МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ)

УТВЕРЖДАЮ

И.о. ректора МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

_______________ Д.В. Ливанов

« » _______________ 2021 г.

Программа дополнительного образования

«Линейная алгебра»

Москва 2021

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации программы дополнительного образования «Линейная алгебра» является формирование базовых знаний по линейной алгебре для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): студенты бакалавриата, специалитета, магистратуры, аспиранты и прочие слушатели, освоившие школьные курсы алгебры и геометрии, вузовский курс аналитической геометрии, и желающие получить знания, умения и навыки по теме курса.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 72 академических часа.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

1.5. Режим обучения: 11 недель (6,5 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- основные определения линейной алгебры;
- понятия линейных пространств, евклидова пространства, базиса, размерности, матрицы, линейных операторов, квадратичных и билинейных форм, их канонические виды;

уметь:

- решать простейшие задачи линейной алгебры;
- решать системы линейных уравнений разными методами;
- определять собственные значения и собственные векторы линейных операторов;
- оперировать матрицами, находить определители, записывать в матричном виде полученные данные, интерпретировать полученные в ходе решения результаты;

владеть:

- математическим аппаратом линейной алгебры, аналитическими методами исследования линейных пространств, отображений и преобразований.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

- Понятие линейного пространства
- Линейные подпространства линейных пространств
- Линейные отображения линейных пространств
- Линейные преобразования линейных пространств (Линейные операторы)

- Свойства собственных значений и собственных векторов линейных преобразований
- Евклидово пространство
- Линейные преобразования в евклидовом пространстве
- Функции на линейных пространствах
- Ранг и индекс квадратичной формы на линейном пространстве
- Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№ п/п	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Понятие линейного пространства	4	2	2
2	Линейные подпространства линейных пространств	10	3	7
3	Линейные отображения линейных пространств	8	4	4
4	Линейные преобразования линейных пространств (Линейные операторы)	5,5	2,5	3
5	Свойства собственных значений и собственных векторов линейных преобразований	9,5	2,5	7
6	Евклидово пространство	4	2	2
7	Линейные преобразования в евклидовом пространстве	10	3	7
8	Функции на линейных пространствах	6	3	3
9	Ранг и индекс квадратичной формы на линейном пространстве	3	1,5	1,5
10	Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах	8	2	6
11	Промежуточная аттестация	4		4
	Итого	72	25,5	46,5

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
1. Понятие линейного пространства	1.0 Введение	0,05	0,05
	1.1 Определение линейного пространства	0,15	0,15
	1.2 Примеры линейных пространств	0,1	0,1

	1.3 Следствия из аксиом линейного пространства	0,2	0,2
	1.4 Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства	0,05	0,05
	1.5 Базис и размерность линейного пространства	0,2	0,2
	1.5.1 Задача 1.1. Основная лемма о линейной зависимости	0,3	0,3
	1.6 Бесконечномерные и конечномерные линейные пространства	0,1	0,1
	1.6.1 Задача 1.2. Размерность и базис конечномерного линейного пространства	0,3	0,3
	1.6.2 Задача 1.3. Базис в пространстве многочленов	0,3	0,3
	1.6.3 Задача 1.4. Любая линейно независимая система из n векторов в n-мерном пространстве - базис	0,1	0,1
	1.7 Замена базиса	0,15	0,15
2. Линейные подпространства линейных пространств	2.1 Определение линейного подпространства	0,4	0,4
	2.1.1 Задача 2.1. Линейная оболочка строк матрицы СЛАУ	0,1	0,1
	2.1.2 Задача 2.2. Линейная оболочка системы векторов в n-мерном пространстве как линейное подпространство	0,1	0,1
	2.1.3 Задача 2.3. Множество симметричных квадратных матриц порядка n, как линейное подпространство в пространстве всех квадратных матриц порядка n	0,1	0,1
	2.1.4 Задача 2.4. Базис и размерность линейной оболочки заданной системы столбцов	0,1	0,1
	2.1.5 Задача 2.5. Базис и размерность линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных однородных уравнений	0,1	0,1
	2.1.6 Задача 2.6. Система уравнений, определяющая линейную оболочку заданной системы столбцов	0,2	0,2
	2.1.7 Задача 2.7. Доказательство: любая порождающая система из n векторов в n-мерном пространстве - базис	0,1	0,1
	2.1.8 Задача 2.8. Размерность линейного подпространства	0,1	0,1
	2.2. Операции над подпространствами	0,2	0,2

