК

программ и заданий

Физтех-школа аэрокосмических технологий (ФАКТ)

для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года

МОСКВА
МФТИ
2021

Сборник программ и заданий для студентов 3 курса на весенний семестр 2020–2021 учебного года. Физтех-школа аэрокосмических технологий (ФАКТ). – Москва : МФТИ, 2021. – 44 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы современной физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФАКТ (только 3-86Х)**
кафедра: **общей физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть – 2 зачет. ед.;
физ. практикум: вариативная часть – 2 зачет. ед.;

лекции – 30 часов	Экзамен – 6 семестр
практические (семинарские) занятия – 30 часов	Диф. зачёт – 6 семестр
лабораторные занятия – 30 часов	
ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 90	Самостоятельная работа – теор. курс – 30 часов физ. практикум – 60 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. В.Н. Глазков
д.т.н., проф. А.В. Кубышкин
к.ф.-м.н., доц. К.М. Крымский
к.ф.-м.н., доц. А.О. Раевский
д.ф.-м.н., проф. Ю.В. Петров

Программа принята на заседании кафедры
общей физики 4 декабря 2020 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор А. В. Максимычев

Квантовая макрофизика

1. Кристаллические структуры твердых тел, трансляционная симметрия кристаллов, решетка Бравэ, элементарная и примитивная ячейки, базис. Рентгеновские и нейтронные методы исследования кристаллических структур, дифракция Брэгга–Вульфа, обратная решетка, зона Бриллюэна.
2. Типы связей в кристаллах: кулоновская (ионные кристаллы), ковалентная связь (атомные кристаллы), ван-дер-ваальсовская (молекулярные кристаллы), металлическая (металлы). Энергия отталкивания, потенциал Леннарда–Джонса. Дефекты кристаллической решетки.
3. Гармонические колебания одномерной решетки одинаковых атомов и решетки из чередующихся атомов двух сортов. Адиабатическое приближение. Законы дисперсии, квазиимпульс, акустические и оптические моды колебаний атомов в кристаллах. Переход к нормальным модам. Фононы как квазичастицы, аналогия с фотонами.
4. Возбужденные состояния кристалла. Решеточная теплоемкость. Закон Дюлонга и Пти. Дебаевское приближение для акустической ветви колебаний твердого тела, температура Дебая. Модель Эйнштейна для описания оптических ветвей колебаний твердого тела. Решеточная теплопроводность, процессы переброса.
5. Модель свободных электронов. Характер распределения электронов по энергии при нуле температур, наличие максимальной энергии (энергия Ферми). Энергетическое распределение электронов при ненулевой температуре (распределение Ферми). Химпотенциал, температура вырождения. Плотность электронных состояний при энергии Ферми. Электронная теплоемкость и ее температурная зависимость, соотношение с решеточной теплоемкостью.
6. Физическая причина появления зон разрешенных и запрещенных значений энергии, модели слабой и сильной связи. Теорема Блоха. Расчет закона дисперсии в модели сильной связи. Фотонные кристаллы. Качественное объяснение различия в электропроводности изоляторов, полупроводников и металлов. Понятие о ферми-жидкости, электроны и дырки как квазичастицы.
7. Электропроводность классического газа носителей в модели Друде–Лоренца. Электропроводность металла. Роль длины свободного пробега. Электронная теплопроводность. Качественное различие механизмов релаксации энергии и импульса электронов в процессах тепло- и электропроводности, закон Видемана–Франца. Правило Маттисена для электронов проводимости в металлах. Температурная зависимость сечения рассеяния электронов на фононах и примесях и друг на друге. Закон Блоха–Грюнайзена.

8. Электронные и дырочные возбуждения в полупроводниках, заряд дырок. Эффективная масса носителей заряда. Условие электронейтральности. Собственные и примесные полупроводники, донорные и акцепторные уровни, оценка энергии мелких примесных уровней. Температурная зависимость положения уровня Ферми в полупроводниках.

9. Зависимость концентрации проводящих электронов от температуры. Электропроводность полупроводников. Подвижность носителей. Температурная зависимость времени релаксации электронов. Контактные явления в полупроводниках. Равенство химпотенциалов при равновесии. (p–n)-переход во внешнем электрическом поле. Выпрямляющие свойства (p–n)-перехода.

10. Сверхтекучесть. Квантовые возбуждения в сверхтекучей жидкости, закон дисперсии. Критерий сверхтекучести Ландау. Качественное объяснение отсутствия вязкости в сверхтекучем гелии. Явление сверхпроводимости, отличие сверхпроводника от идеального металла, эффект Мейсснера, лондоновская глубина проникновения. Роль кристаллической решетки в явлении сверхпроводимости, изотоп-эффект, куперовское спаривание. Качественное подобие сверхтекучести и сверхпроводимости как квантовых явлений в системе бозонов.

11. Длина когерентности, нулевой импульс пары, s-спаривание электронов. Связь длины когерентности с величиной сверхпроводящей щели. Величина щели в теории БКШ. Критическое магнитное поле. Критический ток, правило Сильсби. Квантование магнитного потока. Сверхпроводники I и II рода, понятие о вихрях магнитного потока, вихревая решетка, пиннинг. Первое и второе критические поля, оценки их величин. Высокотемпературные сверхпроводники. Области практического использования и перспективы применения сверхпроводимости.

12. Эффект Ааронова–Бома. Низкоразмерные структуры, понятие о квантовых ямах, проволоках и точках. Двухмерный характер движения электронов в структурах металл–окисел–полупроводник (МОП-структура). Квантование Ландау. Эффект Холла в полупроводниках, холловское удельное сопротивление (постоянная Холла). Квантовый эффект Холла, квантовый эталон сопротивления.

13. Магнетизм веществ: диа-, пара- и ферромагнетики. Формула Ланжевена–Бриллюэна для описания намагничивания парамагнетиков. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау. Квантовая природа ферромагнетизма. Модель Гейзенберга для описания обменного взаимодействия, энергия анизотропии. Одноионная анизотропия. Модель Изинга.

14. Теория среднего поля для описания магнитного упорядочения. Закон Кюри–Вейсса. Возбуждения в спиновой системе ферромагнетиков. Классическое и квантовое описание спиновых волн. Закон 3/2 Блоха. Ферромагнетизм электронов проводимости, критерий Стонера.

Литература

Основная литература

1. *Ципенюк Ю.М.* Квантовая микро- и макрофизика. Москва: Физматкнига., 2006.
2. *Морозов А.И.* Элементы современной физики твердого тела. Москва: ИД «Интеллект», 2015.
3. *Петров Ю.В.* Основы физики конденсированного состояния. Москва: ИД «Интеллект», 2013.
4. *Гладун А.Д.* Строение вещества. Ч. II. Москва: МФТИ, 2010.
5. *Иванов А.А.* Введение в квантовую физику систем из многих частиц. Москва: МФТИ, 2007.
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т. 2. Москва: Физматлит, 2007.
7. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 5. Москва: Наука, 1986.
8. *Киттель Ч.* Введение в физику твердого тела. Москва: Наука, 1978.

Дополнительная литература

9. *Мейлихов Е.З.* Электроны и фононы в общей физике твердого тела. Москва: МФТИ, 2005.
10. *Мейлихов Е.З.* Общая физика полупроводников. Москва: МФТИ, 2006.
11. *Мейлихов Е.З.* Общая физика сверхпроводников. Москва: МФТИ, 2003.
12. *Мейлихов Е.З.* Магнетизм. Основы теории. Москва: ИД «Интеллект», 2014.
13. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Кристаллическая решетка. Фононы. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
14. *Морозов А.И.* Физика твердого тела. Электроны в кристалле. Металлы. Полупроводники. Диэлектрики. Магнетики. Сверхпроводники. Москва: МИРЭА, 2010. (сайт кафедры общей физики http://mipt.ru/education/chair/physics/S_6/).
15. *Гольдин Л.Л., Новикова Г.И.* Введение в квантовую физику. Москва: ИД «Интеллект», 2016.
16. *Крылов И.П.* Основы квантовой физики и строение вещества. Москва: МФТИ, 1989.
17. *Петров Ю.В.* Введение в физику твердого тела. Москва: МФТИ, 1999.
18. *Ципенюк Ю.М.* Нулевые колебания. Москва: МФТИ, 2011.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
для студентов 3-го курса ЛФИ, ФАКТ (только г.Жуковский) и ФЭФМ
на весенний семестр 2020-2021 учебного года

