

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

Рабочая программа дисциплины (модуля)

по дисциплине:	Математическая статистика
по направлению:	Биотехнология
профиль подготовки:	Биотехнология Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 90 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 60 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: Н.А. Волков, канд. физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 09.02.2022

Аннотация

Данная дисциплина изучает математические и теоретические основы современного статистического анализа, а также подготавливает слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

изучение математических и теоретических основ современного статистического анализа, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области анализа статистических задач прикладной математики, физики и экономики.

Задачи дисциплины

- ☐ изучение математических основ математической статистики;
- ☐ приобретение слушателями теоретических знаний в области современного статистического анализа.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- ☐ основные понятия математической статистики;
- ☐ основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- ☐ понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- ☐ определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- ☐ определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- ☐ многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- ☐ базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- ☐ лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- ☐ критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- ☐ обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- ☐ строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- ☐ находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- ☐ вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- ☐ находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- ☐ строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- ☐ находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- ☐ строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- ☐ строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- ☐ основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- ☐ навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- ☐ навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Вероятностно-статистическая модель.	4	10		9
2	Основная задача математической статистики.	4	10		3
3	Различные виды сходимостей случайных векторов.	6	10		6
4	Статистики и оценки.	6	10		9
5	Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.	6	10		6
6	F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.	4	10		12
Итого часов		30	60		45
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Вероятностно-статистическая модель.

Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.

2. Основная задача математической статистики.

Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.

3. Различные виды сходимостей случайных векторов.

Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.

4. Статистики и оценки.

Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).

5. Эмпирическое распределение и эмпирическая функция распределения.

Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.

6. F-критерий для проверки линейных гипотез в гауссовской линейной модели.

Линейная гауссовская модель и метод наименьших квадратов. Основные свойства многомерного гауссовского закона. Распределение (центральное) хи-квадрат Пирсона и лемма о круговом гауссовском распределении. Линейная гауссовская модель, полные достаточные статистики (полнота без доказательства) и оптимальные оценки для среднего и дисперсии. Гауссовская линейная регрессия, оценки наименьших квадратов, их вычисление, распределения и оптимальность. Примеры-гауссовская выборка, однофакторная гауссовская линейная модель.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Математическая статистика [Текст] : [учебник для вузов] / А. А. Боровков .— [3-е изд., испр.] .— М. : Физматлит, 2007 .— 704 с.
2. Введение в математическую статистику [Текст] : [учебник для вузов] / Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев .— М. : ЛКИ, 2010, 2014, 2015 .— 600 с.
3. Дискретная математика [Текст] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие для вузов / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин .— Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001 .— 288 с.

Дополнительная литература

1. Линейная алгебра [Текст] : учебник для вузов / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк .— 3 - е изд., доп. — М. : Наука, 1984 .— 295 с.
2. Алгебра [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / С. Ленг ; пер. с англ. Е. С. Голда ; под ред. А. И. Кострикина .— М. : Мир, 1968 .— 564 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Биотехнология
профиль подготовки: Биотехнология
Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики
кафедра дискретной математики
курс: 3
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: Н.А. Волков, канд. физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
ПК-4 Способен критически оценивать применимость используемых методик и методов	ПК-4.1 Знает численные порядки величин, характерных для соответствующей профессиональной области
	ПК-4.2 Знает источники происхождения и умеет производить оценку погрешности измерений и достоверности экспериментальных результатов
	ПК-4.3 Способен обосновать причинно-следственные отношения используемых понятий и моделей

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математическая статистика» обучающийся должен:

знать:

- ☐ основные понятия математической статистики;
- ☐ основные подходы к сравнению оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ асимптотические и неасимптотические свойства оценок параметров неизвестного распределения;
- ☐ основные методы построения оценок с хорошими асимптотическими свойствами: метод моментов, метод максимального правдоподобия, метод выборочных квантилей;
- ☐ понятие эффективных оценок и неравенство информации Рао-Крамера;
- ☐ определение и главные свойства условного математического ожидания случайной величины относительно сигма-алгебры или другой случайной величины;
- ☐ определение общей линейной регрессионной модели и метод наименьших квадратов;
- ☐ многомерное нормальное распределение и его основные свойства;
- ☐ базовые понятия теории проверки статистических гипотез;
- ☐ лемму Неймана – Пирсона и теорему о монотонном отношении правдоподобия;
- ☐ критерий хи-квадрат Пирсона для проверки простых гипотез в схеме Бернулли.

уметь:

- ☐ обосновывать асимптотические свойства оценок с помощью применения предельных теорем теории вероятностей;
- ☐ строить оценки с хорошими асимптотическими свойствами для параметров неизвестного распределения по заданной выборке из него;
- ☐ находить байесовские оценки по заданному априорному распределению;
- ☐ вычислять условные математические ожидания с помощью условных распределений;
- ☐ находить оптимальные оценки с помощью полных достаточных статистик;
- ☐ строить точные и асимптотические доверительные интервалы и области для параметров неизвестного распределения;
- ☐ находить оптимальные оценки и доверительные области в гауссовской линейной модели;
- ☐ строить равномерно наиболее мощные критерии в случае параметрического семейства с монотонным отношением правдоподобия;
- ☐ строить F-критерий для проверки линейных гипотез в линейной гауссовской модели.

владеть:

- ☐ основными методами математической статистики построения точечных и доверительных оценок: методом моментов, выборочных квантилей, максимального правдоподобия, методом наименьших квадратов, методом центральной статистики.
- ☐ навыками асимптотического анализа статистических критериев;
- ☐ навыками применения теорем математической статистики в прикладных задачах физики и экономики.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия или в конце занятия по пройденной теме.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Основная задача математической статистики. Параметрическая статистика. Оценки («статистики»). Вариационный ряд и порядковые статистики. Напоминание о распределении порядковых статистик.
2. Несмещенность и состоятельность оценок. Примеры несмещенных и состоятельных оценок (моменты, дисперсия); смещенных, но состоятельных оценок; несостоятельных, но несмещенных оценок. Оценки функций от параметров. Пример ситуации, в которой не существует несмещенной оценки некоторой функции от параметра.
3. Эмпирическая функция распределения. Ее несмещенность и состоятельность по отношению к теоретической функции распределения.
4. Функция штрафа (потерь) и функция риска. Байесовская и минимаксная стратегии. Минимаксность байесовской стратегии с постоянным риском.
5. Байесовская оценка в схеме Бернулли. Минимаксная оценка в схеме Бернулли (статистика Ходжеса – Лемана). Сравнение статистики Ходжеса – Лемана с выборочным средним.
6. Асимптотическая нормальность оценки. Теоремы об асимптотической нормальности выборочного среднего и медианы в модели симметричного распределения с неизвестным параметром сдвига.
7. Относительная асимптотическая эффективность. Напоминание правила трех сигм и пояснения в терминах этого правила. Пример со «смешанным» нормальным распределением (медиана vs. выборочное среднее).
8. Условия регулярности и неравенство Рао – Крамера (случай несмещенной оценки). Информация Фишера. Эффективные и сверхэффективные оценки.
9. Метод моментов. Состоятельность оценки.
10. Метод максимального правдоподобия. Оценки максимального правдоподобия (о.м.п.) и их свойства (состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность). О.м.п. для параметра сдвига в распределении Лапласа как пример асимптотически нормальной о.м.п. в нерегулярной модели.
11. О.м.п. в стандартных моделях (биномиальная, нормальная, Коши и др.).
12. Достаточные статистики в дискретном случае. Критерий факторизации. Примеры.
13. Условное математическое ожидание относительно разбиения. Условные плотности. Свойства условного математического ожидания (б/д в «непрерывном» случае, но с доказательством в случае условного математического ожидания относительно разбиения).
14. Достаточные статистики в общем случае: общий критерий факторизации как определение. Примеры.
15. Экспоненциальное семейство. Пессимистическая теорема (б/д).
16. Теорема Колмогорова – Блекуэлла – Рао об улучшении несмещенной оценки.
17. Полные статистики. Критерий полноты и достаточности для экспоненциального семейства (б/д).
18. Теорема Гливленко – Кантелли (формулировка). Общая задача о равномерной сходимости в законах больших чисел. Задача о треугольниках на плоскости. Размерность Вапника – Червоненкиса. Пример с пространством и открытыми полупространствами. Две теоремы Вапника – Червоненкиса (б/д). Теорема Гливленко – Кантелли как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса. Теорема о треугольниках как частный случай теоремы Вапника – Червоненкиса.
19. Статистика Колмогорова и ее независимость от вида непрерывной функции распределения (только строго монотонный случай). Асимптотическая теорема Колмогорова (б/д).
20. Точные и асимптотические доверительные интервалы. Односторонние и двусторонние интервалы.
21. Квантили распределений. Напоминание распределения хи-квадрат. Распределение Стьюдента.

22. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения: для среднего при известной дисперсии, для дисперсии при известном среднем и для одновременно неизвестных среднего и дисперсии.
23. Доверительные интервалы для квантилей.
24. Критерий согласия Колмогорова.
25. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.
26. Сравнение двух простых гипотез. Ошибки первого и второго рода.
27. Случай абсолютно непрерывных распределений: отношение правдоподобия и теорема Неймана – Пирсона.
28. Критерий однородности Смирнова для двух независимых выборок.
29. Критерий однородности хи-квадрат для нескольких независимых выборок.
30. Проверка равенства средних у двух нормальных выборок с известными дисперсиями; с неизвестными дисперсиями. Проверка равенства дисперсий у двух нормальных выборок с неизвестными средними. Распределение Фишера.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.