

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Введение в топологическую комбинаторику
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: А.Б. Скопенков, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 13.03.2023

Аннотация

Курс посвящен изучению основ гомотопической топологии, а также подготовке слушателей к дальнейшей научной работе в области комбинаторных задач.

К задачам о гомотопической классификации отображений сводятся многие проблемы топологии (в т.ч., возникшие в приложениях). В курсе будут изучаться и применяться основные методы теории гомотопий. Мы начнем с базовых методов, а закончим недавними алгоритмическими результатами.

Основные идеи будут представлены на "олимпиадных" примерах: на простейших частных случаях, свободных от технических деталей, и со сведением научного языка к необходимому минимуму. За счет того курс доступен для начинающих, хотя содержит красивые сложные результаты.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Изучение основ топологической комбинаторики, а также подготовка слушателей к дальнейшей самостоятельной работе в области комбинаторных задач.

Задачи дисциплины

- изучение основ топологической комбинаторики;
- приобретение слушателями теоретических знаний в области комбинаторного анализа задач, возникающих на практике;
- освоение аналитического и алгебраического аппарата гомотопической топологии и получение навыков работы с основными дискретными структурами.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)

ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;
- основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории обращения Мёбиуса и ее приложения к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, хроматический многочлен и многочлен Татта, деревья, мультиграфы, оргграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);
- основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радо, Франкла – Уилсона и Алсведе – Хачатряна, графы пересечений и реберные графы, хроматические числа Кнезеровских графов;
- основы теории случайных графов: связность, распределение древесных компонент, эволюция гигантской компоненты, понятие случайного веб-графа;
- основы комбинаторной геометрии и ее связь с теорией графов и гиперграфов;
- основы теории кодирования и ее связь с теорией графов и гиперграфов: матрицы Адамара, коды, исправляющие ошибки, коды Хэмминга и Рида – Маллера;
- основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, метод второго момента и оценки больших отклонений;
- основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;
- основные топологические методы в комбинаторике: применение теоремы Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана;
- основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов и гиперграфов, двудольные числа Рамсея, конструктивные оценки;
- основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, включая понятие размерности Вапника – Червоненкиса и его приложения к задачам комбинаторной геометрии и математической статистики;
- основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов.

уметь:

- вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;
- доказывать комбинаторные тождества;
- вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;
- составлять и решать рекуррентные соотношения;
- доказывать различные свойства графов и гиперграфов;
- решать экстремальные задачи комбинаторики;
- строить системы представителей для графов и гиперграфов;
- решать рамсеевские задачи;
- оценивать хроматические числа графов, строить многочлены Татта и хроматические многочлены;
- строить коды, исправляющие ошибки.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;
- вероятностным методом в комбинаторике;
- линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;
- топологическим методом в комбинаторике;
- методом производящих функций;
- методом обращения Мёбиуса.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

		Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.
--	--	---

№	Тема (раздел) дисциплины	Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Зачем нужна гомотопическая классификация	10	10		25
2	Нечетные отображения графа	10	10		25
3	Коэффициент зацепления. Инвариант Хопфа	10	10		25
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 6 (Весенний)

1. Зачем нужна гомотопическая классификация

Результаты о векторных полях, вложениях гиперграфов и погружения многообразий.

2. Нечетные отображения графа

Отображения сферы и гиперграфа в окружность.

3. Коэффициент зацепления. Инвариант Хопфа

Отображения трехмерной сферы в двумерную. Применения в теории электричества и магнетизма.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Топология для физиков [Текст] : уч. пособие для вузов / Ю. А. Бычков ; Гос. ком. РФ по высш. образов., Моск. физико-техн. ин-т .— М. : Изд-во МФТИ, 1993 .— 108 с.

Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер пер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательства отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам в качестве домашнего задания.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении в изучении отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к преподавателю, ведущему занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.Б. Скопенков, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.5 Определяет и оценивает практические последствия возможных вариантов решения задачи
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Введение в топологическую комбинаторику» обучающийся должен:

знать:

- основы комбинаторики и асимптотического комбинаторного анализа;
- основы теории производящих функций и приложения теории к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории обращения Мёбиуса и ее приложения к перечислительным задачам комбинаторики;
- основы теории графов: планарность, изоморфизм, эйлеровость, гамильтоновость, хроматическое число, хроматический многочлен и многочлен Татта, деревья, мультиграфы, оргграфы, турниры, допустимые последовательности степеней вершин, количество связанных графов с данным числом вершин и ребер (формула Кэли для числа деревьев и ее обобщения);
- основы теории гиперграфов: теоремы Эрдеша – Ко – Радо, Франкла – Уилсона и Алсведе – Хачатряна, графы пересечений и реберные графы, хроматические числа Кнезеровских графов;
- основы теории случайных графов: связность, распределение древесных компонент, эволюция гигантской компоненты, понятие случайного веб-графа;
- основы комбинаторной геометрии и ее связь с теорией графов и гиперграфов;
- основы теории кодирования и ее связь с теорией графов и гиперграфов: матрицы Адамара, коды, исправляющие ошибки, коды Хэмминга и Рида – Маллера;
- основные вероятностные методы в комбинаторике: линейность математического ожидания, метод альтернирования, метод второго момента и оценки больших отклонений;
- основные линейно-алгебраические методы в комбинаторике: линейная независимость полиномов над конечным полем;
- основные топологические методы в комбинаторике: применение теоремы Борсука – Улама – Люстерника – Шнирельмана;
- основы теории Рамсея: числа Рамсея для графов и гиперграфов, двудольные числа Рамсея, конструктивные оценки;
- основы теории систем представителей для графов и гиперграфов, включая понятие размерности Вапника – Червоненкиса и его приложения к задачам комбинаторной геометрии и математической статистики;
- основы экстремальной комбинаторики: теорема Турана и ее уточнения для дистанционных графов.