№ сем.	Даты	Темы семинарских занятий	Задачи для решения	
			Обязательные	Дополнительные
1	01.02–06.02	Структура и колебания кристаллических решёток.	0-1-1, 0-1-2, 2.1, 2.71, Т.1, Т.2, Т.3, Т.4	Т.Ф1(1) Т.Ф1(2)
2	08.02–13.02	Фононы. Модель Дебая.	0-2-1, 0-2-2, 2.23, 2.31,2.58, 2.61, 2.75, Т.5	Т.Ф2
3	15.02–22.02	Решёточная теплоёмкость и теплопроводность.	0-3-1, 0-3-2, 2.34, 2.40, 2.52, 2.64, 2.65, 2.68	Т.Ф3
4	01.03–06.03	Свободный электронный газ. Энергия Ферми. Теплоёмкость металлов.	0-4-1, 0-4-2, 3.4, 3.17, 3.22, 3.27, 3.44, 3.61	Т.Ф4
5	08.03–13.03	Кинетика электронов в металле.	0-5-1, 0-5-2, 3.65, 3.74, 3.75, 3.88, Т.6, Т.7	Т.Ф5
6	15.03–20.03	Зонный характер спектра электронов в твердых телах; поверхность Ферми.	0-6-1, 0-6-2, 3.1, 3.34, 3.35, 3.43, 3.85, Т.8	Т.Ф6
7	22.03–27.03	Контрольная работа (по семинарским группам)		
8	29.03–04.04	Сдача 1-го задания		
9	05.04–10.04	Полупроводники.	0-9-1, 0-9-2, 4.12, 4.17, 4.43, 4.50, Т.9, Т.10	Т.Ф9
10	12.04–17.04	Сверхпроводники.	0-10-1, 0-10-2, 5.19, 5,21, 5.22, 5.24, 5.27, 5.34	Т.Ф10
11	19.04–24.04	Низкоразмерные системы.	0-11-1, 0-11-2, 3.87, 3.89, 4.16, 4.28, 4.48, Т.11	Т.Ф11

12	26.04–01.05	Магнетизм.	0-12-1, 0-12-2, 6.60(А), 6.148(Г), 6.251(Г), Т.12, Т.13, Т.14	Т.Ф12(1) Т.Ф12(2)
13	27.04–02.05	Контрольная работа (по семинарским группам)		
14	03.05–08.05	Сдача 2-го задания		
15	10.05–15.05	Подготовка вопросов по выбору		
16	17.05–22.05	Зачет в лаборатории		

Примечание:
Номера задач без букв соответствуют разделу «Строение вещества». Номера задач с буквой (А) – разделу «Атомная и ядерная физика», с буквой (Г) – разделу избранных задач ГОС экзаменов Сборника задач по общему курсу физики. Часть 3 / под ред. В.А. Овчинкина. М.: МФТИ. 2009.

Контрольные задачи и вопросы к семинарам (задачи группы 0)

0-1-1. При комнатной температуре ниобий (A = 93) кристаллизуется в ОЦК-решетку с ребром куба a = 3,294 Å. Найти плотность ниобия.
0-1-2. Найти расстояния между плоскостями d_{110} в моноатомной ОЦК- и ГЦК-решетках, если ребро элементарного куба равно a.
0-2-1. Усредненная скорость звука в меди равна s = 3600 м/с. Постоянная ГЦК-решетки меди равна a = 3,61 Å. Найти дебаевскую частоту.
0-2-2. Найти величину щели (в эВ) между акустической и оптической модами колебаний на границе зоны Бриллюэна для одномерной цепочки NaCl с периодом $2a$ = 5,6 Å. Скорость звука $s = 3\cdot10^5$ см/с.
0-3-1. Оценить, какое количество тепла надо подвести к одному молю диэлектрического кристалла, содержащего один атом в элементарной ячейке, чтобы нагреть его от температуры 2θ до $2{,}5\theta$.
0-3-2. Имеется диэлектрический кристалл с температурой Дебая θ = 300 К. Как изменится его решеточная теплопроводность при увеличении температуры от 5 К до 15 К? Считать, что при указанных температурах длина свободного пробега фононов ограничена размерами кристалла.
0-4-1. Определить, какая доля электронов проводимости в металле при T = 0К имеет кинетическую энергию, большую 0,5 E_F.

0-4-2. Оценить относительный вклад электронного газа в общую теплоемкость серебра при комнатной температуре. Температура Дебая у серебра равна θ= 220 К, энергия Ферми E_F = 5,5 эВ.

0-5-1. Как изменится электропроводность чистого металла, если его температура изменилась от 1,5θ до 2θ? Вкладом дефектов кристаллической структуры пренебречь.

0-5-2. При нагревании металла от 0 К до 2 К его сопротивление возросло в 5 раз. Во сколько раз изменится сопротивление этого металла при нагревании от 0 К до 4 К?

0-6-1. Закон дисперсии электронов в двумерной структуре с периодом a имеет вид $E(k_x,k_y)=A(\cos k_xa + \cos k_ya)$. Найти модуль групповой скорости электронов в точке $k_x=\pi/2a$, $k_y=\pi/6a$.

0-6-2. Закон дисперсии электронов в одномерной структуре с периодом a имеет вид $\varepsilon(k_x)=A\cos(k_x a)$. Найти ускорение электрона при $k_x = \pi/6a$ в электрическом поле с напряженностью E. Концентрацию электронов считать малой.

0-9-1. Оценить минимальную энергию, необходимую для образования пары электрон-дырка в чистом кристалле GaAs, если его электропроводность изменяется в 10 раз при изменении температуры от +20 °С до –3°С.

0-9-2. Оценить, при какой концентрации мелких донорных примесей в кремнии образуется примесная зона? Статическая диэлектрическая проницаемость кремния ε =12, эффективная масса равна половине массы свободного электрона.

0-10-1. Оценить величину энергетической щели в свинце, у которого критическая температура равна T_c = 7,2 К.

0-10-2. При каком напряжении начнет течь ток через туннельный переход металл-изолятор-сверхпроводник, если T_c = 9,2 К? Измерение проводится при $T \ll T_c$.

0-11-1. В каком минимальном магнитном поле электроны в МОП-структуре будут полностью заполнять нижний спиновый подуровень Ландау? Поверхностная плотность электронов $n_S=10^{12}$ см$^{-2}$.

0-11-2. При приложении электрического поля перпендикулярно плоскости графена, энергия Ферми электронов оказалось равной E_F = 0,1 эВ. Найти поверхностную плотность электронов в графене, если c^* = 10^8 см/с.

0-12-1. Оценить обменный интеграл (в эВ) в оксиде европия, если спин магнитного иона равен 7/2, число ближайших соседей – 12, температура Кюри – 77 К.

0-12-2. При температуре T_1 намагниченность ферромагнетика отличается от намагниченности насыщения на 1%, а при температуре T_2 – на 8%. Найти отношение температур T_2/T_1.

Текстовые задачи (задачи группы 1)

Т.1. Кристаллическая решетка окиси марганца MnO является кубической гранецентрированной (типа NaCl). При низких температурах это соединение является антиферромагнетиком: соседние ферромагнитно упорядоченные плоскости (111) ионов магния имеют противоположные направления локального магнитного момента. При дифракции нейтронов с длиной волны $\lambda = 1,204$ Å на порошкообразном MnO на угол $\alpha = 13^{\circ}$ наблюдается пик магнитного рассеяния первого порядка. Найти величину ребра элементарного куба.

Ответ: $a = \dfrac{\sqrt{3}\lambda}{4\sin(\alpha/2)}$ = 4,5 Å.

Т.2. Дана двухатомная цепочка равноотстоящих атомов с отношением масс 2:3. В ней возбуждено такое колебание, что на оптической ветви отношение модулей смещения легкого и тяжелого атомов равно 2. Чему равна (в единицах периода цепочки) максимальная длина волны такого колебания. Учитывать взаимодействие только между ближайшими соседями.

Ответ: $\lambda_{\max} = \pi d / \arccos(0.4) \approx 2,7d$.

Т.3. Так называемый α-карбин представляет собой одномерную цепочку из атомов углерода с чередующимися одинарной и тройной химическими связями $-\mathrm{C}\equiv\mathrm{C}-\mathrm{C}\equiv\mathrm{C}-$, а β-карбин – цепочку, в которой атомы углерода связаны двойной химической связью $=\mathrm{C}=\mathrm{C}=\mathrm{C}=\mathrm{C}=$. Считая, что жесткость γ химической связи определяется ее кратностью, определить отношение продольных скоростей звука в α- и β-модификациях карбина. Среднее расстояние между атомами, соединенными одинарной и тройной связями в α -карбине, считать равными $d_{\alpha}^{(1)} = 0{,}137$ нм и $d_{\alpha}^{(3)} = 0{,}125$ нм соответственно, а среднее расстояние между атомами, соединенными двойной связью в β -карбине, равным $d_{\beta}^{(2)} = 0{,}128$ нм.

