

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

| | |
|----------------------------|--|
| | Рабочая программа дисциплины (модуля) |
| по дисциплине: | Математические модели и численные методы в финансах |
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Программу составил: И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебно-воспитательной работе

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 01.06.2023

Аннотация

В курсе рассматриваются вопросы построения математических моделей и применения вычислительных методов в области финансов. В частности в таких разделах финансов как расчет цены и управление рисками производных финансовых инструментов.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

- знакомство с основными понятиями и моделями области численных финансов, приобретения навыков применения вычислительных методов к типовым задачам в этой области.

Задачи дисциплины

- познакомить с основными моделями численных финансов;
- решать задачи применяя навыки вычислительных методов.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные типы финансовых и производных финансовых инструментов;
- основные математические модели, применяемые для моделирования производных инструментов.

уметь:

- применять вычислительные методы для решения задач численных финансов.

владеть:

- принципами построения моделей и реализации численных методов в финансах.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

| № | Тема (раздел) дисциплины | Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час. | | | |
|-----------------------|--|---|----------|-----------------|----------------|
| | | Лекции | Семинары | Лаборат. работы | Самост. работа |
| 1 | Обзор задач моделирования в финансах, базовые понятия. | 4 | 4 | | 6 |
| 2 | Биномиальная модель вычисления цены опционов. | 2 | 2 | | 6 |
| 3 | Построение модели вычисления цены опционов в непрерывном времени. | 2 | 2 | | 6 |
| 4 | Интеграл Ито. | 2 | 2 | | 6 |
| 5 | Модель Блэка-Шоульца-Мертона. Расчет цены опциона через численное решение уравнения в частных производных. | 2 | 2 | | 6 |
| 6 | Поверхность волатильности. | 2 | 2 | | 5 |
| 7 | Задачи проп-трейдинга. | 2 | 2 | | 5 |
| 8 | Опционы в задачах алгоритмической торговли. | 2 | 2 | | 5 |
| 9 | Линейные производные продукты. | 2 | 2 | | 5 |
| 10 | Задачи оптимизации в управлении рисками. | 2 | 2 | | 5 |
| 11 | Кредитные инструменты. Стохастические модели процентных ставок. | 2 | 2 | | 5 |
| 12 | Кредитный риск. | 2 | 2 | | 5 |
| 13 | Оценка активов и управление портфелем. | 2 | 2 | | 5 |
| 14 | Свопы на волатильность. | 2 | 2 | | 5 |
| Итого часов | | 30 | 30 | | 75 |
| Подготовка к экзамену | | 0 час. | | | |
| Общая трудоёмкость | | 135 час., 3 зач.ед. | | | |

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Обзор задач моделирования в финансах, базовые понятия.

Обзор типов финансовых компаний и задач, которые они решают. Основные предпосылки построения моделей, экономические обоснования. Типы и основные особенности финансовых данных. Временная стоимость денег. Дисконтирование.

2. Биномиальная модель вычисления цены опционов.

Определения, базовые термины. Пут-колл паритет опционов. Упражнение на репликацию: структурный форвард. Биномиальная модель. Анализ одношагового случая. Риск нейтральная вероятность в этой модели. Многошаговый случай, модель Кокса-Роса-Рубинштейна.

Примеры задач: расчет Европейского и Американского опционов в модели Кокса-Роса-Рубинштейна. Анализ прибыльности исполнения Американского колл опциона до эскапири. Репликация хеджирование бинарного опциона европейскими опционами.

3. Построение модели вычисления цены опционов в непрерывном времени.

Броуновское движение: интуиция, математическое определение, основные свойства (без доказательств). Недифференцируемость винеровского процесса. Формула Ито. (без доказательств). Геометрическое броуновское движение. Риск нейтральная мера в случае непрерывного времени. Преобразование уравнения геометрического броуновского движения рискованного актива при переходе в риск нейтральную меру. Применение метода Монте-Карло для вычисления цен опционов. Разбор примеров кода с реализацией.

Пример задач: расчет цены разных типов опционов: барьерного, бинарного и т. п. Конструирование заданной функции выплаты на основе опционов колл и пут.

4. Интеграл Ито.

Построение интеграла Ито. Некоторые свойства интеграла Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Примеры стохастических дифференциальных уравнений, использующихся в моделировании финансовых задач. Примеры задач: компьютерная симуляция процесса, основываемого стохастическим дифференциальным уравнением.

5. Модель Блэка-Шоулца-Мертона. Расчет цены опциона через численное решение уравнения в частных производных.

Модель Блэка-Шоулца-Мертона. Предположения модели. Общий ход рассуждений. Динамическое хеджирование дельта-риска. Уравнение Блэка-Шоулца в частных производных. Формула Блэка-Шоулца для Европейского опциона. Дифференциальные показатели риска, "греки".

Возможные разностные схемы. Явная, неявная, схема Кранка-Николсона. Разбор примера реализации вычисления на основе схемы Кранка-Николсона.

Пример задач: примирение вычисления на основе схемы Кранка-Николсона к бинарному опциону.

6. Поверхность волатильности.

Поверхность волатильности. Примеры. Соглашения по квортированию волатильности на рынке разных рангах опционов. Возможные подходы к построению более сложных моделей. Локальная волатильность. Стохастическая волатильность: модель Хестона, модель SABR. Модель диффузии со скачками.

7. Задачи проп-трейдинга.

