

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория гиперграфов
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 15 час.

семинары: 15 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 15 час.

Всего часов: 45, всего зач. ед.: 1

Программу составил: Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 05.03.2020

## Аннотация

курс посвящен экстремальным задачам в теории гиперграфов. Изучаются проблемы турановского типа в теории графов и гиперграфов, проблемы теории раскрасок гиперграфов, элементы аддитивной комбинаторики и теории Рамсея. Большое внимание уделяется различным вероятностным методам, лежащим в основе доказательств основных теорем.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

освоение основных понятий теории гиперграфов.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций, методов и моделей) в области гиперграфов;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области гиперграфов;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области гиперграфов.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Теоремы: Турана, Эрдеша-Стоуна	2	2		
2	Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов	3	3		
3	Основные определения и понятия	3	3		4
4	Теоремы Алона и Ширера. Теоремы турановского типа.	3	3		4
5	О раскрасках гиперграфов	2	2		4
6	Упаковки гиперграфов.	2	2		3
Итого часов		15	15		15
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		45 час., 1 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

###### 1. Теоремы: Турана, Эрдеша-Стоуна

Теорема Турана, Теорема Эрдеша-Стоуна Задача Турана. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.

## 2. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов

Числа Турана для гиперграфов. Теорема турановского типа для графов без треугольников.

## 3. Основные определения и понятия

Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша. Оценки чисел Рамсея.

## 4. Теоремы Алона и Ширера. Теоремы турановского типа.

Теоремы Алона и Ширера о графах, не содержащих больших клик. Теоремы турановского типа для гиперграфов с большим обхватом. Проблема Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов.

## 5. О раскрасках гиперграфов

Проблема Эрдеша-Хайнала. Критерий Плухара и теорема Черкашина-Козика. Локальная лемма Ловаса и раскраски простых гиперграфов. Теорема Сауэра о регулярных гиперграфах с большим обхватом.

## 6. Упаковки гиперграфов.

Упаковки гиперграфов. Метод контейнеров, теорема Ордендлиха-Рота. Элементы аддитивной комбинаторики

## **5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)**

Стандартная учебная аудитория.

## **6. Перечень рекомендуемой литературы**

### Основная литература

1. Вероятностный метод [Текст], учеб. пособие для вузов /Н. Алон, Дж. Спенсер ; пер. 2-го англ. изд. под ред. А. А. Сапоженко. -М., БИНОМ. Лаб. знаний, 2007, 2013, 2015 (эл.)

### Дополнительная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с. - Библиогр.: с. 99. - 3000 экз. - ISBN 978-5-91559-147-8 .— Полный текст (Режим доступа : доступ из сети МФТИ).

## **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru/>

## **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Д.А. Шабанов, д-р физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-5 Способен участвовать в проведении фундаментальных и прикладных исследований и разработок, самостоятельно осваивать новые теоретические, в том числе, математические методы исследований и работать на современной экспериментальной научно-исследовательской, измерительно-аналитической и технологической аппаратуре	ОПК-5.2 Обладает способностью к освоению новых знаний на основе изучения литературы, научных статей и других источников
	ОПК-5.3 Способен к профессиональной эксплуатации современной экспериментальной научно-исследовательской (измерительно-аналитической и технологической) аппаратуры
	ОПК-5.1 Способен решать поставленные задачи в области теоретических и экспериментальных исследований и разработок
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория гиперграфов» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, законы, теории случайных гиперграфов;
- современные проблемы соответствующих разделов случайных гиперграфов;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач случайных гиперграфов.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач случайных гиперграфов;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области сложных вычислений в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач ( в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов случайных гиперграфов;
- предметным языком сложных вычислений и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Основные определения и понятия.
2. Графические последовательности. Алгоритм определения, графические последовательности и теорема Галлаи-Эрдёша.
3. Связность. Остовное дерево. Различные задачи об остовных деревьях.
4. Простейшие задачи экстремальной теории графов.
5. Число независимости и кликовое число. Теорема Рамсея (напоминание) и  $(p, q)$ -свойство. Функция независимости графа. Критерий двудольности и функция независимости. Задачи рамсеевского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
6. Трансверсаль в графе и число независимости. Реберные графы и теорема Галлаи о максимальном парасочетании.
7. Локальные теоремы Галлаи-Эрдёша о числе вершин и теорема Боллобаша о числе рёбер, гарантирующие существование  $k$ -трансверсали. Обобщения этих теорем для гиперграфов.
8. Задача Турана. Теорема Моцкина-Стросса. Обобщения для гиперграфов. Задачи туранского типа для классов графов и гиперграфов из комбинаторной геометрии.
9. Обобщения задачи Турана для графов и гиперграфов.
10. Экстремальная задача о графах без циклов длины 4 и конечные проективные плоскости.
11. Шенновская ёмкость графов и теорема Ловаса о ёмкости цикла длины 5.

### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Теорема Турана для графов. Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости произвольного графа. Числа Турана  $ex(n, G)$  для произвольного графа  $G$ . Верхняя оценка числа Турана  $ex(n, K_{s,t})$ , следствие из нее – оценки числа ребер дистанционного графа в  $R^2$  и  $R^3$ .
2. Теорема Эрдёша-Стоуна об асимптотическом поведении  $ex(n, G)$ .
3. Числа Турана  $T(n, k, b)$  для гиперграфов, понятие  $(n, k, b)$ -системы. Рекуррентные неравенства для чисел  $T(n, k, b)$ , простая нижняя оценка  $T(n, k, b)$ . Турановские плотности  $t(k, b)$ , рекуррентное неравенство для турановских плотностей. Верхняя оценка турановской плотности  $t(k, b)$  (конструкция А. Сидоренко). Теорема Турана для гиперграфов и нижняя оценка Спенсера для  $T(n, k, b)$ . Следствие из нее: нижняя оценка числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа. Нижняя оценка для  $t(k, b)$ , ее порядок при фиксированном  $k$  и растущем  $b$ .
4. Теорема Турана для графов с большим обхватом. Нижняя оценка Айтאי-Комлоша-Семереди (теорема Ширера) для числа независимости графа без треугольников со средней степенью вершины  $d$ . Следствие: верхняя оценка числа Рамсея  $R(3, t)$ . Точность оценки в теореме Айтאי-Комлоша-Семереди (существование графов с небольшим числом независимости и ограниченной средней степенью вершины).
5. Верхняя оценка числа Рамсея  $R(s, t)$  при фиксированном  $s$  и растущем  $t$ .
6. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных  $K_r$ .
7. Теорема Алона о нижней оценке числа независимости графа, в котором у каждой вершины подграф его соседей имеет ограниченное хроматическое число.
8. Теорема о нижней оценке числа независимости  $k$ -однородного гиперграфа с обхватом больше 4 и со средней степенью вершины  $d$  ( $b/d$ ). Аналогичная теорема Рёдля-Дьюка-Лефманна для простых гиперграфов. Следствие: опровержение гипотезы Хейлбронна в комбинаторной геометрии.



9. Экстремальная задача Эрдеша-Хайнала о раскрасках гиперграфов, простая верхняя оценка. Вероятностная нижняя оценка  $m(k,r)$ . Следствие: нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Вероятностная верхняя оценка  $m(k,r)$ . Теорема Алона об асимптотическом поведении  $m(k,r)$  при растущем  $r$ .

10. Критерий Плухара  $r$ -раскрашиваемости гиперграфа в терминах существования упорядоченных  $r$ -цепей. Нижняя оценка Радхакришнана-Сринивасана для  $m(k,2)$  (доказательство Черкашина-Козика).