Ответ: $\dfrac{s_{\alpha}}{s_{\beta}} = \dfrac{d_{\alpha}^{(1)} + d_{\alpha}^{(3)}}{2d_{\beta}^{(2)}}\sqrt{\dfrac{2\gamma_1\gamma_3}{\gamma_2(\gamma_1+\gamma_3)}} = \dfrac{131}{128}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,89$.

Т.4. В приближении «ближайших соседей» закон дисперсии фононов $\omega(k)$ в зоне Бриллюэна является монотонно возрастающей функцией. При учете взаимодействия с соседями, следующими за ближайшими, это уже не всегда так. Например, в свинце, в направлении [100] (вдоль ребра элементарного куба), частота фононов достигает максимума при

$k_0 = 0{,}8k_{\text{Брил}}$, где $k_{\text{Брил}}$ – волновое число, соответствующее границе зоны Бриллюэна в этом направлении. Скорость продольного звука в этом направлении составляет $s = 2{,}2 \cdot 10^5$ см/с. Используя модель одномерной цепочки, найти силовые постоянные для первых и вторых соседей. Свинец кристаллизуется в ГЦК-решетку с периодом $d = 4{,}95$ Å. Период одномерной цепочки – это расстояние между соседними параллельными плоскостями, перпендикулярными направлению [100].

Ответ: $\beta_1 = -4\beta_2 \cos\left(\pi \dfrac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right) = 12{,}1 \cdot 10^3$ дн/см,

$$\beta_2 = \frac{M_{\text{Pb}} s^2}{d^2\left(1 - \cos \pi \dfrac{k_0}{k_{\text{Брил}}}\right)} = 3{,}78 \cdot 10^3 \text{ дн/см.}$$

Т.5. Вероятность эффекта Мессбауэра – испускания γ-квантов возбужденным ядром без изменения состояния решетки (рождения фононов) – равна $w = \exp(-2L)$ (т.н. фактор Лэмба–Месссбауэра). Здесь $L = \langle(\vec{k}\vec{u})^2\rangle/2$, $\vec{k}$ – волновой вектор γ-кванта, $\vec{u}$ – вектор смещения атома решетки, угловые скобки обозначают усреднение по направлениями векторов и по спектру колебаний решетки. Найти в дебаевском приближении максимально возможную вероятность эффекта Мессбауэра для кристалла иридия-193 (решетка ОЦК), если энергия перехода в ядре иридия $E_\gamma = 129$ кэВ, дебаевская температура $\Theta = 430$ К.

Ответ: $w = \exp\left(-\dfrac{3}{4}\dfrac{E_\gamma^2}{M_{\text{Ir}} c^2 k_{\text{B}} \Theta}\right) = 0{,}154$

Т.6. В гелиевую ванну (T = 4,2 К) помещен намотанный медным проводом соленоид диаметром D = 10 мм с числом витков N = 200. Какая мощность будет выделяться при пропускании через соленоид тока I = 100 мА? Измерение сопротивления единицы длины этого провода показали, что при температуре T_1 = 1 К оно равно $R_1 = 2 \cdot 10^{-6}$ Ом/см, а при T_2 = 2 К – R_2 =
= $3{,}3 \cdot 10^{-5}$ Ом/см. Считать, что для меди выполняется закон Блоха–Грюнайзена.

Ответ: 8,3 мВт.

Т.7. Чистый образец из золота имеет при температуре T = 295 К удельное сопротивление $\rho = 2,2 \cdot 10^{-6}$ ·Ом$^{-1}$·см$^{-1}$. Золото кристаллизуется в ГЦК-решетке с периодом a = 4,1 Å. Дебаевская температура золота $\theta = 197$К. Оценить по этим данным среднее (эффективное) сечение рассеяния электронов на фононах.

$$\textit{Ответ}:\ \bar{\sigma} = \frac{2}{9(12\pi^2)^{1/3}} \frac{e^2 \rho a}{\hbar} \frac{\theta}{T} = 6,6 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2.$$

Т.8. Найти при $T \approx 0$ К максимальный импульс электрона в проводнике с анизотропным законом дисперсии:

$$\varepsilon = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m_\perp^*} + \frac{p_z^2}{2m_\parallel^*}, \qquad \frac{m_\parallel^*}{m_\perp^*} = 8 .$$

Концентрация электронов n = 10^{18} см$^{-3}$.

$$\textit{Ответ}:\ p_{\text{макс}} = \hbar \left(3\pi^2 n \frac{m_\parallel^*}{m_\perp^*} \right)^{1/3} = 6,5 \cdot 10^{-21} \text{ г·см/с}.$$

Т.9. При легировании кремния донорами с концентрацией $N_d = 10^{16}$ см$^{-3}$, оказалось, что ток дырок при температуре T = 600 К уменьшился в $\gamma = 3$ раза по сравнению со случаем нелегированного образца. Найти долю ионизованных примесей при данной температуре, если эффективные массы электронов и дырок равны $m_n^* = 1,08 m_0$ и $m_p^* = 0,56 m_0$, ширина запрещенной зоны при данной температуре равна $E_g = 1,05$ эВ. Подвижность дырок считать постоянной.

$$\textit{Ответ}:\ \alpha = \frac{n_i}{N_d} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = 0,51,$$

где

$$n_i = 2,51 \cdot 10^{19} \left(\frac{m_n^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{m_p^*}{m_0} \right)^{3/4} \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_\text{B} T} \right) = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3} .$$

Т.10. В ионных кристаллах при конечных температурах возникают дефекты Шоттки – пустые места в узле кристаллической решетки (вакансии). При этом ионы из узлов решетки уходят из объема кристалла на его поверхность. В силу электронейтральности в чистом без примесей кристалле вакансии положительных и отрицательных ионов возникают парами (аналогично электронам и дыркам в полупроводнике). Минимальная энергия образования пары вакансий (т.е. работа по удалению пары ионов) в кристалле NaCl составляет $E_{\text{Sch}} = 2$ эВ. Найти температуре t = 330 °С равновесные концентраций вакансий при в природном NaCl содержащем примесь CdCl_2 с концентрацией ионов кадмия $n_{\text{Cd}^{++}} = 10^{14}$ см$^{-3}$. Ионы кадмия замещают ионы натрия в узлах кристаллической решетки. Концентрация узлов в подрешетках ионов обоих знаков в NaCl равна $n_0 = 2{,}2 \cdot 10^{22}$ см$^{-3}$.

Ответ: $$n_{\text{Na}^+} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} + n_{\text{Cd}^{++}}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} n_i = 1{,}62 \cdot 10^{14}\ \text{см}^{-3},$$

$$n_{\text{Cl}^-} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4n_i^2 + n_{\text{Cd}^{++}}^2} - n_{\text{Cd}^{++}}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} n_i = 0{,}62 \cdot 10^{14}\ \text{см}^{-3},$$

где

$$n_i = n_0 \exp(-E_{\text{Sch}} / 2k_{\text{Б}}T) \cong 10^{14}\ \text{см}^{-3}.$$

Т.11. Найти отношение электронной и решеточной теплоемкостей графена при низких температурах. Графен можно считать двумерным бесщелевым полупроводником с линейным законом дисперсии носителей тока $E(\vec{k}) = \pm\hbar c^* k$, где $\vec{k}$ – двумерный волновой вектор, $k = \left|\vec{k}\right|$, c^* = 10^8 см/с, знак «+» соответствует зоне проводимости, знак «–» – валентной зоне. В зоне Бриллюэна графена имеется два эквивалентных минимума закона дисперсии (две долины). Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене s = $1{,}5 \cdot 10^6$ см/с. Наличием изгибных колебаний пренебречь.

Указание: Воспользоваться соотношением $\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x+1}dx = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\int\limits_0^\infty \frac{x^n}{e^x-1}dx$;

Ответ: $$\frac{C_s}{C_{ph}} = 3\left(\frac{s}{c^*}\right)^2 = 6,75 \cdot 10^{-4}.$$

Т.12. Под действием однородного переменного магнитного поля в тонких ферромагнитных пленках могут возбуждаться спиновые волны. Когда на толщине пленки укладывается нечетное число полуволн n, возникает стоячая волна колебаний намагниченности (спин-волновой резонанс). Так в пермаллоевой пленке толщиной $L = 2000$ Å на частоте f = 9 ГГц наблюдается резонанс с n = 7.