	2.2.1 Задача 2.9. Объединение двух подпространств	0,05	0,05
	2.3. Формула Грассмана	0,3	0,3
	2.3.1. Задача 2.10. Размерности и базисы суммы и пересечения подпространств	0,2	0,2
	2.4. Прямая сумма подпространств	0,1	0,1
	2.4.1. Задача 2.11. Прямое дополнение к подпространству, заданному как линейная оболочка системы векторов.	0,1	0,1
	2.4.2. Задача 2.12. Доказательство: пространство столбцов высоты n есть прямая сумма заданных подпространств	0,1	0,1
	2.4.3. Задача 2.13. Доказательство: пространство матриц порядка n является прямой суммой подпространств симметрических и кососимметрических матриц	0,15	0,15
	2.4.4. Задача 2.14. Прямая сумма подпространств. Проекция вектора на подпространство вдоль выбранного прямого дополнения	0,3	0,3
	2.4.5. Задача 2.15. Прямая сумма подпространств	0,1	0,1
	2.4.6 Задача 2.16. Размерность суммы подпространств конечномерного линейного пространства	0,1	0,1
	Тест №1		4
3. Линейные отображения линейных пространств	3.1. Определение линейных отображений ЛП	0,2	0,2
	3.1.1. Задача 3.1. Проверка линейности преобразования, заданного некоторой формулой, и его геометрический смысл	0,3	0,3
	3.1.2. Задача 3.2. Доказательство линейности заданного преобразования	0,1	0,1
	3.2. Свойства линейных отображений и преобразований (линейных операторов). Определение множества значений отображений, сюръекции, инъекции	0,4	0,4
	3.3. Координатная запись линейных отображений	0,3	0,3
	3.3.1 Задача 3.3. Матрица заданного линейного преобразования трехмерного ориентированного геометрического пространства	0,1	0,1
	3.3.2. Задача 3.4. Нахождение матрицы заданного оператора на некоторой линейной оболочке в заданном базисе	0,1	0,1

	3.3.3. Задача 3.5. Матрица линейного преобразования трехмерного пространства, в ядре которого лежит вектор с заданным координатным столбцом	0,05	0,05
	3.3.4. Задача 3.6. Единственность линейного преобразования, имеющего данную матрицу в данном базисе.	0,1	0,1
	3.3.5. Задача 3.7. Ранг матрицы сюръективного и инъективного линейных отображений	0,1	0,1
	3.3.6. Задача 3.8. Ядро и образ линейного отображения, заданного некоторой матрицей	0,1	0,1
	3.3.7. Задача 3.9. Полный прообраз вектора при линейном отображении, заданном некоторой матрицей	0,1	0,1
	3.3.8. Задача 3.10. Пример линейного оператора, для которого ядро и образ совпадают	0,1	0,1
	3.4. Взаимно однозначные отображения. Изоморфизм линейных пространств	0,2	0,2
	3.5. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Простейший вид матрицы линейного отображения	0,3	0,3
	3.5.1. Задача 3.11. Нахождение матрицы оператора в новом базисе	0,05	0,05
	3.5.2. Задача 3.12. Матрица отображения	0,25	0,25
	3.6. Операции над линейными отображениями	0,3	0,3
	3.6.1. Задача 3.13. Матрицы ортогонального проектирования геометрического трехмерного пространства на заданные подпространства	0,2	0,2
	3.6.2. Задача 3.14. Доказательство: заданный линейный оператор является проектором.	0,1	0,1
	3.6.3. Задача 3.15. Геометрический смысл заданного оператора	0,15	0,15
	3.6.4. Задача 3.16. Композиция линейных отображений	0,1	0,1
	3.7. Обратное отображение к линейному отображению	0,3	0,3
4. Линейные преобразования линейных	4.1. Замечания о линейных преобразованиях линейных пространств. Инвариантные подпространства	0,2	0

