

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

Д-р физ. мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2023 г.



**Дополнительная общеобразовательная
программа
дополнительного образования
«Основы комбинаторики»**

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Основы комбинаторики» является знакомство слушателей с наиболее важными областями и инструментами современной комбинаторики.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): любые слушатели, желающие познакомиться с основами комбинаторики. Для участия в курсе слушателю необходимо иметь базовые представления о теории множеств и началах анализа. Все остальные понятия будут введены в ходе курса.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 13 недель (8 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:
знать:

- основные правила и принципы комбинаторики,
- основные комбинаторные величины и тождества с ними,
- основы теории обращения Мёбиуса,
- основы теории разбиений,
- основы метода производящих функций, линейных рекуррентных соотношений и их решений.

уметь:

- решать простейшие комбинаторные задачи,
- доказывать тождества,
- упрощать выражения, содержащие биномиальные коэффициенты,
- вычислять количества упорядоченных и неупорядоченных разбиений,
- находить формулы для линейных рекуррентных соотношений,
- вычислять производящие функции

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

1. Правило сложения. Правило умножения. Принцип Дирихле.
2. Основные комбинаторные величины и их свойства. Размещения.
3. Сочетания с повторениями и без.

4. Комбинаторные тождества. Биномиальные коэффициенты. Тождества с биномиальными коэффициентами.
5. Полиномиальный коэффициент. Полиномиальная формула.
6. Формула включений и исключений. Применение формулы включений и исключений.
7. Выравнивания. Пример вычисления выравниваний.
8. Формула обращения Мёбиуса.
9. Циклические последовательности.
10. Разбиения чисел на слагаемые. Диаграмма Юнга.
11. Линейные рекуррентные соотношения. Формальные степенные ряды.
12. Производящие функции. Числа Фибоначчи и Каталана.

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Правило сложения и умножения. Принцип Дирихле	8	2	6
2	Основные комбинаторные величины и их свойства	7,2	1,6	5,6
3	Сочетания с повторениями и без	8	2	6
4	Комбинаторные тождества	10,4	3,2	7,2
5	Полиномиальные коэффициенты	9	2,5	6,5
6	Формула включений и исключений	9,8	2,9	6,9
7	Выравнивания	6,8	1,4	5,4
8	Формула обращения Мёбиуса	8,2	2,1	6,1
9	Циклические последовательности	8,8	2,4	6,4
10	Разбиения	8	2	6
11	Линейные рекуррентные соотношения. Формальные степенные ряды	9,6	2,8	6,8
12	Производящие функции	12,2	3,1	9,1
13	Экзамен	2	1	1
Итого		108	29	79

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Правило сложения и умножения. Принцип Дирихле	Общая информация о курсе	0,1	0,1
	Правила сложения и умножения	1,3	1,3
	Принцип Дирихле	0,6	0,6
	Тест 1		4
2. Основные комбинаторные величины и их свойства	Основные комбинаторные величины и их свойства	0,5	0,5
	Размещения	1,1	1,1
	Тест 2		4
3. Сочетания с повторениями и без	Сочетания без повторений	0,8	0,8
	Сочетания с повторениями	1,2	1,2
	Тест 3		4
4. Комбинаторные тождества	Биномиальные коэффициенты	1	1
	Тождества с биномиальными коэффициентами	2,2	2,2
	Тест 4		4
5. Полиномиальные коэффициенты	Полиномиальный коэффициент	1,4	1,4
	Полиномиальная формула	1,1	1,1
	Тест 5		4
6. Формула включений и исключений	Формула включений и исключений	1,1	1,1
	Доказательство формулы включений и исключений	0,8	0,8
	Применение формулы включений и исключений	1,9	1,9
	Тест 6		4
7. Выравнивания	Выравнивания	1,1	1,1
	Пример вычисления выравниваний	0,3	0,3
	Тест 7		4
8. Формула обращения Мёбиуса	Формулировка проблемы. Основная теорема арифметики	1,1	1,1
	Формула обращения Мёбиуса	1	1
	Тест 8		4
9. Циклические последовательности	Формула для количества циклических последовательностей	1,5	1,5
	Формула обращения Мёбиуса на частично упорядоченном множестве	0,9	0,9
	Тест 9		4
10. Разбиения	Разбиения чисел на слагаемые	1,1	1,1