(а) Чему равна эффективная масса (в единицах массы свободного электрона) этих квазичастичных возбуждений?

(б) Считая, что пленка сделана из чистого железа и используя результат (а), найти относительное изменение намагниченности пленки при нагреве ее от T = 0 К до T = 300 К. Спин иона железа считать равным S = 5/2, размер элементарного куба ОЦК-решетки a = 2,87 Å.
Указания: Закон дисперсии спиновых волн считать квадратичным;
$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx = 4\pi^2 \cdot 0,0587$.

$$\textit{Ответ:}\ \text{(а)}\ m^* = \frac{\pi\hbar n^2}{4fL^2} \approx 1,13\cdot 10^{-26}\ \text{г, или}\ m^* \approx 12,4 m_e .$$

$$\text{(б)}\ \frac{\Delta M}{M(0)} = 0.0587\left(\frac{2m^* k_B T}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{a^3}{2S} \approx 0,7\,\% .$$

Т.13. Магнитная восприимчивость жидкого ^{3}He выше температуры 1 К ведет себя точно по закону Кюри, т.е. $\chi \propto 1/T$. Вычислить величину восприимчивости ^{3}He при температуре T = 2 К. Плотность ^{3}He при данной температуре равна ρ = 0,07 г/см^3.

$$\textit{Ответ:}\ \chi = \frac{J(J+1) g_{sn}^2 \mu_{\text{яБ}}^2}{3k_B T} \frac{\rho}{\mu} N_A = 4,735\cdot 10^{-9} .$$

Т.14. Гетероструктура AlGaN/GaN, охлажденная до температуры T = 4 К, помещена в магнитное поле B = 4 Тл. Оценить теплоемкость единицы поверхности двумерного электронного газа, если при T = 0 К полностью заполнен только один подуровень Ландау. Эффективная масса электронов равна m^* = 0,16m_0, где m_0 – масса свободного электрона.

$$\textit{Ответ:}\ C \approx 2n_S k_B \left(\frac{\mu_Б B}{k_B T}\right)^2 \frac{\exp\frac{\mu_Б B}{k_B T}}{\left(\exp\frac{\mu_Б B}{k_B T} + 1\right)^2} = 2,7\cdot 10^{-6}\ \text{эрг/(К·см}^2\text{)},$$

где $n_S = B/\Phi_0 = eB/hc$.

Задачи повышенной сложности (задачи группы 2)

Т.Ф1(1). Для базоцентрированной ромбической решётки с параметрами решётки *a, b=2a, c* построить обратную решётку, выделить первую зону

Бриллюэна, найти объём первой зоны Бриллюэна и сравнить с объёмом элементарной ячейки исходной ромбической решётки.

Ответ: $V_{\text{зБ}} = \dfrac{(2\pi)^3}{a^2 c}$.

Т.Ф1(2). При изучении структуры кристаллов широко используется метод Дебая–Шерера: на порошковый образец, состоящий из маленьких случайно ориентированных кристаллов, падает монохроматическое рентгеновское излучение. Наблюдаемая на расположенном за образцом перпендикулярно к падающему лучу плоском детекторе картина дифракции состоит из семейства концентрических окружностей. Определить радиусы первой из этих окружностей для кристаллов с простой кубической и ГЦК решётками. В обоих случаях ребро кубической элементарной ячейки a=3.14А, длина волны падающего излучения λ = 0.7А (K-α линия молибдена), расстояние до детектора L=10 см.

Ответ: для кубической решетки: $R \approx L\dfrac{\lambda}{a}$ = 2.2 см ,

для ГЦК решетки $R \approx \sqrt{3}L\dfrac{\lambda}{a}$ = 3.8 см .

Т.Ф2. В свободном (подвешенном) графене существует длинноволновая изгибная мода колебаний с законом дисперсии $\omega = \alpha k^2$, где $\alpha = 5\times10^{-3}$ см^2/с, а k – двумерный волновой вектор. Оценить в рамках низкотемпературного приближения при какой температуре вклад в теплоемкость от изгибной моды сравняется с вкладом звуковых ветвей. Усредненная по двум поляризациям (продольной и поперечной) скорость звука в графене равна $\bar{s}$ =16,2 км/с .

Указание: $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^2 dx}{e^x - 1} \cong 2.40$, $\int\limits_0^\infty \dfrac{x dx}{e^x - 1} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Ответ: $T_* = \dfrac{\pi^2}{86{,}4}\dfrac{\hbar \bar{s}^2}{\alpha\kappa} \cong 458\text{К}.$

Т.Ф3.Искусственный алмаз, выращенный из изотопически чистого углерода ^{12}C, обладает при комнатной температуре теплопроводностью κ = 25 Вт/(см·К). Теплопроводность же алмаза, выращенного из естественной смеси изотопов (с 1%-ым содержанием изотопа ^{13}C), на 1% меньше. Оценить длину свободного пробега фононов, обусловленную рассеянием на дефектах, роль которых играют атомы ^{13}C. Температура Дебая алмаза Θ

= 2250 К, скорость звука s = 17,5 км/с, ребро элементарного куба решетки алмаза, содержащего 8 атомов, равно a =3,57 Å.

Ответ: $\lambda = \dfrac{15 \kappa a^3}{48\pi^4 k_Б s}\left(\dfrac{\Theta}{T}\right)^3 \approx 7\cdot 10^{-5}$ см.

Т.Ф4. При облучении золотого фотокатода ультрафиолетовым излучением с энергией кванта 16.9 эВ образуются фотоэлектроны с энергиями от $\varepsilon_1 = 7.1$ эВ до $\varepsilon_2 = 11.6$ эВ. Считая спектр электронов проводимости в золоте изотропным и квадратичным, оценить величину эффективной массы электронов. Золото кристаллизуется к ГЦК-решетку с ребром элементарного куба $a = 4{,}08$ Å.

Ответ: $\dfrac{m^*}{m_0} = \dfrac{\hbar^2 (12\pi^2)^{2/3}}{2m_0 a^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$ =1,21

Т.Ф5. Медный стержень прикреплён одним концом к криостату, поддерживающему температуру T_1 = 400 мК, а другой его конец нагрет до температуры T_2 = 2К. Чему равна температура в точке посередине стержня (на равном удалении от концов). Стержень находится в глубоком вакууме, радиационный теплообмен не учитывать.

Ответ: $T_{ср} = \sqrt{\dfrac{T_2^2 + T_1^2}{2}} \cong 1{,}44$ К$\cdot$

Т.Ф6. Атомы лития образуют одномерную цепочку так, что возникает перекрытие волновых функций электронов и уровни $1s$ и $2s$ отдельного атома расщепляются в зоны. Законы дисперсии электронов в первой и второй зонах: $E_1(k) = -7E_0 - E_0 \cos ka$ и $E_2(k) = -3E_0 + 2E_0 \cos ka$, где энергия отсчитывается от уровня энергии покоящегося электрона в вакууме, $E_0 = 2$ эВ, межатомное расстояние a=3Å. Найти электронный вклад в теплоёмкость единицы длины такой цепочки при T=10 К.

Ответ: $c_L = C(T)/L = \pi\kappa^2 T/(3E_0 a)$ = $2{,}1\cdot 10^{-12}$ эрг/(см К).

Т.Ф9. Найти концентрацию носителей тока при температуре $T = 4{,}2$ К в двухслойном (верхний слой повернут на 60° относительно нижнего, как в графите) идеальном графене, который является бесщелевым полупроводником. У двухслойного графена в зоне Бриллюэна находится два эквивалентных минимума (долины) закона дисперсии, вблизи которых $E(\vec{k}) = \pm\hbar^2 k^2 / 2m^*$. Верхний знак соответствует зоне проводимости, нижний – валентной зоны; эффективная масса носителей $m^* = 0{,}054m_0$. Во сколько раз изменится концентрация, если увеличить температуру вдвое?

Ответ: $n_S = \dfrac{2\ln 2}{\pi}\dfrac{m^*\kappa T}{\hbar^2} = 1{,}14\cdot 10^{10}$ см$^{-2}$.

