

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Математический аппарат концептуальных методов
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра концептуального анализа и проектирования
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Программу составил: И.Р. Борисов

Программа обсуждена на заседании кафедры концептуального анализа и проектирования 01.03.2023

Аннотация

В курсе рассматриваются аксиоматическая теория множеств и теория структур Н. Бурбаки, лежащие в основе математического аппарата, используемого для экспликации систем понятий при концептуальном анализе и проектировании. Особое внимание уделяется использованию аппарата родов структур Бурбаки для описания объектов и формального вывода свойств этих объектов, а также использованию формальных операций над родами структур.

Курс предполагает получение практического опыта экспликации систем понятий в аппарате родов структур и ознакомление с экспликациями некоторых математических конструктов.

Для освоения курса слушателю желательно знать основы математической логики.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Обеспечить теоретическую базу для успешного применения языка теории множеств и аппарата родов структур в прикладном моделировании предметных областей путём изучения аксиоматической теории множеств и основных её результатов, основ аппарата родов структур.

Задачи дисциплины

- Сформировать целостное представление об аксиоматике теории множеств и познакомить с кругом вопросов, рассматриваемых аксиоматической теорией множеств;
- овладеть навыками решения задач, связанных со свойствами операций над множествами, свойствами упорядоченных множеств и сравнением множеств по мощности;
- ознакомить с аппаратом родов структур Бурбаки и операциями над родами структур, овладеть навыками создания родоструктурных текстов и проведения формальных операций с ними.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

- Язык теории множеств и аксиоматику ZFC теории множеств, причины, приведшие к её формированию, роль каждой из аксиом;
- определение операций над множествами и их свойства;
- свойства множеств, связанные с мощностями и порядковыми типами;
- язык аппарата родов структур;
- определение формальных операций над родами структур.

уметь:

- Пользоваться формальным выводом в теории множеств с применением аксиоматики ZFC;
- решать задачи, связанные с рассматриваемыми теоретическими вопросами;
- пользоваться аппаратом родов структур Бурбаки для описания математических объектов и формального вывода свойств этих объектов;
- пользоваться формальными операциями над родами структур.

владеть:

Навыками и решать задачи, связанные с рассматриваемыми теоретическими вопросами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Введение. Наивная теория множеств. Парадокс Рассела.	3	3		3
2	Моделирование с помощью систем определений. Потребность в математическом аппарате.	3	3		3
3	Аксиоматическая теория множеств. Основные термы и их свойства.	3	3		3
4	Экспликация систем понятий в теории множеств. Экстенсионализация.	3	3		3
5	Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Натуральные числа.	3	3		3
6	Система типов родоструктурной экспликации. Разворачивание аксиоматической теории.	3	3		3
7	Декартово произведение. Бинарные отношения и их виды.	3	3		3
8	Экспликации математических конструкторов, основанных на бинарном отношении.	3	3		3
9	Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора.	3	3		3
10	Выразительные средства концептуальной схемы. Граф термов.	3	3		3
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	90 час., 2 зач.ед.
--------------------	--------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

1. Введение. Наивная теория множеств. Парадокс Рассела.

- 1.1. Введение. Основные понятия и обозначения
- 1.2. Обзорное повторение математической логики
- 1.3. Предикат принадлежности и его семантика. Предикаты подмножества и равенства
- 1.4. Аксиома экстенциональности
- 1.5. Наивная теория множеств. Схема неограниченного выделения
- 1.6. Парадокс Рассела. Понятие «неколлективизирующая формула»

2. Моделирование с помощью систем определений. Потребность в математическом аппарате.

- 2.1. Общее понимание моделирования как редукционного представления действительности
- 2.2. Понятие как тройка: знак, содержание, объем
- 2.3. Применение определений для выражения содержания
- 2.4. Моделирование с помощью систем понятий (систем определений)
- 2.5. Экспликация содержания. Необходимость формального языка
- 2.6. Требования к языку формальной экспликации

3. Аксиоматическая теория множеств. Основные термы и их свойства.