	Диаграмма Юнга	0,9	0,9
	Тест 10		4
11. Линейные рекуррентные соотношения. Формальные степенные ряды	Линейные рекуррентные соотношения	1,8	1,8
	Формальные степенные ряды	1	1
	Тест 11		4
12. Производящие функции	Производящие функции	1,4	2,5
	Числа Фибоначчи и Каталана	1,7	2,6
	Тест 12		4
Экзамен		1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Правило сложения и умножения. Принцип Дирихле	Лекции Введение Описание курса Правило сложения Правило умножения Пример на правило умножения Перелёты Москва-Сидней Поход в театр Пароль к компьютеру Формулировка принципа и пример с квадратом Набор монет Пуговицы разных цветов Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
2	Основные комбинаторные величины и их свойства	Лекции Основные комбинаторные величины Обозначения основных комбинаторных величин Формулы для числа k-размещений Капитан и боцман на пиратском корабле Составляем поезд из вагонов Слова в языке Девушки выбирают одежду Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции,

		изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
3	Сочетания с повторениями и без	Лекции Повторение предыдущей лекции Число сочетаний без повторений Мыши в лаборатории Коллекционеры Кости домино Число сочетаний с повторениями. Пример с сортами пирожных Число сочетаний с повторениями. Доказательство Число сочетаний с повторениями. Продолжение доказательства Букеты из роз Тренировочная группа Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
4	Комбинаторные тождества	Лекции Бином Ньютона для степеней 2,3,4 Доказательство формулы Бинома Ньютона Формулировка первых двух тождеств Доказательство первых двух тождеств Треугольник Паскаля Сумма биномиальных коэффициентов Сумма квадратов биномиальных коэффициентов Тождество с убывающими основаниями Следствие №1 из последнего тождества Следствие №2 из последнего тождества Следствие №3 из последнего тождества Знакопеременная сумма биномиальных коэффициентов Сосуды: стаканы и чашки Наборы из чётного числа символов Применение тождеств для вычисления хитрой суммы биномиальных коэффициентов Сумма чисел треугольника Паскаля, расположенных на одной диагонали Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
5	Полиномиальные коэффициенты	Лекции Введение

		Перестановки букв в слове "Комбинаторика" Полиномиальные коэффициенты: определение и формула Доказательство формулы для полиномиального коэффициента Связь полиномиальных и биномиальных коэффициентов Перестановки букв в слове Шары и ящики Цветки и девочки Введение Пример в случае $k = 3$ и $n = 2$ Обсуждение примера Формулировка полиномиальной формулы в общем виде Вывод частного случая Доказательство полиномиальной формулы Сумма полиномиальных коэффициентов Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
6	Формула включений и исключений	Лекции Введение и пример Общая постановка задачи Путешественники Отчёт о школьниках Доказательство в случае $n = 1$ Формулировка и обсуждение индукционного перехода Доказательство индукционного перехода Количество беспорядков Красивое комбинаторное тождество Художники Празднование Нового Года Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
7	Выравнивания	Лекции Введение Задача о выравнивании последовательностей Условия, налагаемые на выравнивания Формулировка теоремы о числе выравниваний Следствие из теоремы о числе выравниваний

		Обсуждение невозможности полного перебора Максимальное количество столбцов в выравнивании Количество выравниваний слов "суслик" и "хорёк" Количество выравниваний без условий 1) и 2) Количество выравниваний, эквивалентных данному Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
8	Формула обращения Мёбиуса	Лекции Циклические слова Простые числа Основная теорема арифметики Исторический анекдот Практические занятия Количество циклических последовательностей длины 2 Существование разложение в произведение простых чисел Вспомогательное утверждение для основной теоремы арифметики Доказательство единственности разложения в произведения простых Лекции Функция Мёбиуса Сумма по делителям числа Сумма функции Мебиуса по делителям числа Формула обращения Мебиуса. Формулировка Формула обращения Мебиуса. Доказательство Практические занятия Пример применения формулы обращения Мёбиуса Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
9	Циклические последовательности	Лекции Линейные и циклические последовательности Период линейной последовательности Биекция между множествами последовательностей одного периода Количество линейных последовательностей Количество циклических последовательностей длины n и периода n Количество циклических последовательностей Практические занятия

		Пример вычисления количества циклических последовательностей Лекции Частично упорядоченное множество Функция Мебиуса для ЧУМа Связь с обычной функцией Мебиуса Совпадение функций Мебиуса для произведения различных простых чисел Совпадение функций Мебиуса для остальных чисел Формула обращения Мебиуса на ЧУМе Практические занятия Задача 3 Задача 4 Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.	
10	Разбиения	Лекции Разбиения чисел на слагаемые "Карнавальная" формулировка задач о разбиениях Задача о "попойке" Задача о "капусте" Формула Харди-Рамануджана Практические занятия Задача 1 Лекции Диаграмма Юнга Теоремы о количестве неупорядоченных разбиений Двойственная диаграмма Юнга Практические занятия Задача 2 Задача 3 Задача 4 Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.	
11	Линейные рекуррентные соотношения. Формальные степенные ряды	Лекции Линейные рекуррентные соотношения Числа Фибоначчи Линейные рекуррентные соотношения второго порядка. Характеристическое уравнение Линейные рекуррентные соотношения второго порядка. Теорема 1. Формулировка	