Т.Ф10. Ниобий является сверхпроводником второго рода, у которого при абсолютном нуле глубина проникновения и длина когерентности практически совпадают. Считая, спектр электронов в ниобии является изотропным квадратичным, что найти концентрацию и эффективную массу электронов в ниобии. Удельная электронная теплоемкость ниобия в нормальном состоянии описывается законом $C(T)/T = \gamma = 7{,}18\cdot 10^3$ эрг/(см^3 К^2). Величина энергетической щели в ниобии при абсолютном нуле $\Delta = 1{,}4$ мэВ.

Указание. Для упрощения вычислений, можно считать, что $(3\pi^2)^{1/3} \cong \pi$.

Ответ: $n \cong 1{,}7\cdot 10^{23}$ см$^{-3}$, $m^* = 75\cdot 10^{-28}$ г или 8,24 m_0.

Т.Ф.11. В объемном образце полуметалла имеется перекрытие зоны проводимости и валентной зоны. Из этого образца изготовлены различные тонкие пленки. Оказалось, что пленки с толщиной меньшей d = 300 Å не обладают проводящими свойствами, а с большей - обладают. Найти величину перекрытия. Эффективные массы электронов и дырок равны соответственно $m_e^* = 0{,}04m_0$ и $m_h^* = 0{,}02m_0$. Считать, что электроны и дырки не могут выйти за границы пленки. Принять, что $T \cong 0$ К.

Ответ: $\Delta = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m_0 d^2}\left(\dfrac{m_0}{m_h^*} + \dfrac{m_0}{m_e^*}\right) = 0{,}3$ эВ.

Т.Ф12(1). При измерении низкотемпературной теплоёмкости парамагнитной соли с магнитными ионами Ni^{2+} (S=1) в магнитном поле B = 4 Тл наблюдается характерный пик теплоёмкости (аномалия Шоттки). Считая магнетизм чисто спиновым, определить при какой температуре наблюдается максимум теплоёмкости. Оценить, во сколько раз теплоёмкость в максимуме превышает решёточную (для оценки использовать характерные значения для диэлектрических кристаллов).

Указание: функция $y = x^2(4+2\mathrm{ch}\, x)/(1+2\mathrm{ch}\, x)^2$ имеет максимум при $x \approx 1.881$ равный $y_{\max} \approx 0.63$

Ответ: $T_{\max} = \dfrac{g\mu_{\text{B}}B}{1{,}881k_Б} = 2{,}86$ К, $C(T_{\max}) = 0{,}637\, k_Б$.

Т.Ф12(2). Определить относительное изменение частоты света при рассеянии на 90° с испусканием магнона в ферромагнитном диэлектрике с простой кубической решёткой. Величина обменного интеграла $|J|$=100 К, спин магнитного иона $S = 5/2$, взаимодействуют только ближайшие соседи, длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм, показатель преломления среды $n = 1.3$. Спектр спиновых волн в указанном материале $\omega = (2|J|S/\hbar)(3-\cos(K_x a)-\cos(K_y a)-\cos(K_z a))$.

Ответ: $\dfrac{\delta\omega}{\omega} \approx \dfrac{4\pi|J|Sa^2n^2}{\hbar c\lambda} = 5{,}2\cdot 10^{-7}$

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Методы оптимизации**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 3 зачет. ед.;
лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 45 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
ассистент М. А. Демьянов

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Основные понятия теории оптимизации**
   Определения допустимого множества и целевой функции. Ограничения включения, ограничения неравенства, ограничения равенства. Глобальное и локальное решения задач оптимизации. Классические примеры оптимизационных задач: задача Федоры, задача Ферма, задача о брахистохроне, задача о минимальной площади боковой поверхности тела вращения, задача о геодезических. Элементарные задачи оптимизации: конечномерная задача, задача линейного программирования, бесконечномерная задача (задача Больца), задача оптимального управления.

2. **Принцип Лагранжа**
   Функция Лагранжа. Геометрическая интерпретация метода множителей Лагранжа. Случай вырождения градиента в точке экстремума. Пример различия точек экстремума у задачи с ограничениями и ее функции Лагранжа. Теорема Каруша–Джона. Теорема Эйлера–Лагранжа. Принцип максимума Понтрягина. Реакция целевой функции на малое изменение параметров задачи, связь с множителями Лагранжа.

3. **Численные методы оптимизации**
   Задача выпуклого программирования. Теорема Куна–Таккера, условие Слейтера. Ляпуновская задача. Теорема Куна–Таккера для ляпуновской задачи.

4. **Теория двойственности**
   Понятие двойственной задачи оптимизации. Свойства двойственной задачи оптимизации, связь с выпуклыми задачами оптимизации. Критерий равенства решений прямой и двойственной задач оптимизации.

5. **Метод Ритца**
   Энергетический Функционал, задание скалярного произведения в функциональном пространстве. Критерий энергетичности функционала. Теорема Риса. Система Ритца, обусловленность, регуляризация.

Литература

Основная

1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. — Москва : Наука, 1979.
2. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — Москва : Физматлит, 2004.
3. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Теория. Примеры. Задачи. — Москва : УРСС, 2000.
4. *Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: учебное пособие. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2005.
5. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации: учебное пособие. — 2-е изд. — Москва : Физматлит, 2005.

ЗАДАНИЯ

Номера указаны по [4] из списка литературы.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 19–24 апреля)

I. Конечномерные задачи

2.1; 2.2; 2.16; 2.20; 2.26; 2.31; 2.32.

Т.1. В пространстве $C[0,1]$ найти наилучшее приближение элемента $x_0 = \sin(t)$ системой:

а) $\{1\}$; б) $\{1, t\}$; в) $\left\{1, t, t^2\right\}$.

II. Классическое вариационное исчисление

5.1; 5.5; 5.23; 5.92.

III. Изопериметрические задачи

6.6; 6.15.

IV. Задачи со старшими производными

7.6; 7.16; 7.19.

V. Задача Лагранжа

8.11; 8.17.

VI. Выпуклые задачи

4.2; 4.5; 4.9; 4.15.

VII. Ляпуновские задачи

9.5; 9.6; 9.12.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент С. Д. Животов
ассистент М. А. Демьянов

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: вариативная часть — 4 зачет. ед.;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 75 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Метод разделения переменных**

   Метод разделения переменных для решения смешанной задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

   Метод Фурье (разделения переменных) решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

   Метод разделения переменных для решения смешанной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краям. Функции Бесселя.

   Метод разделения переменных для решения трехмерной задачи Дирихле в шаре, вне шара, внутри шарового слоя. Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра. Сферические и шаровые функции.

2. **Интегральные уравнения**

   Интегральное уравнение Абеля.

   Уравнение Вольтерра.

   Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Итерации ядер. Ряд Неймана. Резольвента.

   Уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.

   Аппроксимация невырожденного ядра вырожденным.

   Теоремы Фредгольма для непрерывного ядра.

   Интегральное уравнение с симметричным ядром. Основные теоремы. Характеристические числа и собственные функции.

   Задача Штурма–Лиувилля на отрезке. Функция Грина оператора Штурма–Лиувилля. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.

3. **Потенциалы**

   Ньютонов потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя. Непрерывность в $\mathbb{R}^3$. Разрыв нормальной производной при переходе через поверхность. Потенциал двойного слоя. Скачок потенциала при переходе через поверхность. Представление достаточно гладкой функции в виде суммы потенциалов трех типов. Сведение задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям второго рода на границе области. Логарифмические потенциалы. Основные свойства.

Литература

Основная

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 1971.
3. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
4. *Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.

5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
6. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.

<u>*Дополнительная*</u>

7. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — Москва : Высшая школа, 1976.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва : Мир, 1964.
9. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1966.
10. *Трикоми Ф.* Лекции об уравнениях в частных производных. — Москва : ИИЛ, 1957.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — Москва : ИИЛ, 1960.
12. *Николаев В. С.* Лекции по теории специальных функций. — Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., стереотип. — Москва : Физматлит, 2004.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

20.3(1); <u>20.14(4)</u>; <u>20.16(5)</u>; 20.45(2,3); 20.46(3); <u>20.47(1)</u>.

1. Решите смешанную задачу:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,\\
&u|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=\pi} = \cos t, \quad t \geq 0,\\
&u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned}$$

<u>20.19</u>; 20.48.
<u>20.20(2)</u>; <u>20.25</u>; 20.29(2); 20.52(1,2).

2. Найдите функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую при $r < 2$ уравнению Пуассона $\Delta u = xyz$ и равную нулю при $r = 2$.
<u>16.13(2)</u>; 16.15(1,2); 16.17(5); <u>16.20(2)</u>; 16.21(4); <u>16.25(1)</u>.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

5.11(2); 5.12(3); 5.13; 5.14(2); 5.15(3); 5.18(2,3); 5.19; 5.21; 5.25(1); 5.26(1); 5.28(1,2,3); 5.36(2).