пространств (Линейные операторы)	4.1.1. Задача 4.1. Доказательство: если заданные операторы коммутируют, то ядро одного оператора инвариантно относительно другого	0,1	0
	4.1.2. Задача 4.2. Подпространства трехмерного геометрического пространства, инвариантные относительно поворота на заданный угол вокруг некоторой прямой	0,4	0
	4.1.3. Задача 4.3. Инвариантные подпространства для оператора дифференцирования	0,3	0
	4.1.4. Задача 4.4. Доказательство, что подпространство ненулевое и инвариантно относительно заданного линейного оператора на вещественном пространстве	0,35	0
	4.1.5. Задача 4.5. Собственный вектор и инвариантное подпространство	0,1	0
	4.1.6. Задача 4.6. Базис, в котором матрица оператора является верхнетреугольной	0,15	0
	4.1.7. Задача 4.7. Доказательство: для заданного оператора существует базис, в котором его матрица верхняя треугольная тогда и только тогда, когда существует цепочка вложенных инвариантных подпространств	0,2	0
	4.2. Собственные векторы. Часть 1	0,15	0
	4.3. Собственные векторы. Часть 2	0,15	0
	4.3.1. Задача 4.8. Собственные значения и собственные подпространства оператора ортогонального проектирования трехмерного пространства на заданное подпространство	0,35	0
	4.3.2. Задача 4.9. Собственные значения и собственные подпространства заданных операторов	0,45	0
	4.3.3. Задача 4.10. Собственные значения и собственные подпространства оператора дифференцирования на заданной линейной оболочке	0,1	0
	4.3.4. Задача 4.11. Доказательство: любое линейное преобразование нечетномерного вещественного пространства имеет собственный вектор	0,1	0
5. Свойства собственных значений и	5.1. Собственное подпространство	0,2	0,3
	5.2. Инварианты линейного преобразования	0,2	0,3

собственных векторов линейных преобразований	5.2.1. Задача 5.1. Доказательство: ранг матрицы проектора в произвольном базисе равен её следу	0,1	0,2
	5.2.2. Задача 5.2. Матрица поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на заданный угол	0,1	0,1
	5.2.3. Задача 5.3. Матрица, подобная диагональной матрице	0,1	0,1
	5.2.4. Задача 5.7. Если характеристические многочлены двух матриц равны, обязательно ли эти матрицы подобны?	0,1	0,1
	5.3. Приведение матрицы преобразования к диагональному виду	0,1	0,2
	5.3.1. Задача 5.4. Собственные значения и собственные подпространства оператора дифференцирования на пространстве многочленов	0,1	0,2
	5.3.2. Задача 5.5. Алгоритм решения задачи на собственные значения	0,5	0,5
	5.3.3. Задача 5.6. Собственные значения и собственные векторы оператора, заданного в некотором базисе матрицей	0,4	0,4
	Тест №2		4
6. Евклидово пространство	6.1. Определение евклидова пространства. Аксиомы евклидова пространства	0,15	0,15
	6.2. Длина и угол	0,2	0,2
	6.2.1. Задача 6.1. Неравенство Коши-Буняковского	0,15	0,15
	6.3. Ортогональные системы векторов	0,15	0,15
	6.3.1. Задача 6.2. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая заданного вектора при проекции на некоторое подпространство	0,15	0,15
	6.3.2. Задача 6.3. Алгоритм Грама-Шмидта	0,15	0,15
	6.4. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей	0,1	0,1
	6.5. Свойства матрицы Грама. Ортогональные матрицы	0,2	0,2
	6.5.1. Задача 6.4. Ортогональная матрица четвертого порядка	0,15	0,15
	6.6. Ортогональное дополнение подпространства	0,2	0,2
	6.6.1. Задача 6.5. Линейная оболочка системы векторов	0,2	0,2
	6.6.2. Задача 6.6. Базис в ортогональном дополнении к заданному подпространству. СЛАУ, определяющая ортогональное дополнение подпространства	0,1	0,1