		Линейные рекуррентные соотношения 2 порядка. Теорема 1. Пункт 1. Доказательство Линейные рекуррентные соотношения 2 порядка. Теорема 1. Пункт 2. Доказательство Линейные рекуррентные соотношения 2 порядка. Теорема 2 Линейные рекуррентные соотношения k порядка Практические занятия Задача 1 Задача 2 Задача 3 Задача 4 Лекции Формальные степенные ряды Деление степенных рядов Вывод комбинаторного тождества при помощи формальных степенных рядов Практические занятия Задача 5 Задача 6 Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
12	Производящие функции	Лекции Производящая функция Теорема о сходимости рядов Примеры, иллюстрирующие теорему Сходимость на границе круга Пример вычисления производящей функции Практические занятия Задача 1 Задача 2 Задача 3 Задача 4 Лекции Пример с числами Фибоначчи Производящая функция чисел Фибоначчи Числа Каталана Производящая функция чисел Каталана Извлечение корня из формального степенного ряда Формула для чисел Каталана. Практические занятия Задача 5 Задача 6

		Задача 7 Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование, решение задач.
13	Экзамен	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Тестовые вопросы и задачи

Вопрос 1. Сколько чисел от 1 до 9999 (включая 1 и 9999) не имеют в своей десятичной записи одинаковых подряд идущих цифр? (к примеру, не подходят 1488, 2259, 3233)

- 1) 7290
- 2) 7380
- 3) 6564
- 4) 5274

Вопрос 2. Автомобильные номера штата Калифорнии состоят из одной цифры, не равной 0, трёх больших букв латинского алфавита и ещё трёх цифр (например, 5PPP064). Сколько всего имеется номеров такого типа?

Вопрос 3. Сколькими способами можно вручить призы в 5 различных номинациях (в каждой номинации только один приз), если в соревновании участвуют 10 человек?

Вопрос 4. У королевы есть 12 одинаковых зеркал. Сколькими способами их можно повесить в 8 разных залах замка так, чтобы в каждом зале было хотя бы одно зеркало?

Вопрос 5. На дереве висит 10 разных яблок. Сколькими способами можно сорвать нечётное количество яблок?

4.3. Список рекомендуемой литературы

1. Виленкин Н.Я.. Комбинаторика. – М.: МЦНМО, 2022.
2. Алфутова Н.Б., Устинов А.В.. Алгебра и теория чисел (сборник задач). – М.: МЦФ-МС, 2022.
3. Холл М.. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
4. Айгнер М. Комбинаторная теория. - М.: Мир, 1982
5. Райгородский А.М. Комбинаторика и теория вероятностей. - МФТИ, 2012 - 109 с.
6. Эндрюс Г. Теория разбиений, М.: Наука, 1982
7. Кнут Д., Грэхем Р., Паташник О.. Конкретная математика. Математические основы информатики. М.: Вильямс, 2021.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха
2. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
3. <https://ru.wikipedia.org> – электронная энциклопедия Wikipedia.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Экзамен	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Правило сложения и умножения. Принцип Дирихле	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Основные комбинаторные величины и их свойства	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Сочетания с повторениями и без	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Комбинаторные тождества	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий,

		тестирование, решение задач
Полиномиальные коэффициенты	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Формула включений и исключений	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Выравнивания	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Формула обращения Мёбиуса	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Циклические последовательности	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Разбиения	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Линейные рекуррентные соотношения. Формальные степенные ряды	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Производящие функции	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование, решение задач
Экзамен	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

7. Составители программы

Зубцова Жанна Исаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано

Ведущий специалист ОСОП

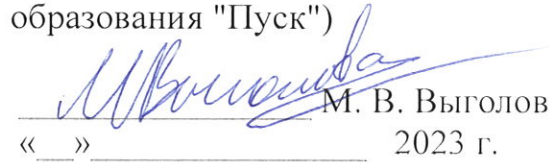


Ж. И. Зубцова

«__» 2023 г.

Согласовано

Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")



М. В. Выголова

«__» 2023 г.