1. Пусть $u(x,t)$ решение задачи:

$$\begin{aligned}&u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0,\\ &u|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad u_{x|_{x=0}} = -q(t), \quad t \geq 0,\end{aligned}$$

где $q(t)$ — неизвестная функция. Считая известной $u(0,t) = T(t)$, $T(0) = 0$, определить $q(t)$. Рассмотреть случай $T'(t) = \mathrm{const}$.

15.1(1,3); 15.4(1); 15.13; 15.17(1).

18.6(2); 18.7(1,2); 18.10(2); 18.16; 18.19(1); 18.20; 18.21(1); 18.23(1); 18.24(1).

2. С помощью логарифмического потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга радиуса R.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов

к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Уравнения математической физики**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость:
теор. курс: базовая часть — 5 зачет. ед..;
лекции — 45 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 6 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 75

Самостоятельная работа:
теор. курс — 120 часов

Программу и задание составили:
к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 19 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. **Метод разделения переменных**

   Метод разделения переменных для решения смешанной задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

   Метод Фурье (разделения переменных) решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.

   Метод разделения переменных для решения смешанной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краям. Функции Бесселя.

   Метод разделения переменных для решения трехмерной задачи Дирихле в шаре, вне шара, внутри шарового слоя. Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра. Сферические и шаровые функции.

2. **Интегральные уравнения**

   Интегральное уравнение Абеля.

   Уравнение Вольтерра.

   Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Метод последовательных приближений. Итерации ядер. Ряд Неймана. Резольвента.

   Уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.

   Аппроксимация невырожденного ядра вырожденным.

   Теоремы Фредгольма для непрерывного ядра.

   Интегральное уравнение с симметричным ядром. Основные теоремы. Характеристические числа и собственные функции.

   Задача Штурма–Лиувилля на отрезке. Функция Грина оператора Штурма–Лиувилля. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.

3. **Потенциалы**

   Ньютонов потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя. Непрерывность в $\mathbb{R}^3$. Разрыв нормальной производной при переходе через поверхность. Потенциал двойного слоя. Скачок потенциала при переходе через поверхность. Представление достаточно гладкой функции в виде суммы потенциалов трех типов. Сведение задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к интегральным уравнениям второго рода на границе области. Логарифмические потенциалы. Основные свойства.

Литература

<u>*Основная*</u>

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — 5-е изд. — Москва : Наука, 1988.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — Москва : Физматлит, 1971.
3. *Михайлов В. П.* Лекции по уравнениям математической физики. — Москва : Физматлит, 2001.
4. *Михайлов В. П., Михайлова Т. В., Шабунин М. И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. — Москва : МФТИ, 2007.

5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — Москва : Изд-во МГУ, 2004.
6. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики. — Москва : ИФ Яуза, 1998.

Дополнительная

7. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. — Москва : Высшая школа, 1976.
8. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — Москва : Мир, 1964.
9. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — Москва : Наука, 1966.
10. *Трикоми Ф.* Лекции об уравнениях в частных производных. — Москва : ИИЛ, 1957.
11. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения. — Москва : ИИЛ, 1960.
12. *Николаев В. С.* Лекции по теории специальных функций. — Москва : МФТИ, 2012.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге *Владимиров В. С., Вашарин А. А., Каримова Х. Х., Михайлов В. П., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., стереотип. — Москва : Физматлит, 2004.

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 15–20 марта)

20.3(1); <u>20.14(4)</u>; <u>20.16(5)</u>; 20.45(2,3); 20.46(3); <u>20.47(1)</u>.

1. Решите смешанную задачу:

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,\\
&u|_{x=0} = \sin t, \quad u|_{x=\pi} = \cos t, \quad t \geq 0,\\
&u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned}$$

<u>20.19</u>; 20.48.
<u>20.20(2)</u>; <u>20.25</u>; 20.29(2); 20.52(1,2).

2. Найдите функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую при $r < 2$ уравнению Пуассона $\Delta u = xyz$ и равную нулю при $r = 2$.
<u>16.13(2)</u>; 16.15(1,2); 16.17(5); <u>16.20(2)</u>; 16.21(4); <u>16.25(1)</u>.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 3–8 мая)

5.11(2); 5.12(3); 5.13; 5.14(2); 5.15(3); 5.18(2,3); 5.19; 5.21; 5.25(1); 5.26(1); 5.28(1,2,3); 5.36(2).

1. Пусть $u(x,t)$ решение задачи:

$$\begin{array}{l} u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0, \quad u_{x|_{x=0}} = -q(t), \quad t \geq 0, \end{array}$$

где $q(t)$ — неизвестная функция. Считая известной $u(0,t) = T(t)$, $T(0) = 0$, определить $q(t)$. Рассмотреть случай $T'(t) = \text{const}$.

15.1(1,3); 15.4(1); 15.13; 15.17(1).

18.6(2); 18.7(1,2); 18.10(2); 18.16; 18.19(1); 18.20; 18.21(1); 18.23(1); 18.24(1).

2. С помощью логарифмического потенциала двойного слоя решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга радиуса R.

Задания составили: к. ф.-м. н., доцент Л. П. Купцов
к. ф.-м. н., доцент А. И. Беспорточный

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Вычислительная математика**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФАКТ**
кафедра: **вычислительной физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоёмкость: базовая часть – 3 зачет. ед.

лекции – 30 часов	Экзамен – нет
практические (семинарские) занятия – нет	
лабораторные занятия – 30 часов	Диф. зачёт – 6 семестр

ВСЕГО ЧАСОВ – 60 Самостоятельная работа – 75 часов

Программу и задания составил
д.ф.-м.н., проф. чл.- корр. РАН И. В. Егоров

Программа принята на заседании кафедры
вычислительной физики
24 ноября 2020 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН И. Б. Петров

VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ). Задача Коши (расчёты химических реакций, электрических цепей).*[1]

Понятия о жёстких уравнениях и системах ОДУ. *A*-устойчивые схемы. Функции и области устойчивости наиболее употребительных разностных схем.

VIII. ОДУ. Краевые задачи (стационарные задачи диффузии вещества, теплопроводности).

Численные методы решения краевых задач:

1) метод численного построения общего решения;
2) метод прогонки;
3) метод стрельбы;
4) метод квазилинеаризации;
5) вариационные методы:
   а) Ритца;
   б) Галёркина;
   в) интегро-интерполяционный.

IX. Задачи на собственные значения (проблема устойчивости конструкций и оболочек).

Численные методы решения задачи Штурма–Лиувилля.

X. Разностные схемы для уравнений с частными производными (задачи переноса излучения, динамики разреженного газа).

Аппроксимация. Устойчивость. Сходимость. Методы построения аппроксимирующих разностных схем. Спектральный признак устойчивости разностной задачи Коши. Принцип замороженных коэффициентов.

XI. Уравнения и системы уравнений с частными производными гиперболического типа (задачи акустики, газодинамики, механики сплошных сред).

Характеристические свойства уравнений. Численные методы решения уравнений переноса, волнового уравнения и систем уравнений *акустики, *газодинамики. Корректная постановка начальных и краевых условий.

[1] Знаком * помечены пункты вариативной части программы.

XII. Численные методы решения эллиптических уравнений с частными производными (потенциальное течение жидкости, квазистационарные электромагнитные поля).

Метод установления для численного решения стационарных уравнений. *Конечные ряды Фурье. Условия сходимости. *Чебышевский набор итерационных параметров. *Попеременно-треугольный метод. *Метод конечных элементов.

XIII. Многомерные уравнения с частными производными параболического типа (задачи теплопроводности, диффузии вещества в механике сплошных сред и физике плазмы).

Линейные и квазилинейные уравнения. Явные и неявные разностные схемы, особенности их алгоритмической реализации. Экономичные методы. Метод дробных шагов.

Литература

(*Основная*)

1.*Упражнения и задачи контрольных работ по вычислительной математике. Ч. II / под ред. В.В. Демченко – Изд. 2-е перераб. и доп. – Москва : МФТИ, 2019.

2.** *Демченко В.В.* Вычислительный практикум по прикладной математике. – Москва : МФТИ, 2007. – 196 с.

3.*** Сборник задач для упражнений по курсу вычислительной математики / под ред. В.С. Рябенького. – Москва : МФТИ, 1996.