Что такое проп-трейдинг. Основные типы инструментов. Как происходит взаимодействие с биржей. Как устроены биржевые данные. Проблемы применения моделей машинного обучения к биржевым данным.

8. Опционы в задачах алгоритмической торговли.

Опционы, работа с биржевыми данными. Три вида волатильности: implied, realized и model-free. Поверхность волатильности и кривая “улыбки”. Особенности биржевых данных по опционам. Модель Блэка-Шоульца-Мертона: проблемы и достоинства. Важность стохастичности волатильности. Переход к vol-time для детерминированной функции времени.

9. Линейные производные продукты.

Форвадр. Фьючерс. Особенности и механизмы работы биржевого рынка производных инструментов. Своп. Задача восстановления кривой дисконтирования.

10. Задачи оптимизации в управлении рисками.

Классы задач оптимизации: линейное программирование, квадратичное программирование, коническое программирование. Примеры пакетов. Задачи на примере оптимизации портфеля. Задача оптимизации вега хеджа для портфеля опционов.

11. Кредитные инструменты. Стохастические модели процентных ставок.

Процентные ставки, базовые понятия. Дисконтирование с переменной ставкой. Описание инструментов и их особенности. Обзор стохастических моделей процентных ставок. Модель НЖМ.

Работа рынка кредитов. Роль коммерческих банков в создании денежной массы. Частичное банковское резервирование. Банковский мультипликатор. Теория эндогенных денег.

12. Кредитный риск.

Актуальность проблемы оценки и управления кредитным риском. Кредитные производные финансовые инструменты. Задача восстановления вероятности кредитного события по рыночным ценам кредитных инструментов.

13. Оценка активов и управление портфелем.

Функция полезности. Формализм теории ценообразования активов. Корреляция рисков. Систематический и идиосинкратический риск. Рыночная премия за риск. Граница эффективности по соотношению ожидаемой доходности и стандартного отклонения. Факторные модели. Модель оценки капитальных активов (CAPM). Теория арбитражного ценообразования.

14. Свопы на волатильность.

Свопы на волатильность. Возможность оценки цены и управления рисками для производных инструментов на неполных рынках. Примеры анализа эффективности использования производных инструментов.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Основы математической теории финансов [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. В. Куликов ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) . — М. : МФТИ, 2013 . — 105 с.

Дополнительная литература

1. Финансовая математика [Текст] : учебник для вузов по спец. "Финансы и кредит", "Бухгалтерский учет" / Е. М. Четыркин .— 8-е изд. — М. : Изд-во "Дело" АНХ, 2008 .— 400 с. - Библиогр. в конце глав. - 5000 экз. - ISBN 978-5-7749-0504-1 (в пер.).

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- проработку учебного материала;
- подготовку к занятиям, выполнение заданий.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

| | |
|---|--|
| по направлению: | Прикладная математика и информатика |
| профиль подготовки: | Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики |
| курс: | 4 |
| квалификация: | бакалавр |
| Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет | |
| Разработчик: | И.Г. Эрлих, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора по учебно-воспитательной работе |

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

| Код и наименование компетенции | Индикаторы достижения компетенции |
|---|---|
| ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности | ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности |
| | ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области |
| | ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности |
| ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты) | ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения |
| | ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов) |
| | ОПК-3.3 Владеет методами визуального и графического представления результатов научной (научно-технической, инновационной технологической) деятельности в виде отчетов, научных публикаций |
| ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию | ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации |
| | ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива |
| | ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях |

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математические модели и численные методы в финансах» обучающийся должен:

знать:

- основные типы финансовых и производных финансовых инструментов;
- основные математические модели, применяемые для моделирования производных инструментов.

уметь:

- применять вычислительные методы для решения задач численных финансов.

владеть:

- принципами построения моделей и реализации численных методов в финансах.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Рассчитать доходности облигации до погашения для заданных параметров облигации.
2. Восстановить кривую процентных ставок по заданным ценам инструментов.
3. Сделать численную симуляцию работы стратегии дельта-хеджирования для ванильного опциона.
4. Провести анализ эффекта параметров стратегии на распределение результатов работы стратегии.
5. Репликация заданной функции выплаты через портфель ванильных опционов.
6. Суть стратегии дельта-хеджирования.

7. Сделать расчета цена опциона методом Монте-Карло.
8. Решить задачу расчета цена опциона с заданной функцией выплаты, используя численное решение уравнения Блэка-Шоульца в частных производных.
9. Сделать расчет цены опциона с заданной функцией выплаты в предположении модели Хестона.
10. Сделать расчет для задача оптимизации вега-хэджа для портфеля опционов.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Что такое облигация? Какими параметрами задается этот инструмент?
2. Как рассчитывается доходности облигации до погашения?
3. Что может влиять на рыночную цену облигации?
4. Что такое форвард и фьючерс, в чём сходство и отличие?
5. Как определяется честная цена форварда?
6. Как работает алгоритм восстановления кривой процентных ставок по рыночным ценам финансовых инструментов?
7. Модель Блэка-Шоульца-Мерттона: предположения, ход рассуждений для вывода формулы цены опциона в этой модели.
8. Формула Ито.
9. Какие проблемы связаны с применением модели Блэка-Шоульца-Мерттона на практике? Какие есть пути решения этих проблем?
10. Хеджирование опционов в условиях предположения модели стохастической волатильности.
11. Как работает кредитный дефолтный своп? Какие применения у такого инструмента?
12. Модель оценки капитальных активов.

Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференциального зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.