	6.6.3. Задача 6.7. Совместность системы линейных уравнений	0,1	0,1
7. Линейные преобразования в евклидовом пространстве	7.1. Сопряженные линейные преобразования евклидова пространства	0,2	0,2
	7.1.1. Задача 7.1. Матрица сопряженного преобразования	0,05	0,05
	7.1.2. Задача 7.2. Доказательство того, что ядро линейного оператора на евклидовом пространстве совпадает с ортогональным дополнением к образу сопряженного к нему оператора.	0,05	0,05
	7.2. Самосопряженные преобразования	0,25	0,25
	7.2.1. Задача 7.3. Сопряженное преобразование для заданного линейного оператора	0,05	0,05
	7.2.2. Задача 7.4. Самосопряженные проекторы	0,1	0,1
	7.3. Основная теорема о самосопряженных преобразованиях	0,15	0,15
	7.3.1. Задача 7.5. Матрица перехода к ортонормированному базису из собственных векторов заданного линейного оператора	0,2	0,2
	7.3.2. Задача 7.6. Матрица самосопряженного оператора. Скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен	0,2	0,2
	7.3.3. Задача 7.7. Доказательство: два самосопряженных оператора на евклидовом пространстве коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов	0,1	0,1
	7.3.4. Задача 7.8. Матрица положительного самосопряженного преобразования	0,15	0,15
	7.4. Изоморфизм евклидовых пространств	0,3	0,3
	7.5. Ортогональные преобразования	0,1	0,1
	7.5.1. Задача 7.9. Ортогональное преобразование	0,15	0,15
	7.5.2. Задача 7.10. Геометрический смысл оператора и его канонический вид	0,1	0,1
	7.5.3. Задача 7.11. Все преобразования евклидова пространства, являющиеся одновременно самосопряженными и ортогональными	0,2	0,2
	7.5.4. Задача 7.12. Инвариантное подпространство ортогонального преобразования	0,05	0,05

	7.5.5. Задача 7.13. Канонический вид ортогонального преобразования в трехмерном пространстве	0,2	0,2
	7.5.6. Задача 7.14. Матрица перехода к каноническому базису и матрица преобразования в этом базисе	0,25	0,25
	7.5.7. Задача 7.15. Доказательство: ортогональные преобразования евклидова пространства образуют группу относительно операции композиции	0,15	0,15
	Тест №3		4
8. Функции на линейных пространствах	8.1. Линейные функции на линейном пространстве	0,25	0,25
	8.1.1. Задача 8.1. Координатная строка линейной функции в заданном базисе	0,1	0,1
	8.1.2. Задача 8.2. Линейная зависимость системы линейных функций	0,4	0,4
	8.1.3. Задача 8.3. Доказательство: ядро ненулевой линейной функции - максимальное собственное подпространство на линейном пространстве. Линейное пространство - прямая сумма ядра и линейной оболочки вектора, который не принадлежит ядру	0,3	0,3
	8.1.4. Задача 8.4. Матрица перехода между биортогональными базисами	0,1	0,1
	8.1.5. Задача 8.5. Биортогональный базис	0,1	0,1
	8.1.6. Задача 8.6. Биортогональный базис в пространстве многочленов	0,2	0,2
	8.2. Билинейные функции (формы) на линейном пространстве	0,3	0,3
	8.3. Квадратичные функции (формы) на линейном пространстве. Часть 1	0,15	0,15
	8.3.1. Задача 8.7. Матрица билинейной функции и соответствующая ей квадратичная функция	0,1	0,1
	8.3.2. Задача 8.8. Восстановление симметричной билинейной функции по заданной квадратичной функции. Её матрица	0,1	0,1
	8.3.3. Задача 8.9. Запись квадратичной функции в новом базисе	0,1	0,1
	8.4. Квадратичные функции (формы) на линейном пространстве. Часть 2	0,3	0,3
	8.4.1. Задача 8.10. Приведение заданной квадратичной функции к каноническому виду. Нахождение её ранга,	0,5	0,5

	положительного и отрицательного индекса инерции		
9. Ранг и индекс квадратичной формы на линейном пространстве	9.1. Определение ранга и индекса квадратичной формы на линейном пространстве	0,15	0,15
	9.1.1. Задача 9.1. Положительно определенная квадратичная функция	0,1	0,1
	9.1.2. Задача 9.2. Положительно полуопределенная матрица	0,1	0,1
	9.1.3. Задача 9.3. Угловые миноры положительно полуопределенной квадратичной функции	0,2	0,2
	9.2. Закон инерции квадратичных форм	0,15	0,15
	9.2.1. Задача 9.4. Положительный и отрицательный индекс инерции квадратичной функции	0,1	0,1
	9.2.2. Задача 9.5. Положительный и отрицательный индексы инерции еще одной квадратичной функции	0,1	0,1
	9.3. Критерий Сильвестра	0,2	0,2
	9.3.1. Задача 9.6. Положительно определенная квадратичная форма	0,2	0,2
	9.3.2. Задача 9.7. Полярное разложение заданной матрицы	0,2	0,2
10. Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах	10.1. Присоединенное линейное преобразование евклидова пространства	0,3	0,3
	10.1.1 Задача 10.1. Ортонормированный базис, в котором заданная функция имеет диагональный вид	0,2	0,2
	10.1.2. Задача 10.2. Каноническое уравнение и каноническая система координат для кривой второго порядка	0,1	0,1
	10.2. Еще одно определение евклидова пространства	0,3	0,3
	10.2.1. Задача 10.3. Скалярное произведение на заданном линейном пространстве непрерывных вещественных функций на некотором отрезке	0,15	0,15
	10.2.2. Задача 10.4. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в некотором базисе	0,1	0,1
	10.2.3. Задача 10.5. Скалярное произведение на пространстве матриц порядка n. Оператор транспонирования самосопряжен. Ортогональное дополнение к подпространству симметричных матриц	0,3	0,3
	10.3. Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду	0,4	0,4

	10.3.1. Задача 10.6. Доказательство: если среди линейных комбинаций двух квадратичных функций имеется положительно определенная, то эти две функции одновременно приводятся к диагональному виду	0,05	0,05
	10.3.2. Задача 10.7. Пример пары квадратичных функций, которые не приводятся одновременно к диагональному виду	0,05	0,05
	10.3.3. Задача 10.8. Общая замена координат, приводящая матрицу положительно определенной функции к единичной матрице, а второй - к диагональному виду	0,05	0,05
	Тест № 4		4
11. Промежуточная аттестация	**Тестирование**		**4**

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	**Понятие линейного пространства**	
1.0	Введение	*Лекция:* повторение нескольких тем из курса аналитической геометрии
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов
1.1	Определение линейного пространства	*Лекция:* дается определение линейного пространства (ЛП), описываются аксиомы ЛП, дается определение комплексного ЛП, элемента ЛП, вещественного ЛП.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.2	Примеры линейных пространств	*Лекция:* приведены примеры линейных пространств.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.3	Следствия из аксиом линейного пространства	*Лекция:* сформулированы и доказаны простейшие следствия из аксиом ЛП, дано определение разности векторов.

		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.4	Линейная зависимость и независимость элементов линейного пространства	*Лекция:* вводится определение линейной комбинации векторов из ЛП, линейно зависимой и независимой системы векторов
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.5	Базис и размерность линейного пространства	*Лекция:* дается определение базиса, обозначение базисных векторов, вводится понятие координат вектора в базисе. Сформулированы и доказаны утверждения о координатах векторов в заданном базисе. Доказана теорема о количестве векторов в базисах ЛП. Дается определение размерности ЛП.
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.6	Бесконечномерные и конечномерные линейные пространства	*Лекция:* дается понятие бесконечномерного ЛП. Приведены примеры размерностей ЛП
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.7	Замена базиса	*Лекция:* сформулирована и доказана теорема о связи координат вектора и базисных векторов через матрицу перехода
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2	**Линейные подпространства линейных пространств**	
2.1	Определение линейного подпространства	*Лекция:* дается определение линейного подпространства ЛП. Приведены примеры. Сформулировано и доказано утверждение о линейно независимой системе векторов в ЛП. Дано определение линейной оболочки множества векторов. Сформулированы и доказаны свойства линейной оболочки ЛП, утверждение о координатных столбцах векторов подпространства ЛП, озвучено замечание о переходе к другому базису
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

2.2	Операции над подпространствами	*Лекция:* дается определение пересечения подпространств, суммы линейных подпространств, их обозначения.
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.3	Формула Грассмана	*Лекция:* сформулирована и доказана теорема о размерности суммы подпространств
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.4	Прямая сумма подпространств	*Лекция:* дается определение прямой суммы подпространств, его обозначение. Сформулировано и доказано свойство прямой суммы
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	Тест №1	*Самостоятельная работа:* тестирование по материалам лекций
3	**Линейные отображения линейных пространств**	
3.1	Определение линейных отображений ЛП	*Лекция:* даются определения отображений ЛП, линейных отображений ЛП, сформулировано следствие из последнего определения, введено понятие линейного преобразования ЛП.
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.2	Свойства линейных отображений и преобразований (линейных операторов). Определение множества значений отображений, сюръекции, инъекции	*Лекция:* сформулированы и доказаны свойства линейных отображений и преобразований. Дано определение множества значений отображений ЛП, размерности этого множества, определение сюръекции или наложения, ядра множества. Сформулировано и доказано утверждение о ядре множества. Дано определение инъекции или вложения, сформулирован критерий инъективности отображения
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.3	Координатная запись линейных отображений	*Лекция:* представлена координатная запись линейных отображений, дано определение матрицы линейного отображения в паре базисов, сформулировано и доказано утверждение о ранге матрицы линейного отображения, озвучено