4. *Рябенький В.С.* Введение в вычислительную математику. – Москва : Наука–Физматлит, 1994. — 335 с.; 3-е изд. — М.: Физматлит, 2008. – 288 с. (Физтеховский учебник).

5. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. – Москва : Наука, 1977. – 400 с.

6. *Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З.* Численные методы анализа. — Москва : Физматгиз., 1963. – 400 с.

7. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жёсткие и дифференциально-алгебраические задачи. – Москва : Мир, 1999. – 685 с.

(*Дополнительная*)

1. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – Москва : Наука, 1977. – 656 с.

2. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – Москва : Наука, 1980. – 608 с.

3. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. – Москва : Наука–Физматлит, 1978. – 592 с.

4. *Демченко В.В.* Уравнения и системы уравнений с частными производными первого порядка. – 2 изд. – Москва : МФТИ, 2004. – 116 с.

1-я контрольная работа — первая половина марта

ЗАДАНИЕ 1 (срок сдачи — вторая декада марта)

По1*:**7.1.1.;7.1.2.;7.1.11.;7.1.13.;7.1.19.;7.2.1.;8.1.2.;8.2.2.;8.3.1.;8.5.1.; 8.5.2.; 8.6.1.;9.1.;9.12.;9.15.**

16.** Задача дается преподавателем для практического решения на ЭВМ.

2-я контрольная работа — первая половина мая

ЗАДАНИЕ 2 (срок сдачи — первая декада мая)

По **1*: 10.1.1.; 10.1.10; 10.1.14; 10.1.15.; 10.2.1; 10.2.11.; 11.2.2; 11.2.15; 11.3.2; 12.3.1; 12.3.8;13.1.7.**

По **3***: VIII.1, VIII.2, VIII.4, VIII.5, VIII.6, VIII.7, IX.1, IX.4.**

21, 22**.** Задачи даются преподавателем для практического решения на ЭВМ.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 января 2021 года

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Теория поля**
по направлению подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»
физтех-школа: **ФАКТ**

кафедра **теоретической физики**
курс: 3
семестр: 6

Трудоемкость:
теор. курс: базовая часть – 2 зач. ед.
лекции – 30 часов
Диф. зачет – 6 семестр
практические (семинарские)
занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 60
Самостоятельная работа – 30 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц. А. В. Григорьев

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
25 декабря 2020 года

Заведующий кафедрой Ю. М. Белоусов
д.ф.-м.н., профессор

ТЕОРИЯ ПОЛЯ И МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

1. Принцип относительности

Инерциальные системы отсчёта. Ньютонова механика и принцип относительности Галилея. Постоянство скорости света. Принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца и инвариантность интервала. Относительность одновременности и промежутков времени. Сокращение длин и собственное время. Сложение скоростей. Аберрация света.

2. Четырёхмерное псевдоевклидово пространство Минковского

Мировая точка, мировая линия. Пространственно-подобные, времени-подобные и нулевые интервалы. Понятие 4-вектора. Скалярное произведение. Метрика четырёхмерного пространства. Контр- и ковариантное представление. 4-градиент и 4-дивергенция. 4-векторы скорости и ускорения.

3. Описание движения свободной релятивистской точечной частицы

Понятие точечной элементарной частицы, её 4-координата и мировая линия. Ковариантная формулировка принципа наименьшего действия в пространстве Минковского. 4-импульс точечной частицы. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы. Лабораторная система и система центра масс. Применение закона сохранения 4-импульса для описания упругих столкновений частиц. Неупругие столкновения с образованием новых частиц. Порог реакции. 4-мерный волновой вектор. Эффект Доплера.

4. 4-мерная форма динамики частицы в электромагнитном поле

Понятия заряда точечной элементарной частицы и электромагнитного поля. 4-векторный потенциал электромагнитного поля. Действие для точечной частицы во внешнем векторном поле. Лагранжиан частицы во внешнем поле. Энергия, обобщённый и кинематический импульсы. Функция Гамильтона. Калибровочная инвариантность. Ковариантный вывод уравнения движения в четырёхмерной форме. Компоненты 4-мерного уравнения движения как трёхмерные уравнения движения частицы в поле.

5. Описание электромагнитного поля

Тензор электромагнитного поля. 4-тензоры и их свойства. Преобразование Лоренца для потенциалов (φ и **A**) и напряжённостей (**E** и **H**). Инварианты поля и их следствия. Дуальный тензор.

6. Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Движение заряженной частицы в постоянных однородных электрическом и магнитном полях. Дрейф в скрещенных полях. Средняя сила для системы частиц во внешних слабонеоднородных электрическом и магнитном полях. Электрический и магнитный дипольные моменты. Гиромагнитное отношение. Адиабатический инвариант, движение ведущего центра орбиты. Движение и дрейф заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле.

7. Уравнения электромагнитного поля

Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов. 4-мерная форма уравнений Максвелла. Закон сохранения электрического заряда. 4-вектор плотности тока. Уравнение непрерывности. Переход от точечных зарядов к распределённой системе зарядов и токов при помощи δ-функции.

8. Энергия и импульс электромагнитного поля. Уравнения для потенциалов

Плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). Баланс энергии системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Плотность импульса, тензор плотности потока импульса и тензор напряжений Максвелла. Тензор энергии-импульса. Калибровочная инвариантность уравнений электродинамики. Уравнения для потенциалов. Основные уравнения электро- и магнитостатики.

9. Электро- и магнитостатика

Электрическое поле системы неподвижных зарядов. Уравнение Пуассона и его решение. Функция Грина для уравнения Пуассона. Мультипольное разложение потенциалов. Электрический квадрупольный момент. Энергия электростатического взаимодействия. Выражение энергии системы зарядов во внешнем слабо неоднородном электрическом поле через мультипольные моменты. Магнитное поле усреднённого стационарного движения зарядов.

10. Свободное электромагнитное поле

Уравнения для потенциалов свободного электромагнитного поля в пустом пространстве. Плоские монохроматические волны и их поляризация. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации.

11. Излучение движущихся зарядов

Функция Грина волнового уравнения. Запаздывающий и опережающий потенциалы. Интенсивность излучения в дипольном приближении. Поля **E** и **H** в волновой и квазистационарной зонах. Угловое и спектральное распределения излучения. Интенсивность излучения магнитного диполя и квадруполя. Излучение релятивистски движущихся частиц. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Формула Лармора. Синхротронное излучение. Полная интенсивность излучения.

12. Реакция излучения и рассеяние электромагнитных волн

Сила радиационного трения. Естественная ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях. Постановка задачи о рассеянии. Дифференциальное сечение рассеяния. Рассеяние света на свободном электроне. Рассеяние электромагнитных волн на связанном электроне.

Литература

Основная

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – Изд. 8-е. – Москва : Физматлит, 2001.
2. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. – Изд. 3-е. – Москва : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

Дополнительная

3. *Дорофеев Е.А., Крайнов В.П.* Макроскопическая электродинамика: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 1998. – 78 с.
4. *Дорофеев Е.А., Крайнов В.П.* Электродинамика сплошных сред: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 1999. – 160 с.
5. *Дорофеев Е.А., Крайнов В.П.* Основы макроскопической электродинамики: учеб. пособие. – Москва : МФТИ, 2007. – 132 с.