- 3.1. Аксиомы ZFC и прямые следствия
- 3.2. Семантика и назначение аксиом ZFC
- 3.3. Схема ограниченного выделения. Булеан — множество-степень. Основные термы теории множеств
- 3.4. Диаграммы Эдвардса-Венна
- 3.5. Свойства основных термов

4. Экспликация систем понятий в теории множеств. Экстенсионализация.

- 4.1. Система определений как аксиоматическая теория. Концептуальная схема
- 4.2. Базовые и производные понятия
- 4.3. Экстенсиональные и интенциональные представления понятий
- 4.4. Экстенсионализация. Семантика множества
- 4.5. Базисные множества. Конвенция. Простейшие родовые структуры
- 4.6. Утверждения и определения
- 4.7. Теоретико-множественные термы как определения понятий
- 4.8. Лингвистическая интерпретация формального выражения. Терминологизация
- 4.9. Экспликации концептуальных схем «Подмножество», «Абстрактный выбор»

5. Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Натуральные числа.

- 5.1. Понятие неупорядоченной n-ки. Определение множества перечислением
- 5.2. Понятие кортежа как упорядоченной n-ки. Предикат равенства кортежей. Малая проекция
- 5.3. Упорядоченная пара и n-ки по Куратовскому. Свойства упорядоченной пары
- 5.4. Счетная индукция. Счетная рекурсия
- 5.5. Аксиоматическое определение натуральных чисел по фон-Нейману
- 5.6. Доказательство свойств натуральных чисел

5.7. Вывод арифметических операций

6. Система типов родоструктурной экспликации. Разворачивание аксиоматической теории.

6.1. Понятие конститuenty и соответствующего ей типа данных

6.2. Константные множества. Моделирование натуральных чисел

6.3. Аксиомы и аксиоматические термы

6.4. Параметризованные выражения. Терм-функции и предикат-функции

6.5. Дедуктивное раскрытие аксиоматической теории. Формальное и содержательное разворачивание

6.6. Понятие разнообразия и его роль в КАиП

7. Декартово произведение. Бинарные отношения и их виды.

7.1. Декартово произведение как множество кортежей

7.2. Термы: большая проекция, фильтр

7.3. Бинарные отношения на двух множествах. Набор типовых аксиом

7.4. Понятия функция, образ, прообраз, обратное отображение

7.5. Бинарные отношения на одном множестве. Порядки и их свойства

7.6. Отношение эквивалентности

7.7. Понятия наибольшего и наименьшего элемента

8. Экспликации математических конструкторов, основанных на бинарном отношении.

8.1. КС «Бинарное отношение»

8.2. КС «Биективное отображение»

8.3. КС «Линейный порядок», «Отношение эквивалентности»

8.4. КС «Сбалансированное дерево»

8.5. КС «Моноид», «Поле»

9. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора.

9.1. Понятие ординала и кардинала для конечных и счетных множеств

9.2. Сравнение множеств по мощности. Операции над мощностями

9.3. Теорема Кантора-Бернштейна

9.4. Теорема Кантора. Парадокс Кантора

9.5. «Парадокс» Сколема

9.6. Введение в теорию счетных и трансфинитных множеств (без доказательств). Роль аксиомы выбора. Парадокс Бурали-Форти

10. Выразительные средства концептуальной схемы. Граф термов.

10.1. Формальная дедукция с помощью операций со структурой и теоретико-множественных операций

10.2. Содержательная дедукция с помощью ограниченного выделения

10.3. Понятие выразительной способности аксиоматической теории

10.4. Представление концептуальной схемы в виде графа термов

10.5. Особенности транзитивных рёбер в графе термов

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием: проектор, доска, подключение к сети «Интернет».

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Бурбаки Н. Теория множеств: Пер. с фр. / Под ред. В. А. Успенского. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
2. Верещагин Н. К., Шень А. Х. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. — М.: МЦНМО, 2002. — 128 с.
3. Колмогоров А. Н., Драгалин А. Г. Математическая логика. — 2-е, стереотип. изд. — М.: УРСС, 2005. — 240 с.
4. Лавров И. А., Максимова Л. Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 256 с.
5. Пономарёв И. Н. Введение в математическую логику и роды структур. — М.: МФТИ, 2007. — 240 с.

Дополнительная литература

1. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. — М.: Мир, 1973. — 150 с.
2. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. — М.: Мир, 1969. — 347 с.
3. Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г. Шкалы родов структур, термы и соотношения, сохраняющиеся при изоморфизмах. — М.: ВЦ РАН, 2003. — 92 с.
4. Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г. Проблема декомпозиции в математическом моделировании. — М.: ФАЗИС, 1998. — 266 с.
5. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств / Под ред. А. С. Есенина —Вольпина. — М.: Мир, 1966. — 556 с.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

- Windows 10, Skype, Zoom;
- Office 2016: PowerPoint;
- Экстеор 4.8.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий дисциплину, должен с одной стороны, овладеть историей развития и содержанием теории математического аппарата, используемого для экспликации систем понятий, а с другой стороны, должен овладеть навыками применения математического аппарата концептуальных методов для построения концептуальных моделей элементарных предметных областей.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- решение заданий для текущего контроля,
- использование изучаемых программных средств для решения предлагаемых тестовых задач и самостоятельно поставленных исследований,
- проработку учебного материала (учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- подготовку к дифференцированному зачету.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра концептуального анализа и проектирования
курс:	4
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: И.Р. Борисов

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Математический аппарат концептуальных методов » обучающийся должен:

знать:

- Язык теории множеств и аксиоматику ZFC теории множеств, причины, приведшие к её формированию, роль каждой из аксиом;
- определение операций над множествами и их свойства;
- свойства множеств, связанные с мощностями и порядковыми типами;
- язык аппарата родов структур;
- определение формальных операций над родами структур.

уметь:

- Пользоваться формальным выводом в теории множеств с применением аксиоматики ZFC;
- решать задачи, связанные с рассматриваемыми теоретическими вопросами;
- пользоваться аппаратом родов структур Бурбаки для описания математических объектов и формального вывода свойств этих объектов;
- пользоваться формальными операциями над родами структур.

владеть:

Навыками и решать задачи, связанные с рассматриваемыми теоретическими вопросами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Задания в прикрепленном документе.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Отношения «принадлежать» и «быть подмножеством».
2. Аксиома экстенциональности и отношение равенства множеств.
3. Парадокс Рассела.
4. Аксиоматизация теории множеств (система Цермело-Френкеля).
5. Понятия концептуальной схемы, определение, формальная экспликация.
6. Подход к моделированию с помощью систем понятий.
7. Упорядоченная пара по Куратовскому, декартово произведение. Функция, инъекция, сюръекция, биекция. Проекция, образы, композиции.
8. Аксиома бесконечности и построение множества натуральных чисел по фон Нейману.
9. Счётная индукция и рекурсия.
10. Построение арифметических операций.
11. Экстенсионализация. Экспликация концептуальных схем с помощью теории множеств. Базовые и выводимые понятия. Формальные выражения. Конвенция. Интерпретация
12. Сравнение множеств по мощности.
13. Теорема Кантора–Бернштейна.
14. Теорема Кантора.
15. Парадокс Кантора.
16. Бинарные отношения на одном множестве: эквивалентность и порядок. Минимальные/наименьшие, максимальные/наибольшие элементы и грани частично упорядоченных множеств.

Критерии оценивания

отлично (10) - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

отлично (9) - выставляется студенту, показавшему свободное оперирование знаниями учебной программы дисциплины, выполнение заданий творческого характера.

отлично (8) - выставляется студенту, показавшему владение программным учебным материалом с наличием несущественных ошибок в действиях, самостоятельно исправляемых учащимся.

хорошо (7) - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускается в ответе или в решении задач некоторые неточности.

хорошо (6) - выставляется студенту если он осознает воспроизведение программного учебного материала, в том числе и различной степени сложности, с несущественными ошибками, затруднения в применении отдельных навыков.

хорошо (5) - выставляется студенту если теоретическое содержание освоено не полностью, некоторые практические навыки сформированы недостаточно, в некоторых случаях были допущены ошибки.

удовлетворительно (4) - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

удовлетворительно (3) - выставляется студенту в случае большого количества недочетов и неправильных ответов, а также пассивной работе в ходе занятий, многие учебные задания не выполнены.