11. Теорема Эрдеша-Ловаса об оценке максимальной степени ребра (вершины) в однородном гиперграфе с большим хроматическим числом. Следствие: наилучшая нижняя оценка диагонального числа Рамсея. Задача Эрдеша-Ловаса о раскрасках простых гиперграфов. Их теорема о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом и большим обхватом (б/д). Лемма о свойствах простых гиперграфов с большим хроматическим числом. Следствие: нижняя оценка  $m^*(k,r)$ . Теорема Косточки-Мубай-Рёдля-Тетали о нижней оценке  $m^*(k,r)$  при больших  $r$ .

12. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

13. Теорема Косточки-Рёдля о существовании однородных гиперграфов с большим хроматическим числом, большим обхватом и ограниченными степенями вершин.

14. Упаковки гиперграфов, теорема Лу-Секеи об отрицательных корреляциях в пространстве случайных биекций. Теорема о достаточном условии упаковки гиперграфов. Следствия: достаточное условие совершенной  $G$ -упаковки; оценка для нижней степени вершины, гарантирующей существование совершенного  $k$ -сочетания.

15. Метод контейнеров, теорема Ордендлича-Рота о числе сильных независимых множеств в однородных регулярных простых гиперграфах.

16. Числа Ван дер Вардена  $W(k,r)$ , нижняя оценка в общем случае. Оценки  $W(3,r)$ : нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши

Формула оценки

Зачет проходит в устной форме. На зачете студент должен устно ответить на вопрос из программы и решить задачу. В оценке учитывается и работа в семестре (посещаемость).

Примеры задач на экзамене.

1) Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются. Пусть  $H=(V,E)$  -  $n$ -однородная клика. Какие значения могут принимать  $\tau(H)$  и  $\chi(H)$ ?

2) Пусть  $H=(V,E)$  -  $n$ -однородная клика и  $\chi(H)>2$ . Докажите, что  $|E|\leq n^n$ .

3) Мы знаем, что если  $H$  -  $k$ -однородный гиперграф и  $\Delta(H)\leq 2^{k-1}/ek$ , то  $\chi(H)=2$ . Докажите, что если  $\Delta(H)\leq 2^{k-1}/2ek$ , то для  $H$  можно гарантировать справедливую раскраску в два цвета, т.е. правильную раскраску, в которой мощности цветовых классов будут почти равны (отличаться не более чем на 1).

4) Пусть  $W(n,m)$  - это внедиагональное число Ван дер Вардена, т.е. это минимальное  $N$  т.ч. в любой раскраске  $\{1,\dots,N\}$  в красный и синий цвета найдется либо красная арифметическая прогрессия длины  $n$ , либо синяя арифметическая прогрессия длины  $m$ . Докажите, что при фиксированном  $m$  и растущем  $n$  выполнено

$W(n,m)>c(m) n^{(m-1)/((\ln n)^{(m-1)})}$ .

Примеры билетов:

Билет 1:

1. Теорема Ширера о числе независимости графа, не содержащего подграфов, изоморфных  $K_r$ .

2. Числа Ван дер Вардена  $W(k,r)$ , нижняя оценка в общем случае. Оценки  $W(3,r)$ : нижняя оценка Мозера, верхняя оценка Грэма-Шолимоши

3. Задача: Гиперграф называется кликой, если любые два его ребра пересекаются. Пусть  $H=(V,E)$  -  $n$ -однородная клика. Какие значения могут принимать  $\tau(H)$  и  $\chi(H)$ ?

Билет 2:

1. Теорема Эрдеша-Стоуна об асимптотическом поведении  $ex(n,G)$ .

2. Теорема Сауэра о существовании однородных регулярных гиперграфов с большим обхватом.

3. Задача: Пусть  $W(n,m)$  - это внедиагональное число Ван дер Вардена, т.е. это минимальное  $N$  т.ч. в любой раскраске  $\{1,\dots,N\}$  в красный и синий цвета найдется либо красная арифметическая прогрессия длины  $n$ , либо синяя арифметическая прогрессия длины  $m$ . Докажите, что при фиксированном  $m$  и растущем  $n$  выполнено

$W(n,m)>c(m) n^{(m-1)/((\ln n)^{(m-1)})}$ .

## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированный зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.