ЗАДАНИЯ

1-е задание

1. Вычислить, в каких точках земной орбиты направление на Полярную звезду (β Ursae Minoris) для наблюдателя, неподвижного относительно центра Земли, максимально отклонено от направления, в котором Полярную звезду видит наблюдатель, неподвижный относительно Солнца.
2. Найти, как связаны углы падения и отражения света, а также частоты падающего и отражённого лучей при отражении луча света от зеркала, движущегося со скоростью υ в направлении, перпендикулярном плоскости зеркала.
3. Найти связь угла рассеяния гамма-кванта на неподвижном электроне с изменением частоты (эффект Комптона). Найти связь направления отскока электрона под воздействием гамма-кванта с переданной ему энергией.
4. Протон энергии 10 ГэВ налетает на неподвижный протон и теряет в результате столкновения 20 МэВ. Найти угол рассеяния налетающего протона в лабораторной системе и системе центра масс 2 протонов.
5. При столкновении электрона с позитроном частицы превращаются в положительный и отрицательный мюоны. Найти пороговую энергию процесса в системе, где электрон покоится, и в системе центра инерции электрона и позитрона.
6. π-мезон распадается на мюон и мюонное антинейтрино. Найти угловое и энергетическое распределение нейтрино в системе отсчёта, в которой энергия пи-мезона составляет 2 ГэВ.
7. Покоящийся отрицательный мюон распадается на электрон, электронное антинейтрино и мюонное нейтрино. Найти максимальную энергию вылетающего мюонного нейтрино в системе покоя мюона.
8. Доказать тождества, встречающиеся в электродинамике, используя тензорные обозначения, антисимметричный тензор Леви–Чивиты и символ Кронекера:

$$\mathrm{rot}\,(\phi\mathbf{B}) = \phi\,\mathrm{rot}\mathbf{A} + [\mathrm{grad}\phi, \mathbf{A}];$$

$$\mathrm{div}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = (\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{B});$$

$$\mathrm{rot}\,[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{A}\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathrm{div}\,\mathbf{A} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B};$$

$$\mathrm{grad}\,(\mathbf{AB}) = [\mathbf{A}, \mathrm{rot}\,\mathbf{B}] + [\mathbf{B}, \mathrm{rot}\,\mathbf{A}] + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla)\mathbf{B}.$$

Раскрыть выражения:

$$\mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{A};\ \mathrm{div}(f\mathbf{A});\ \mathrm{rot}(f\mathbf{A});\ \mathrm{grad}f(r).$$

9. Найти градиентное (калибровочное) преобразование от вектор-потенциала $\mathbf{A} = (-Hy,\ 0,\ 0)$ к вектор-потенциалу $\mathbf{A} = 1/2\,[\mathbf{H},\mathbf{r}]$. Каково направление магнитного поля?
10. Найти градиентное (калибровочное) преобразование от 4-потенциала электрического заряда Q, покоящегося в начале координат, к такому 4-потенциалу, в котором $\varphi = 0$. Убедиться, что обе калибровки 4-потенциала дают одно и то же электромагнитное поле.
11. Найти параметрическую (от собственного времени) траекторию частицы заряда e и массы m в однородном:

    а) электрическом поле, направленном по оси x. Начальная скорость и координаты частицы равны 0;

    б) магнитном поле, направленном по оси z. Начальные координаты частицы равны 0. $\boldsymbol{\upsilon}_0 = (\upsilon_0,\ 0,\ 0)$.

    в) перпендикулярных и равных по величине однородных магнитном и электрическом полях.
12. Частица заряда e и массы m движется в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за 1 оборот, если магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за время оборота мало по сравнению с величиной поля). Доказать, что величина $p_\perp^2/H$ остаётся постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения H_1 до H_2.
13. Получить формулу $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla)\mathbf{H}$ для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле и найти уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы.
14. На больших расстояниях поле Земли представляет поле диполя с магнитным моментом $m = 8.1 \cdot 10^{25}$ Гс$\cdot$см^3.

    А. Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии.

    Б. Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол α с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол α, при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости, значительно больше радиуса Земли.

    В. Найти период дрейфа протона вокруг Земли в экваториальной плоскости, если его кинетическая энергия составляет 15 МэВ и он удалён от центра Земли на 40 000 км.

2-е задание

1. В области с характерным размером a движутся с нерелятивистскими скоростями заряженные частицы. Полный заряд системы равен нулю. Известна зависимость дипольного момента системы от времени $\mathbf{d}(t)$. В дипольном приближении найдите явные выражения для электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и магнитного $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ полей, создаваемых этой системой движущихся зарядов, на расстояниях, много больших a (но необязательно больших характерной длины волны испускаемого излучения). Обсудите, какие из слагаемых в найденных $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$ доминируют в ближней зоне $a \ll r \ll \lambda$ и в волновой зоне $r \gg \lambda$.
2. Две частицы с массами m_1 и m_2 и противоположными зарядами $e_1 = e$ и $e_2 = -e$ движутся, притягиваясь друг к другу, по круговым орбитам (примеры: атом водорода, позитроний, мюоний, мезоводород). В рамках дипольного приближения найдите зависимость расстояния r между зарядами от времени t. В том же дипольном приближении найдите время τ, за которое один заряд «упадёт» на другой, если начальное расстояние равно 1 см. Обсудите, на каком расстоянии дипольное приближение перестанет работать, и сравните это расстояние с квантовым пределом – боровским радиусом a_0.
3. В реакции термоядерного синтеза $d + t \to {}^4\mathrm{He} + n$ при слиянии дейтона и тритона выделяется значительная энергия (примерно 17.6 МэВ). Эта реакция может быть осуществлена в горячей плазме. Пусть в такой плазме дейтон и тритон, обладающие одинаковыми кинетическими энергиями E, движутся точно навстречу друг другу (лоб в лоб). Энергии столкновения, однако, может оказаться недостаточно для сближения дейтона и тритона на расстояние, при котором между ними начинают действовать ядерные силы притяжения. В этом случае дейтон и тритон, сблизившись на некоторое минимальное расстояние, вновь разлетаются. Найдите полную энергию ε, излучённую дейтоном и тритоном в процессе сближения и разлёта. Найдите отношение энергии ε к начальной кинетической энергии $2E$ сталкивающихся частиц.
4. Плоская световая волна с круговой частотой ω распространяется вдоль оси z и падает на осциллятор, т.е. на частицу с зарядом e и массой m, которая колеблется с собственной частотой ω_0 при отклонении от положения равновесия. Принимая во внимание слабое затухание осциллятора (небольшую тормозящую силу $\mathbf{F} = -m\gamma\mathbf{v}$, действующую на частицу), найдите дифференциальное $d\sigma / d\Omega$ и полное σ сечения рассеяния света, поляризованного линейно. Считая, что естественный свет представляет собой ансамбль волн, векторы линейной поляризации которых случайным образом распределены в плоскости, попереч-

ной оси z, найдите дифференциальное $d\sigma / d\Omega$ и полное σ сечения рассеяния естественного света на осцилляторе.

5. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m влетает со скоростью υ в однородное магнитное поле **H** поперёк его силовых линий. Направление влёта перпендикулярно плоской границе поля. Пренебрегая краевыми эффектами, найдите полную энергию ε, излучённую частицей, и спектральную плотность $I(\omega)$ этой энергии. Установите связь между временем излучения Δt и шириной $\Delta\omega$ функции $I(\omega)$.
6. В ускорителе LEP (Large Electron-Positron Collider) со встречными пучками, действовавшем в 1989–2000 годах в ЦЕРН, сталкивались электроны и позитроны с энергиями E_0 = 90 ГэВ (в подземном тоннеле, оставшемся после демонтажа LEP, смонтирован ныне действующий ускоритель LHC). Длина окружности ускорителя специально была сделана очень большой, чтобы по возможности уменьшить потери на синхротронное излучение. Оцените эти потери – полную мощность P (МВт) синхротронного излучения ускорителя LEP, а также характерную длину волны излучения. Полное число ускоренных частиц в кольце – $N = 5 \cdot 10^{12}$.
7. Пусть в лабораторной системе отсчёта релятивистская частица обладает мгновенной скоростью $\mathbf{v}$ и мгновенным ускорением $\mathbf{a}$, а в сопутствующей системе отсчёта (движущейся со скоростью частицы) соответствующие величины равны $\mathbf{v}'=0$ и $\mathbf{a}'$. Покажите, что инвариант $w^i w_i$, составленный из 4-ускорения $w^i = du^i / ds$, где $u^i = dx^i / ds$ – 4-скорость, выражается через 3-скорости и 3-ускорения в лабораторной и сопутствующей системах отсчёта следующим образом:
$$w^i w_i = -\gamma^6(\mathbf{a}^2 - [\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{a}]^2)/c^4 = -\mathbf{a}'^2/c^4,$$
где $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ и $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Покажите, что для мгновенных интенсивностей излучения и в лабораторной, и сопутствующей системах справедливо: $I = I'$, и выразите интенсивность излучения релятивистской частицы I через её скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{a}$. Упростите выражение для I для случая, когда частица движется по окружности с постоянной скоростью (в кольцевом ускорителе).

ЗАДАНИЕ 1 срок сдачи 16 марта – 23 марта 2021 г.

ЗАДАНИЕ 2 срок сдачи 12 мая – 18 мая 2021 г.

Учебное издание

С Б О Р Н И К
п р о г р а м м и з а д а н и й

Физтех-школа аэрокосмических технологий
(ФАКТ)

для студентов 3 курса
на весенний семестр
2020–2021 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, О.П. Котова*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзева*

Подписано в печать 15.01.2021. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,75. Тираж 70 экз.
Заказ № 24.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок