

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Методы оптимизации
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 75 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 14.03.2023

## Аннотация

Курс посвящён теоретическим и прикладным аспектам решения задач выпуклой оптимизации. Такие задачи возникают в многочисленных приложениях, часть из которых рассматривается на занятиях. Курс состоит из двух частей. В первой части курса изучаются основные понятия выпуклого анализа, условия оптимальности и даётся введение в теорию двойственности. Основными объектами изучения являются выпуклые множества, выпуклые функции и конусы. Вторая часть курса посвящена численным методам решения задач выпуклой оптимизации как безусловных, так и условных. Проводится анализ эффективности рассматриваемых алгоритмов с точки зрения получения теоретических оценок сходимости и скорости решения конкретных классов задач выпуклой оптимизации. Также демонстрируется использование аппарата выпуклой оптимизации для вычисления приближённых решений задач дискретной оптимизации.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение теоретических и численных методов решения задач конечномерной оптимизации (МО): теории необходимых и достаточных условий локального экстремума гладкой функции по множеству и некоторых численных методов поиска локальных экстремумов в задачах безусловной и условной оптимизации.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций и методов) в области МО;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области МО;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области МО.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен проводить анализ полученных результатов	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации

ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию

ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива

ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, теоремы, численные алгоритмы методов оптимизации (МО);
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием их сходимости;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач (МО).

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач МО;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач МО, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Выпуклые множества, теорема об отделимости	6	4		10
2	Задача линейного программирования	4	4		10
3	Задача математического программирования	4	4		10
4	Конус убывания функции и касательный конус к множеству	4	6		10
5	Критерий локального острого экстремума	4	4		15

6	Многогранный конус и его сопряжённый	4	4		10
7	Необходимое условие локального условного экстремума	4	4		10
Итого часов		30	30		75
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 7 (Осенний)

##### 1. Выпуклые множества, теорема об отделимости

Градиентный метод.

##### 2. Задача линейного программирования

Поиск равновесий Нэша.

##### 3. Задача математического программирования

Барьерные функции. Выпуклые множества.

##### 4. Конус убывания функции и касательный конус к множеству

Дифференцируемость.

##### 5. Критерий локального острого экстремума

Скорость сходимости. Минимизирующие последовательности.

##### 6. Многогранный конус и его сопряжённый

Метод Лагранжа. Модифицированные функции Лагранжа.

##### 7. Необходимое условие локального условного экстремума

Унимодальные функции. Одномерная минимизация.

#### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

#### 6.Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.
2. Численные методы оптимизации [Текст] : [учеб.пособие для вузов] / А.Ф.Измайлов, М.В.Солодов .— М. : Физматлит, 2003, 2005 .— 304 с.

3. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

#### Дополнительная литература

1. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2016
2. Линейная алгебра [Текст], учебник для вузов /В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. -М., Физматлит, 2006, 2007

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
<b>курс:</b>	4
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 7 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-3 Способен составлять и оформлять научные и (или) технические (технологические, инновационные) отчеты (публикации, проекты)	ОПК-3.1 Знает основные правила оформления научных публикаций и научно-технической документации, в том числе с использованием прикладного программного обеспечения
	ОПК-3.2 Владеет на практике методологией составления научно-технических отчетов (проектов)
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-2 Способен самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого коллектива организовывать и проводить научные исследования и их апробацию	ПК-2.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации
	ПК-2.2 Способен планировать и проводить научные исследования самостоятельно или в качестве члена (руководителя) малого научного коллектива
	ПК-2.3 Способен проводить апробацию результатов научно-исследовательской работы посредством публикации научных статей и участия в конференциях

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы оптимизации» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, теоремы, численные алгоритмы методов оптимизации (МО);
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием их сходимости;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач (МО).

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач МО;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач МО, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

**владеть:**

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### **3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю**

Примеры домашних заданий:

1. Численно сравните скорость сходимости градиентного спуска для квадратичной целевой функции с положительно определённой матрицей с теоретической оценкой
2. Приведите пример задачи выпуклой оптимизации, для которой нарушается условие Слейтера
3. Получите выражение для величины шага в наискорейшем градиентном спуске для выпуклой квадратичной целевой функции.

Примеры заданий для контрольной работы:

1. Что такое выпуклая функция?
2. Напишите условия Каруша-Куна-Таккера для задачи выпуклой оптимизации
3. Что такое зазор двойственный?
4. Что такое сильная двойственность?
5. Какая скорость сходимости градиентного спуска для сильно выпуклой функции?
6. Какова сложность одной итерации в методе BFGS?
7. Что такое проксимальный градиентный метод и для каких задач его целесообразно использовать?

Темы для курсовых работ:

- Метод Франка-Вульфа решения задач выпуклого программирования.
- Метод Нелдера-Мида.

### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

- 1 Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче условной оптимизации
- 2 Квазиньютоновские методы. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла.
- 3 Квазиньютоновские методы. Метод Бroyдена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно.
- 4 Квазиньютоновские методы. Метод Бroyдена.
- 5 Квазиньютоновские методы. Метод SR1.
- 6 Методы нулевого порядка для задач безусловной оптимизации.
- 7 Методы возможных направлений для задач условной оптимизации.
- 8 Метод нагруженных функций.
- 9 Метод потенциалов решения транспортной задачи.
- 10 Дифференцируемость.



## Критерии оценивания

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## 5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.