

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики
А.М. Райгородский**

по дисциплине: **Рабочая программа дисциплины (модуля)**
Дискретная математика

программа аспирантуры: Математика и механика

курс: кафедра дискретной математики
1

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 48 час.

Всего часов: 78, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.С. Нагорный, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.06.2022

Аннотация

Сравнительно молодая научная дисциплина «Дискретная математика» возникла в начале XX века, но уже успела стать классической. Она включает в себя множество разделов – теорию множеств, математическую логику, теорию чисел, теорию графов, теорию кодирования, теорию функциональных систем, теорию алгоритмов, комбинаторный анализ, еще много других разделов.

Понятия дискретной математики и методы решения дискретных задач лежат в основе не только большого количества важных прикладных дисциплин, но и некоторых теоретических наук – таких, как информатика, кибернетика, криптография, которые всё глубже и глубже проникают не только в науку и технику, но и в нашу повседневную жизнь.

Дискретность (от лат. *discretus* – отделённый, прерывистый) часто употребляют как антоним непрерывности. Однако при решении сложных практических задач дискретные и непрерывные методы нередко используются совместно и весьма эффективно, взаимно обогащая друг друга.

Данный курс включает в себя достаточно глубокий экскурс в теорию функциональных систем (включая функции алгебры логики, функции многозначной логики и теорию автоматных функций), знакомство с некоторыми классическими алгоритмами (с оценками их сложности), здесь также формулируются и доказываются основные результаты теории синтеза управляющих систем (на примере ДНФ, КС и СФЭ). Наконец, в конце курса будут освещены некоторые (избранные) комбинаторные вопросы, связанные с геометрией булева куба. Несомненно, эти знания будут полезны аспирантам и специалистам в самых разных математических областях.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Познакомить слушателей с понятиями дискретной математики и методов решения дискретных задач, лежащих в основе не только большого количества важных прикладных дисциплин, но и некоторых теоретических наук – таких, как информатика, кибернетика, криптография.

Задачи дисциплины

- актуализировать знания ключевых понятий из предшествующих дисциплин, особенно важные для дискретной математики;
- ознакомить обучающихся с основными современными задачами дискретной математики и математической кибернетики, возникающими в различных областях,
- научить обучающихся выбирать наиболее подходящий метод для решения поставленных перед ними задач.

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.
- Математическая экономика.

уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы.
- ☐ представить панораму методов прикладной дискретной математики.
- ☐ использовать современные средства создания комплексов программ.
- ☐ абстрагироваться от несущественного при математическом моделировании.
- ☐ выбирать методы дискретной математики и кибернетики, подходящие для решения той или иной задачи.

владеть:

Владеть методами следующих дисциплин.

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.

3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Функции алгебры логики	5			8
2	Функции многозначной логики	5			8
3	Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)	5			8
4	Алгоритмы и их сложность	5			8
5	Синтез управляющих систем	5			8
6	Геометрия булева куба (избранные вопросы)	5			8
Итого часов		30			48
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		78 час., 2 зач.ед.			

3.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Функции алгебры логики

1. Элементарные функции алгебры логики. Суперпозиция функций. Замыкание, замкнутые классы функций. Классы T_0 , T_1 , L , S , M , их замкнутость.
2. Теорема Поста о полноте в P_2 (с доказательством).

3. Понятия базиса и предполного (максимального) класса в алгебре логики. Следствия из теоремы Поста о полноте.

4. Характеризация функций алгебры логики по предполным классам. Алгоритм получения всех тупиковых аксиом вложения. Алгоритм получения всех типов базисов. Решетка пересечений предполных классов алгебры логики.

2. Функции многозначной логики

1. Функции многозначной логики. Предикаты. Замкнутость класса функций, сохраняющих заданный предикат.

2. Теорема Кузнецова и следствие из нее. Теорема Янова-Мучника.

3. Предикатное описание предполных классов функций многозначной логики. Теорема Розенберга (без доказательства).

4. Предикатное описание и свойства предполных классов трехзначной логики. Свойства элементарных функций трехзначной логики. Примеры аксиом вложения.

5. Предикатное описание и свойства предполных классов четырехзначной логики. Свойства элементарных функций четырехзначной логики. Примеры аксиом вложения.

3. Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)

1. Детерминированные функции как функции, переводящие детерминированным образом счётные последовательности символов входного алфавита в счётные последовательности символов выходного алфавита. Определение, примеры детерминированных и не детерминированных функций.

2. Определение веса детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные (автоматные) функции (о.-д. функции). Примеры детерминированных функций бесконечного веса.

3. Способы задания о.-д. функций: диаграмма Мура, каноническая таблица, система канонических уравнений, схемы из функциональных элементов и элементов единичной задержки.

4. Переход от одной канонической формы задания автомата к любой другой (канонической).

5. Понятие эксперимента в теории автоматов. Теорема Мура для двух отличимых состояний автомата. Теорема Мура для двух автоматов.

4. Алгоритмы и их сложность

1. Принцип «Разделяй и властвуй!» в теории алгоритмов. Сложность задачи одновременного поиска максимального и минимального элемента в массиве.

2. Задача умножения n -разрядных двоичных чисел, ее сложность. Теорема о решении рекуррентных соотношений для сложности алгоритмов.

3. Важность балансировки в алгоритмах типа «Разделяй и властвуй!». Алгоритмы сортировки элементов массива, их сложность. Алгоритм сортировки слиянием, доказательство его оптимальности.

4. Принцип динамического программирования. Задача об оптимальном порядке умножения n матриц.

5. Паросочетания при линейных предпочтениях участников (обобщенные паросочетания). Алгоритм поиска устойчивого паросочетания, его сложность.

6. Порядковые статистики. Алгоритм выбора k -го наименьшего элемента, его сложность.

5. Синтез управляющих систем

1. Задача синтеза управляющих систем на примере класса дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), контактных схем (КС) и схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.

2. Сокращенная ДНФ и методы ее построения. Анализ простейших алгоритмов синтеза КС.

3. Контактное дерево. Универсальный многополюсник. Метод Шеннона построения КС, его сложность в худшем случае.

4. Метод каскадов построения КС и СФЭ в стандартном базисе для систем функций алгебры логики.
5. Оценка сложности шифратора, дешифратора, мультиплексора и универсального многополюсника в классе СФЭ в стандартном базисе.
6. Функция Шеннона для классов КС и СФЭ в стандартном базисе. Асимптотически наилучший метод синтеза КС и СФЭ. Теорема Лупанова (без доказательства). Результаты С.В. Яблонского о сложности почти всех функций алгебры логики.
7. Оценка числа КС и СФЭ в стандартном базисе. Нижняя оценка функции Шеннона.
8. Примеры получения результатов об асимптотике функции Шеннона для специальных классов функций.
9. Эффект Шеннона. Полуэффект Шеннона на примере задачи синтеза ДНФ.

6. Геометрия булева куба (избранные вопросы)

1. Среднее значение количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности k в характеристическом множестве функции алгебры логики от n переменных.
2. Дисперсия количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности k в характеристическом множестве функции алгебры логики от n переменных. Число импликант (простых импликант, ядровых импликант) у почти всех функций алгебры логики от n переменных.
3. Теорема о мощности характеристического множества почти всех функций алгебры логики от n переменных.
4. Цепные и циклические функции. Оценки (верхняя и нижняя) максимально возможной длины цепи (цикла) в n -мерном булевом кубе. Протяженность связной булевой функции.

4. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

5. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Дискретная математика [Текст] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие для вузов / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин .— Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001 .— 288 с.
2. Дискретная математика [Электронный ресурс] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие / М. О. Асанов, В. А. Барановский, В. В. Расин .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2020 .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Элементы математической кибернетики и дискретной математики [Текст] = учеб. пособие для вузов / А. А. Бурцев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 160 с.

6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

7. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, Wolfram Mathematica.

8. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Для успешного освоения курса от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач. Самостоятельные занятия включают в себя также изучение материалов учебных пособий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

программа аспирантуры: Математика и механика
Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики
кафедра дискретной математики

курс: 1

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.С. Нагорный, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретная математика» обучающийся должен:

знать:

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.
- Математическая экономика.

уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы.
- ☐ представить панораму методов прикладной дискретной математики.
- ☐ использовать современные средства создания комплексов программ.
- ☐ абстрагироваться от несущественного при математическом моделировании.
- ☐ выбирать методы дискретной математики и кибернетики, подходящие для решения той или иной задачи.

владеть:

Владеть методами следующих дисциплин.

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.

2. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В течение семестра проводятся устные опросы по материалам предыдущих лекций по следующим темам:

функции алгебры логики;
функции многозначной логики;
автоматы-преобразователи (о.-д. функции);
алгоритмы и их сложность;
геометрия булева куба.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Элементарные функции алгебры логики. Суперпозиция функций.
2. Теорема Поста о полноте в P_2 (с доказательством).
3. Понятия базиса и предполного (максимального) класса в алгебре логики.

4. Следствия из теоремы Поста о полноте.
5. Характеризация функций алгебры логики по предполным классам.
6. Функции многозначной логики. Предикаты. Замкнутость класса функций, сохраняющих заданный предикат.
7. Теорема Кузнецова и следствие из нее. Теорема Янова-Мучника.
8. Предикатное описание предполных классов функций многозначной логики.
9. Предикатное описание и свойства предполных классов трехзначной логики. Свойства элементарных функций трехзначной логики.
10. Аксиомы вложения, примеры аксиом вложения.
11. Предикатное описание и свойства предполных классов четырехзначной логики. Свойства элементарных функций четырехзначной логики.
12. Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)
13. Детерминированные функции.
14. Определение веса детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные (автоматные) функции (о.-д. функции).
15. Принцип «Разделяй и властвуй!» в теории алгоритмов. Сложность задачи одновременного поиска максимального и минимального элемента в массиве.
16. Задача умножения n -разрядных двоичных чисел, ее сложность. Теорема о решении рекуррентных соотношений для сложности алгоритмов.
17. Принцип динамического программирования. Задача об оптимальном порядке умножения n матриц.
18. Порядковые статистики. Алгоритм выбора k -го наименьшего элемента, его сложность.
19. Среднее значение количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности k в характеристическом множестве функции алгебры логики от n переменных.
20. Дисперсия количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности k в характеристическом множестве функции алгебры логики от n переменных.
21. Теорема о мощности характеристического множества почти всех функций алгебры логики от n переменных.
22. Цепные и циклические функции. Оценки (верхняя и нижняя) максимально возможной длины цепи (цикла) в n -мерном булевом кубе. Протяженность связной булевой функции.

Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений;

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

Оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также учебной и справочной литературой, персональным компьютером и Internet.