

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

|                            |  |
|----------------------------|--|
|                            | <b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>   |
| <b>по дисциплине:</b>      | Прикладная комбинаторная оптимизация   |
| <b>по направлению:</b>     | Прикладная математика и информатика  |
| <b>профиль подготовки:</b> | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия<br>Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики<br>кафедра дискретной математики |
| <b>курс:</b>               | 4  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Б.И. Гольденгорин, д-р техн. наук, профессор, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

В этом курсе будут рассмотрены задачи коммивояжера и маршрутизации транспортных средств (с ограничениями на емкости транспортных средств, временные интервалы, получение и отправление грузов, периодичность расписаний и т. д.), задачи оптимизации расписаний с прерываниями на одной машине с произвольными временами поступления и завершения работ, произвольными длительностями выполнения работ, произвольными прерываниями и приоритетами (весами), а также широким спектром критериев оптимальности, например, минимизация суммарного взвешенного времени выполнения всех работ или минимизация суммарного взвешенного времени запаздывания выполнения всех работ.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Изучение моделей и алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации, а также алгоритмов для задач размещения, транспортировки товаров и маршрутизации транспортных средств, включая анализ чувствительности и устойчивости, применяемый к задачам о минимальном основном дереве (МОД) и ее вариациях, кратчайшем пути, максимальном потоке - минимальном разрезе.

### Задачи дисциплины

- Основные понятия вычислительных сложностей для задач и алгоритмов (как точных, так и эвристических), которые необходимы для дальнейшего изучения моделей и алгоритмов управления вычислительных методов, алгоритмов анализа больших данных, машинного обучения, исследования операций, теории игр и комбинаторной оптимизации.
- Навыки проектирования, реализации и анализа математических моделей и алгоритмов для решения прикладных задач комбинаторной оптимизации.
- Индивидуального представления исследовательской деятельности по заранее определенной схеме, включая подготовку соответствующего исследовательского отчета и/или научной статьи.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции   | Индикаторы достижения компетенции  |
|--|--|
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности                                | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения   |
|  | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки  |
|  | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов  |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности              | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности                                  |
|  | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области              |
|  | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности  |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
|  | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                  |

**3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)**

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные алгебраические структуры;
- основы анализа и геометрические методы исследования асимптотического поведения дифференциального уравнения;
- статистические методы обработки информации, в частности.

уметь:

- оперировать с алгебраическими и аналитическими объектами;
- понимать геометрический смысл многомерных алгебраических объектов и математических аналитических структур;
- провести первичную статистическую обработку данных и понимать их вероятностную природу;
- понижать размерность исходных данных без существенной потери информации;
- исследовать (математическими статистическими методами) эмпирические зависимости.

владеть:

- основными понятиями моделирования задач комбинаторной оптимизации, методами и алгоритмами их решения.
- навыками алгебраической, функционально-аналитической и статистической грамотности;
- умением применять свои навыки в рамках существующих программных средств (пакетов аналитических вычислений).

**4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий****4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий**

| № | Тема (раздел) дисциплины   | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. |          |                 |                |
|---|--|---|----------|-----------------|----------------|
|   |  | Лекции  | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Эйлеров и гамильтонов цикл, задача коммивояжера, применение этих понятий   | 2   | 2        |                 | 2              |
| 2 | Элементы теории сложности, практическое применение в задачах комбинаторной оптимизации   | 3   | 3        |                 | 3              |
| 3 | Вероятностный анализ алгоритмов и рандомизированные алгоритмы.   | 4   | 4        |                 | 4              |
| 4 | Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации                     | 2   | 2        |                 | 2              |
| 5 | Алгоритм ветвей и правила ветвления  | 2   | 2        |                 | 2              |
| 6 | Алгоритмы для решения труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации с гарантированной максимальной погрешностью и псевдополиномиальные алгоритмы. | 2   | 2        |                 | 2              |

|                       |                    |    |  |    |
|-----------------------|--------------------|----|--|----|
| Итого часов           | 15                 | 15 |  | 15 |
| Подготовка к экзамену | 0 час.             |    |  |    |
| Общая трудоёмкость    | 45 час., 1 зач.ед. |    |  |    |

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 8 (Весенний)

##### 1. Эйлеров и гамильтонов цикл, задача коммивояжера, применение этих понятий

31) Эйлеров и гамильтонов цикл. Задача коммивояжера. Эффективный алгоритм решения задачи нахождения

эйлерова цикла и эйлерова пути в графе. Примеры задач, сводимых к ним.

(Иванов, Кристофидес, Пападимитриу-Стайглиц)

2) Задача о безотходной укладке трапеций одинаковой высоты в полосе той же самой высоты. Различные её

варианты (без возможности переворота, с возможностью переворота, с вывертыванием наизнанку).

Неэффективность модели этой задачи с трапециями-вершинами и эффективность модели с вершинами ? углами

наклона трапеций. Как решать в каждом случае? (лекции, эксклюзив)

3) Эффективный алгоритм для решения задачи минимизации отходов при укладке трапеций одинаковой высоты

в полосе той же самой высоты. (Последняя лекция, эксклюзив).

##### 2. Элементы теории сложности, практическое применение в задачах комбинаторной оптимизации

Понятие задач распознавания из классов P и NP. NP-полноты задачи распознавания. Как доказывать NP-полноту (на примерах). Понятие трудно-решаемой задачи комбинаторной оптимизации и эффективного алгоритма для задачи комбинаторной оптимизации. (Гэри-Джонсон, Пападимитриу-Стайглиц). Анализ задач по комбинаторной оптимизации.

##### 3. Вероятностный анализ алгоритмов и рандомизированные алгоритмы.

1) а)-Задача об устойчивом паросочетании и алгоритм Гейла-Шепли для её решения.

б)-Сложность алгоритма Гейла-Шепли в худшем случае. в)-Использование разложения перестановки на циклы

для более быстрой реализации алгоритма Гейла-Шепли.

(Кнут, Устойчивые паросочетания: а-лекции 2, б-4 и в-6)

2) Вероятностный анализ алгоритмов. а)-Анализ среднего количества присваиваний при нахождении

максимального элемента массива. б)-Принцип отложенных решений в вероятностном анализе. Задача

собиранья купонов. Оценка сверху среднего количества операций переприсваивания в алгоритме Гейла-Шепли

при случайных матрицах предпочтений (а-Кнут, Искусство программирования, том 1, б-Кнут, Устойчивые

паросочетания, лекции 2 и 4).

3) а)-Порождение случайных перестановок. Метод Монте-Карло для подсчета многомерных интегралов.

б)-Быстрая сортировка со случайным выбором разделяющего элемента.

в)-Алгоритмы Монте-Карло, Лас-Вегаса и шершвудские алгоритмы, примеры таких алгоритмов. (а - Кнут

Искусство программирования, том 3, б-Кормен, в-Макконел и презентация Андреевой)

4) Более детальный разбор некоторых рандомизированных алгоритмов. а)-Алгоритм Миллера-Рабина для

проверки на простоту и его сложность. Почему он работает?

б)-Рандомизированный алгоритм поиска минимального разреза в мультиграфе.

(а-Кормен, б-Презентация Андреевой, книга Motwani)

4. Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов прикладной комбинаторной оптимизации

1) Совместное использование математических и алгоритмических основ при разработке алгоритмов на примере

решения в натуральных числах уравнения  $a/(b+c)+b/(a+c)+c/(b+a)=4$ .

(интернет-ссылки во время чтения курса)

2) а)-Понятие ЧУМа, теорема Мирского. б)-Решение задачи о разбиении набора точек на возрастающие

ломанные. (а-Спивак Цепи и антицепи, разбор задачи о людоедах

<https://www.mccme.ru/circles/oim/materials/spivak-04-2.pdf>, википедия. б-Статья Лернер, Волосков

<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/633/1/012066/pdf>

5. Алгоритм ветвей и правила ветвления

3Алгоритм ветвей и границ (АВиГ) для задачи минимизации супермодульной функции и ее приложения к ПЗР. Недвоичные правила ветвления, применяемые к псевдобулевой формулировке ПЗР. Правило ветвления: сделай квадратный член линейным. Задача квадратичного разбиения графа (ЗКРГ) - пример максимизации субмодулярной функции.

6. Алгоритмы для решения труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации с гарантированной максимальной погрешностью и псевдополиномиальные алгоритмы.

1) Алгоритмы для решения труднорешаемых задач с гарантированной максимальной погрешностью.

Относительная, абсолютная погрешность. Алгоритм Кристофидеса для евклидовой задачи коммивояжера.

(Пападимитриу-Стайглиц)

2) Псевдополиномиальные алгоритмы. Алгоритм для решения задачи о рюкзаке с помощью динамического

программирования и его применение к решению задачи о разбиении с ограничением сверху на разбиваемые

числа. Подсчет количества билетов, ?счастливых по-казански?.

(Пападимитриу-Стайглиц, статья для журнала Математическое просвещение)

Программа дисциплины "Комбинаторная оптимизация"; 01.04.02 "Прикладная математика и информатика".

Страница 6 из 10.

3) а)-Алгоритм локального поиска при решении задач комбинаторной оптимизации. б)-Метод отжига.

Применение к задаче коммивояжера (а-Пападимитриу Стайглиц; про отжиг, см. например

<http://vuz.exponenta.ru/PDF/book/bm61.pdf> + статья в википедии)

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

## **6.Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.

### Дополнительная литература

1. Линейная оптимизация (линейное программирование) [Текст] : учебное пособие : М-во высш. и сред. спец. образов. РСФСР / Ю. П. Иванилов .— М. : МФТИ, 1980 .— 82 с.

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<https://www.amazon.com/Boris-Goldengorin/e/B00AR073TE>

<https://www.ohio.edu/engineering/news/news-story.cfm?newsItem=026543AB-5056-A81E-8D51C1E5295E4C34>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций. Используются электронные учебники.

