

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Четырехмерная геометрия и топология
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: С. Ким, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

Аннотация

Данный курс посвящен четырехмерному пространству, под которым понимается математический объект, обобщающий свойства трехмерного пространства. Его не следует путать с четырехмерным пространством-временем теории относительности (пространством Минковского). Алгебраически четырехмерное пространство может быть построено как множество векторов с четырьмя вещественными координатами. Геометрически в простейшем случае четырехмерное пространство рассматривается как евклидово пространство четырех измерений, в более общем рассмотрении оно имеет неевклидову метрику, переменную от точки к точке. Именно этому посвящен данный курс.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Цель заключается в систематизации знаний по четырехмерной геометрии, освоение основных понятий.

Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области теории узлов
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории узлов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории узлов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- ☐ гипотезу Пуанкаре
- ☐ основные теоремы курса;

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение.

владеть:

- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ предметным ясными понятиями четырехмерной геометрии и топологии

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Гипотеза Пуанкаре	2	2		9
2	Топологические 4-мерные многообразия и h- кобордизмы	4	4		10
3	Инвариант раскрашенных узлов	6	6		12
4	Канонический класс	2	2		10
5	Топологическая классификация Фридмана	8	8		16
6	Эллиптические поверхности. Инварианты	8	8		18
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	135 час., 3 зач.ед.
--------------------	---------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Гипотеза Пуанкаре

Дормулировка, схема доказательства. Обобщённая гипотеза Пуанкаре

2. Топологические 4-мерные многообразия и h -кобордизмы

Топологические 4-мерные многообразия и h -кобордизмы, Ручки Кассона, Теорема Фридмана.

3. Инвариант раскрашенных узлов

Форма пересечения, Signature, $K3$ поверхность (The intersection form. Signatures. The $K3$ surface.). Теорема Уайтхеда, (The Whitehead theorem). Теорема Рохлина (Rokhlin's theorem).

4. Канонический класс

Канонический класс, Серре классификация форм.

5. Топологическая классификация Фридмана

Топологическая классификация Фридмана, Нереализуемая форма гладкими многообразиями, Гладкие структуры Комплексная геометрия. Классификация Енрикс-Кодаира

6. Эллиптические поверхности. Инварианты

Эллиптические поверхности. Инвариант Доналдсона. Инвариант Зейберга-Виттена. Калибровочная инвариантность

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Электронный ресурс] : [учебник] / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн .— 4-е изд., стереотип. — М. : Физматлит, 2005 .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).
2. Элементарная топология [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / О. Я. Виро [и др.] .— М. : МЦНМО, 2010 .— 352 с. - Библиогр.: с. 350. - Предм. указ.: с. 351-355. - 1500 экз. - ISBN 978-5-94057-587-0 (в пер.) .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

Дополнительная литература

1. Алгебраическая топология [Текст] / А. Хатчер пер. с англ. В. В. Прасолова ; под ред. Т. Е. Панова - М.МЦНМО,2011

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

учебная аудитория, экран и проектор.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	3
квалификация:	бакалавр
Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет	
Разработчик:	С. Ким, канд. физ.-мат. наук, доцент

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-4 Способен осуществлять сбор и обработку научно-технической и (или) технологической информации для решения фундаментальных и прикладных задач	ОПК-4.1 Владеет методами научного поиска и интеллектуального анализа информации при решении задач профессиональной деятельности
	ОПК-4.2 Знает основные источники научно-технической и (или) технологической информации в области профессиональной деятельности
	ОПК-4.3 Умеет составлять аннотации, рефераты, библиографические перечни и обзоры информации в области своей профессиональной деятельности
	ОПК-4.4 Владеет навыками работы с компьютером и компьютерными сетями с целью получения, хранения и обработки научной (технической, технологической) информации
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Четырехмерная геометрия и топология» обучающийся должен:

знать:

- ☐ гипотезу Пуанкаре
- ☐ основные теоремы курса;

уметь:

- ☐ понять поставленную задачу;
- ☐ использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- ☐ оценивать корректность постановок задач;
- ☐ строго доказывать или опровергать утверждение.

владеть:

- ☐ навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- ☐ предметным ясным понятиями четырехмерной геометрии и топологии

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Контрольная работа (пример)

1. Вычислить число раскрасок в три цвета для трилистника. Показать, что трилистник нетривиален.
2. Построить минимальную диаграмму узла с 13 перекрестками.
3. Вычислить скобку Кауфмана (и полином Джонса) для восьмёрки.
4. Вычислить фундаментальные группы тора
5. Вычислить количество правильных раскрасок квандром $(Z_5, *)$, $a*b = 2b - a$ для трилистника и восьмерки.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Примеры заданий к зачету:

1. Вычислить коэффициент зацепления для Уайтхеда.
2. Проверить, что при замене проходов на переходы в скобке Кауфмана происходит замена $a \rightarrow a^{-1}$;
3. Посчитать скобку Кауфмана для левого трилистника.
4. Посчитать инвариант Конвея для восьмерки.
5. Найти представление фундаментальной группы правого трилистника.
6. Вычислить определитель узлов для 5_1 . Уточнить, что для какого простого числа p можно нетривиально раскрасить узел 5_1 квандром $(Z_p, *)$, $a*b = 2b - a$.
7. Сформулировать теорему Александра и теорему Маркова. Преобразовать данную диаграмму в форму косы.
8. Вычислить примитивные элементы для алгебры хордовых диаграмм, в которых есть одночленные соотношения, для порядков 2 и 3.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.