уметь:

- вычислять количества различных комбинаторных объектов: сочетаний, размещений, перестановок, циклических последовательностей;
- доказывать комбинаторные тождества;
- вычислять приближенные значения (асимптотики) комбинаторных выражений;
- составлять и решать рекуррентные соотношения;
- доказывать различные свойства графов и гиперграфов;
- решать экстремальные задачи комбинаторики;
- строить системы представителей для графов и гиперграфов;
- решать рамсеевские задачи;
- оценивать хроматические числа графов, строить многочлены Татта и хроматические многочлены;
- строить коды, исправляющие ошибки.

владеть:

- навыками самостоятельной работы;
- навыками освоения большого объема информации;
- культурой постановки и моделирования комбинаторных задач;
- вероятностным методом в комбинаторике;
- линейно-алгебраическим методом в комбинаторике;
- топологическим методом в комбинаторике;
- методом производящих функций;
- методом обращения Мёбиуса.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Текущий контроль осуществляется посредством контроля выполнения домашних заданий и проверки контрольных работ.

Перед началом каждого занятия сдается список тех (пунктов) задач к этому занятию, которые студент готов рассказать у доски. (Задачи, уже записанные студентом, записывать еще раз не нужно). Требования к сдаче таких 'устных' решений - рассказать у доски после трехминутной подготовки.

Перечень примерных домашних заданий и контрольных работ.

1. Хулиган и полицейский могут двигаться (непрерывно) по границе треугольника так, что в каждый момент времени один из них находится в вершине, а другой на стороне, противоположной этой вершине (в частности, второй может находиться в вершине, являющейся одним из концов этой стороны). Смогут ли они (при некотором их начальном положении) поменяться местами?

2. Обозначим через $Ke(1)$ множество упорядоченных пар (x, y) точек графа K (точнее, его тела), одна из которых является вершиной, а другая лежит на стороне, не смежной с этой вершиной. Множество $Ke(1)$ можно представить в виде объединения отрезков, т.е. графа. Вершины графа $Ke(1)$ упорядоченные пары $a \times b = (a, b)$, где a и b различные вершины графа K . Вершина $a \times b$ соединена ребром с вершиной $a \times c$, если b и c соединены ребром в исходном графе K . Аналогично $b \times a$ и $c \times a$ соединены ребром, если b и c соединены ребром. Других ребер в графе $Ke(1)$ нет.

Какие графы $Ke(1)$ получатся, если K цикл с тремя вершинами, триод, K_4 ?

3. Как на двух гвоздях, вбитых в плоскую стену, подвесить замкнутую веревку (с тяжелой медалью), чтобы веревка не падала, но после вынимания любого гвоздя падала?

Более аккуратно, приведите пример двух точек A, B и двух замкнутых ломаных L, M на плоскости, не проходящих ни через A ,

ни через B , для которых L гомотопна M в $R^2 - A$ и в $R^2 - B$, но не в $R^2 - A - B$.

Домашнее задание дается из книги [1] списка литературы:

домашнее занятие №1: 3.2.3а с доказательством*, 4.2.4а для заузленных окружностей*.

домашнее занятие №2: 2.2.4а*b*, 5.6.1dg из [2] и 9.2.2а и 1, 2abcde, 3, 5а из п. 14.1.

домашнее занятие №3: 2f*hi, 4, 6abc из п. 14.1 (в 2i используйте пояснение и без доказательства 14.3.2) и 14.3.2 (только образующие), 14.7.1abcde и 10.1.2а, 10.1.3.

домашнее занятие №4: 14.1.6d, 14.1.7abcd, 14.3.1 (используя без доказательства 14.3.2), 14.3.3*, 10.3.5

домашнее занятие №5: прочитайте п. 10.2 и решите 10.3.1.ab.

домашнее занятие №6: 1, 2а, 4, 5, 6ab* из п. 9.4. По [2]: 4а*c* (для 3-многообразий), 5abc*d, 6 (для замкнутого 3-многообразия), 7ab (прочитайте набросок), 8, 9а из п. 7.4 и 1а*b*.

домашнее занятие №7: 14.9.1ab*cd*, 14.9.2ab*d (для PL многообразий и отображений) и 5ab, 6а-g, 7а-е из п. 8.1 и 8.2.4а*b*c*.

домашнее занятие №8: 1а-h, 2а-g, 3, 5e*f*, 6, 7 из п. 8.2 и 8.3.1а*b, 14.9.1ас, 14.9.2а (для PL многообразий и отображений), 8.7.5а, 8.7.8abc*d*e*. Утверждениями 8.2.4с, 8.2.5ef, 8.3.1а можно пользоваться в других задачах этого и следующего заданий без доказательства.

домашнее занятие №9: 8.3.1а*b, 14.9.1 а(n>3) а(n=3)* с(n>3), 14.9.2а, 8.7.8f*g*, 8.7.4b*, прочитайте п. 13.1, 13.1.1abc, 13.2.1f, 13.4.1 (с заменой векторных расслоений на I-расслоения), 15.6.4abc.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Отображения графа в окружность.
2. Нечетные отображения графа.
3. Отображения сферы
4. Отображение гиперграфа в окружность.
5. Степень отображения.
6. Теорема Борсука-Улама.
7. Отображения трехмерной сферы в двумерную.
8. Гомотопические группы.
9. Теорема Фрейденшталя о надстройке.
10. Алгоритмическая неразрешимость проблем продолжения отображений и вложимости гиперграфов.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.