## **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса требуется:

- посещения всех занятий, предусмотренных учебным планом по дисциплине;
- ведения конспекта занятий;
- напряжённой самостоятельной работы студента.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала, подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- решение задач, предлагаемых студентам на занятиях;
- подготовку к выполнению заданий текущей и промежуточной аттестации.

Кроме того рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

|                            |  |
|----------------------------|--|
| <b>по направлению:</b>     | Прикладная математика и информатика  |
| <b>профиль подготовки:</b> | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия<br>Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики<br>кафедра дискретной математики |
| <b>курс:</b>               | 4  |
| <b>квалификация:</b>       | бакалавр   |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 8 (весенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Б.И. Гольденгорин, д-р техн. наук, профессор, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции  | Индикаторы достижения компетенции  |
|---|--|
| ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности   | ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения   |
|   | ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки  |
|   | ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов  |
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности                                       | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности                                  |
|   | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области              |
|   | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности  |
| ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты | ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности |
|   | ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели                  |
|   | ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты             |

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Прикладная комбинаторная оптимизация» обучающийся должен:

### знать:

- основные алгебраические структуры;
- основы анализа и геометрические методы исследования асимптотического поведения дифференциального уравнения;
- статистические методы обработки информации, в частности.

### уметь:

- оперировать с алгебраическими и аналитическими объектами;
- понимать геометрический смысл многомерных алгебраических объектов и математических аналитических структур;
- провести первичную статистическую обработку данных и понимать их вероятностную природу;
- понижать размерность исходных данных без существенной потери информации;
- исследовать (математическими статистическими методами) эмпирические зависимости.

### владеть:

- основными понятиями моделирования задач комбинаторной оптимизации, методами и алгоритмами их решения.
- навыками алгебраической, функционально-аналитической и статистической грамотности;
- умением применять свои навыки в рамках существующих программных средств (пакетов аналитических вычислений).

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю



Домашнее задание (исследовательский проект) будет основано на задачах из теории расписаний, выполняемых индивидуально: Домашние задания будут назначаться, начиная с четвертой недели только один раз в неделю. Поздняя сдача заданий будет принята со штрафом. Студенты, использующие чужую работу без ссылок (плагиат), получают неудовлетворительную оценку по курсу. Студенты должны будут выполнить свой исследовательский проект, используя следующие 5 шагов.

1. Постановка задачи, ее математическая модель и иллюстративный численный пример.
2. Обзор публикаций, связанных с вашей задачей, включая анализ математических моделей, алгоритмов, эталонных тестов и вычислительных исследований.
3. Проектирование и иллюстрация вашего алгоритма на численном примере.
4. Реализация вашего алгоритма и анализ вычислительных экспериментов.
5. Письменный научно-исследовательский отчет о результатах вашего исследования и его индивидуальная презентация.

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Задачи о минимальном остовном дереве с анализом единственности и устойчивости их оптимальных решений.
2. Прерываемые задачи планирования на одной машине с различными целевыми функциями.
3. Задача коммивояжера ЗК: обзор моделей и алгоритмов ее решения.
4. Допуски: верхние, нижние, и горлышковые в прикладной комбинаторной оптимизации.
5. Алгоритм ветвей и границ для симметричной ЗК (СЗК).
6. Алгоритм ветвей и границ для несимметричной ЗК (НЗК).
7. Алгоритм на основе верхних допусков для НЗК.
8. Алгоритм на основе нижних допусков для НЗК.
9. Корректирующие алгоритмы решения оптимизационных задач с действительными целевыми функциями.
10. Корректирующие алгоритмы решения НЗК и Простейшей Задачи Размещения (ПЗР).
11. Эвристики для решения ЗК: жадная (ближайший сосед на пути), жадная на основе допусков, ближайший сосед для подцикла; 2, 3-окрестностей.
12. Введение в субмодулярные функции: локальные, глобальные максимумы на диаграмме Хассе и их связанные компоненты.
13. Супермодулярность целевой функции в ПЗР и алгоритм ветвей без границ.
14. Теорема Черенина-Хачатурова. Правила отбраковки и правила сохранения. Алгоритм дихотомии (предварительного сохранения).
15. Алгоритм ветвей и границ (АВиГ) для задачи минимизации супермодулярной функции и ее приложения к ПЗР.
16. Недвоичные правила ветвления, применяемые к псевдоболевой формулировке ПЗР. Правило ветвления: сделай квадратный член линейным.
17. Задача квадратичного разбиения графа (ЗКРГ).
18. Теорема Черенина (квазивогнутость субмодулярных функций).
19. Жадный алгоритм для функций субмодулярного множества.
20. Псевдоболевы полиномы, применяемые к Простому расположению завода (SPLP).
21. Точные и эвристические алгоритмы для ПЗР.
22. Теорема усечения псевдо – булевского полинома для задачи о  $p$ -медиане задачи и ее применения для построения алгоритмов.
23. Агрегирование 2-мерных (обычных) матриц. Теорема Дилворса.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.