неудовлетворительно (2) - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

неудовлетворительно (1) - выставляется студенту, который не освоил теоретическое и практическое содержание курса, все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося по билету на дифференцированном зачете не должен превышать одного астрономического часа.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, конспектами лекций или другими материалами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры заданий для текущего контроля

1. Какой ступеню задаётся

а) пара вида «пара вида «элемент x_1 , множество элементов x_1 », пара вида «элемент x_1 , множество элементов x_1 »?»

б) множество множеств множеств пар вида «множество элементов x_1 , множество элементов x_2 »?

2. Изобразите М-графы и вычислите ранги ступеней

а) $\mathbb{P}\mathbb{P}(x_2) \times (\mathbb{P}(x_1) \times x_1)$

б) $\mathbb{P}(\mathbb{P}(x_2 \times x_1) \times \mathbb{P}(x_2 \times x_1))$

3. Шкалой над множествами x_1, \dots, x_n называется множество всех возможных ступеней, которые можно построить над этими множествами. Какова мощность шкалы над единственным множеством x_1 ?

1. Изобразите М-граф и вычислите ранг ступени $\mathbb{P}(x_1 \times x_2) \times \mathbb{P}\mathbb{P}(x_1 \times x_2)$.

2. Пусть ξ — биективно переносимый терм с типом $\mathbb{P}S_\xi[x_1, \dots]$, R — удовлетворяет условиям теоремы о биективной переносимости терма $\{t \in S[\dots] \mid R\}$. Введём сокращающее обозначение

$$\exists t \in \xi R \iff \exists t \in S_\xi[x_1, \dots](t \in \xi \& R).$$

Докажите, что соотношение $\exists t \in \xi R$ биективно переносимо. Указание: воспользуйтесь теоремами из предыдущей лекции.

3. Докажите, что $x_1 = x_2$ не является биективно переносимым соотношением.

1. Пусть $d \in \mathfrak{P}(x_1 \times x_2)$.

1. докажите биективную переносимость соотношения

$$\forall v \in x_2, \exists u \in x_1 \times x_2 (u \in d \& \text{pr}_2(u) = v)$$

2. докажите биективную переносимость и вычислите типизацию терма

$$\{t \in \mathfrak{P}(x_1) \mid \exists u \in x_2 t = \{a \in x_1 \mid \exists v \in x_1 \times x_2 (v \in d \& \text{pr}_1(v) = a \& \text{pr}_2(v) = u)\}\}$$

2. Пусть $d \in \mathfrak{P}\mathfrak{P}(x_1)$.

1. докажите биективную переносимость соотношения

$$\forall a \in \mathfrak{P}(x_1), \forall b \in \mathfrak{P}(x_1), \forall t \in x_1 ((t \in a \Rightarrow t \in b) \Rightarrow b \in d)$$

2. докажите биективную переносимость и вычислите типизацию терма

$$\{t \in x_1 \mid \exists v \in \mathfrak{P}(x_1) (v \in d \& t \in v)\}$$

3. Докажите, что

$$\tau(\underbrace{\bigcup \dots \bigcup}_{n \text{ раз}}(\xi)) = \mathfrak{P}(D^{n+1}\tau(\xi)).$$

1. Проверьте биективную переносимость аксиомы и терма рода структуры:

1. x_1

2. x_2

3. $d_1 \in \mathfrak{P}((x_1 \times x_1) \times x_2)$

4. $\forall e \subseteq d_1 (\text{Pr}_1(\text{Pr}_1(e)) \neq \text{Pr}_2(\text{Pr}_1(e)))$

5. $\{t \in x_1 \times \mathfrak{P}(x_1) \mid \text{pr}_2(t) = \{x \in x_1 \mid \exists d \in d_1 ((\text{pr}_1(\text{pr}_1(d)) = \text{pr}_1(t)) \& (\text{pr}_2(\text{pr}_1(d)) = x))\}\}$

2. Напишите аксиому рода структуры сильно-связного ориентированного графа:

1. x_1 — множество вершин графа.

2. $d \in \mathfrak{P}(x_1 \times x_1)$ — множество ориентированных рёбер.

3. ...

Сильно-связный граф — граф, между любой упорядоченной парой двух точек которого существует ориентированный соединяющий путь.