		следствие об инварианте отображения. Сформулировано и доказано утверждение о размерности отображаемого пространства через ранг множества отображений и размерности его ядра
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.4	Взаимно однозначные отображения. Изоморфизм линейных пространств	*Лекция:* дается определение взаимно однозначного отображения. Сформулирован и доказан критерий взаимной однозначности отображения. Вводится понятие изоморфизма взаимно однозначного отображения, изоморфных ЛП. Сформулирована и доказана теорема об изоморфизме ЛП
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.5	Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Простейший вид матрицы линейного отображения	*Лекция:* сформулированы и доказаны теоремы о выражении матрицы линейного отображения через матрицы перехода, о простейшем виде матрицы линейного отображения. Озвучено замечание о теореме для линейных преобразований
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.6	Операции над линейными отображениями	*Лекция:* даются определения суммы линейных отображений, произведения отображения на число. Сформулированы замечания о матрице операций над линейными отображениями. Вводится определение произведения отображений. Сформулированы и доказаны утверждения о матрице произведения отображений, о ранге произведений отображений.
		Семинары: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.7	Обратное отображение к линейному отображению	*Лекция:* дается определение обратного отображения. Сформулирована и доказана теорема о связи обратного отображения и изоморфизма
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4	**Линейные преобразования линейных пространств (Линейные операторы)**	
4.1	Замечания о линейных преобразованиях линейных	*Лекция:* дается определение матрицы линейного преобразования, представлена формула для

	пространств. Инвариантные подпространства	матрицы линейного преобразования через матрицы перехода. Дается определение инвариантного линейного подпространства. Сформулированы и доказаны утверждения о представлении матрицы инвариантного подпространства. Дается определение ограничения преобразования на линейное подпространство
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.2	Собственные векторы. Часть 1	*Лекция:* даются определения собственного вектора и собственного значения преобразования. Сформулирована и решена задача о нахождении собственных векторов данного линейного преобразования. Дается определение характеристического уравнения. Сформулирована и доказана теорема о собственных значениях преобразования в комплексном и вещественном линейных пространствах.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.3	Собственные векторы. Часть 2	*Лекция:* дается определение характеристического многочлена матрицы преобразования. Сформулировано и доказано утверждение о характеристическом многочлене матрицы преобразования. Дается определение следа матрицы преобразования, его обозначение. Сформулировано замечание о возможности отсутствия собственных векторов у линейного преобразования в вещественном ЛП, и о наличии собственных векторов всегда в комплексном пространстве
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5	**Свойства собственных значений и собственных векторов линейных преобразований**	
5.1	Собственное подпространство	*Лекция:* сформулированы и доказаны утверждение о собственном подпространстве, теорема о линейной независимости собственных векторов, озвучено замечание о сумме собственных подпространств.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

5.2	Инварианты линейного преобразования	*Лекция:* сформулировано и доказано утверждение о характеристических многочленах матриц преобразования, озвучены следствия о характеристическом многочлене преобразования, об инвариантах преобразования, рассмотрен сам характеристический многочлен, озвучена теорема Безу, дается определение кратности корня, простых корней многочлена. Сформулирована и доказана теорема об оценке размерности собственного пространства. Озвучено замечание о количестве собственных значений и векторов, приведен пример.
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.3	Приведение матрицы преобразования к диагональному виду	*Лекция:* дается определение диагональной матрицы. Сформулировано и доказано утверждение об условии диагональности матрицы линейного преобразования в некотором базисе. Озвучено следствие о базисе из собственных векторов, замечание о кратности корней характеристического многочлена и существовании диагональной матрицы преобразования в этом случае. Сформулировано следствие в матричном виде о диагональной матрице
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	Тест №2	*Самостоятельная работа:* тестирование по материалам лекции
6	**Евклидово пространство**	
6.1	Определение евклидова пространства. Аксиомы евклидова пространства	*Лекция*: дается определение евклидова пространства, перечислены аксиомы евклидова пространства, озвучено определение скалярного произведения векторов евклидова пространства. Сформулированы и доказаны простейшие следствия из аксиом евклидова пространства
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.2	Длина и угол	*Лекция:* дается определение длины вектора евклидова пространства, угла между векторами евклидова пространства. Представлено и доказано неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Сформулировано и доказано утверждение о неравенстве треугольника

		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.3	Ортогональные системы векторов	*Лекция:* дается определение ортогональности векторов. Сформулировано и доказано утверждение о нулевом векторе евклидова пространства. Дается определение ортогональной и ортонормированной системы векторов евклидова пространства. Сформулировано и доказано утверждение о линейное независимости ортогональной системы. Представлен алгоритм процесса ортогонализации Грама-Шмидта. Сформулирована и доказана теорема о существовании ортонормированного базиса в евклидовом пространстве
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.4	Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей	*Лекция:* представлены скалярное произведение векторов евклидова пространства в координатном и матричном виде. Дается определение матрицы Грамма
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.5	Свойства матрицы Грамма. Ортогональные матрицы	*Лекция:* перечислены и частично доказаны свойства матрицы Грамма. Дано определение и перечислены свойства ортогональной матрицы
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.6	Ортогональное дополнение подпространства	*Лекция:* дается определение ортогонального дополнения евклидова пространства, его обозначение. Сформулирована и доказана теорема о размерности ортогонального дополнения подпространства. Рассмотрены свойства ортогонального дополнения
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7	**Линейные преобразования в евклидовом пространстве**	
7.1	Сопряженные линейные преобразования евклидова пространства	*Лекция:* дается определение сопряженного линейного преобразования евклидова пространства. Сформулированы и доказаны

		утверждение о связи матриц преобразования сопряженного и заданного линейных преобразований евклидова пространства, теорема о существовании и единственности сопряженного преобразования, утверждение о линейном преобразовании сопряженном к сопряженному.
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.2	Самосопряженные преобразования	*Лекция:* дается определение самосопряженного линейного преобразования евклидова пространства. Представлено следствие из определения о матрице самосопряженного преобразования. Сформулированы и доказаны теорема о собственных значениях самосопряженного преобразования, теорема об ортогональности собственных векторов самосопряженного преобразования, утверждение об инвариатности ортогонального дополнения самосопряженного преобразования евклидова пространства
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.3	Основная теорема о самосопряженных преобразованиях	*Лекция:* сформулированы и доказаны основная теорема о самосопряженных преобразованиях, следствие из нее о существовании ортогональной матрицы для симметрической матрицы
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.4	Изоморфизм евклидовых пространств	*Лекция:* дается определение изоморфных евклидовых пространств. Сформулированы и доказаны теорема об условии изоморфности евклидовых пространств, теорема об отображении евклидова пространства, сохраняющим скалярное произведение
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.5	Ортогональные преобразования	*Лекция:* дается определение ортогонального преобразования евклидова пространства. Сформулировано и доказано утверждение о сопряженном преобразовании к ортогональному,

		представлено следствие об ортогональной матрице ортогонального преобразования
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	Тест №3	*Самостоятельная работа:* тестирование по материалам лекции
8	**Функции на линейных пространствах**	
8.1	Линейные функции на линейном пространстве	*Лекция:* дается понятие о функции на ЛП, о функционалах на ЛП, определение линейной функции на ЛП, координатное представление линейной функции, определение координатной строки линейной функции в базисе. Сформулировано и доказано утверждение об изменении координатной строки линейной функции при замене базиса
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.2	Билинейные функции (формы) на линейном пространстве	*Лекция:* дается определение билинейной функции (БФ) на линейном пространстве, билинейной формы, координатное представление БФ, матричный вид БФ при замене базиса, определение симметричной БФ. Сформулировано и доказано утверждение о необходимом и достаточном условии симметричности БФ
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.3	Квадратичные функции (формы) на линейном пространстве. Часть 1	*Лекция:* дается определение квадратичной формы (КФ) на ЛП. Сформулировано и доказано утверждение о единственности симметричной БФ, порождающей квадратичную формую. Дано определение матрицы КФ, представление матрицы КФ при замене базиса, развернутое координатное представление КФ
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.4	Квадратичные функции (формы) на линейном пространстве. Часть 2	*Лекция:* дается определение диагонального и канонического видов КФ. Сформулированы и доказаны теорема о диагональном виде КФ в определенном базисе ЛП, и следствие из нее о приведении КФ к каноническому виду
		Семинар: разбор задач по темам лекции

		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
9	**Ранг и индекс квадратичной формы на линейном пространстве**	
9.1	Определение ранга и индекса квадратичной формы на линейном пространстве	*Лекция:* сформулированы и доказаны утверждение о рангах произведений матриц, теорема о независимости ранга матрицы КФ от базиса, следствие из нее о числе ненулевых коэффициентов в каноническом виде КФ. Даются определения ранга КФ, его обозначение, положительно и отрицательно определенной, положительно и отрицательно полуопределенной КФ на ЛП, индекса КФ, его обозначение.
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
9.2	Закон инерции квадратичных форм	*Лекция:* сформулирована и доказана теорема о законе инерции квадратичных форм. Приведены некоторые итоги о связи индекса, ранга КФ и ее канонического вида.
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
9.3	Критерий Сильвестра	*Лекция:* сформулирована и доказана теорема - критерий Сильвестра
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10	**Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах**	
10.1	Присоединенное линейное преобразование евклидова пространства	*Лекция:* дается определение присоединенного линейного преобразования евклидова пространства. Сформулировано и доказано утверждение о единственности присоединенного преобразования. Озвучено замечание о присоединенном преобразовании симметричных КФ. Сформулирована и доказана теорема о существовании ортонормированного базиса, в котором КФ имеет диагональный вид
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.2	Еще одно определение евклидова пространства	*Лекция:* дается определение евклидова пространства через положительно определенную КФ. Сформулирована и доказана теорема об

		эквивалентности определений евклидова пространства. Озвучено замечание о записи скалярного произведения через координатные столбы и матрицу КФ
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.3	Одновременное приведение двух квадратичных форм к диагональному виду	*Лекция:* сформулирована и доказана теорема о существовании базиса в ЛП, в котором обе КФ имеют диагональный вид. Представлены алгоритмы приведения к диагональному виду двух КФ
		Семинар: разбор задач по темам лекции
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	Тест №4	*Самостоятельная работа:* тестирование по материалам лекции
11	**Промежуточная аттестация**	Тестирование

4.3. Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

1. Линейные подпространства линейных пространств

Найдите размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $a_1, \dots, a_k$ и $b_1, \dots, b_k$.

$n = 3$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Обучающийся должен знать определение размерности ЛП, уметь находить размерность суммы подпространств, пересечения подпространств и базисы в них.

2. Отображения и преобразования линейных пространств

Отображение двумерного вещественного арифметического пространства в линейное пространство вещественных квадратных матриц второго порядка задано формулой $\varphi\left(\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} x & -y \\ y & x \end{Vmatrix}$. Найдите матрицу отображения φ в стандартных базисах указанных пространств.

Обучающийся должен знать определение линейного отображения, уметь находить матрицу линейного отображения в различных базисах.

3. Евклидово пространство

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ найдите ортогональную матрицу Q и вещественную диагональную матрицу B такие, что $A = Q^{-1}BQ$.

Обучающийся должен уметь находить ортогональную матрицу и вещественную диагональную матрицу, удовлетворяющих нужным условиям.

4. Функции на линейных пространствах.

Найдите невырожденное линейное преобразование, одновременно приводящее форму $f = -4x_1x_2$ к диагональному виду, а форму $g = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$ – к каноническому виду.

Обучающийся должен уметь приводить одновременно к диагональному и каноническому виду квадратичные функции на ЛП и находить соответствующее линейное преобразование.

4.4. Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 17-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2020. – 448 с.
2. Умнов А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Учебное пособие. – 4-е изд., испр. и доп. – М: МФТИ. 2021. – 544 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. – 3-е изд., стер. - Москва: МЦНМО, 2018, 272 с.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. – 4-е изд, стер. - Москва: МЦНМО, 2021, 368 с.

Дополнительная литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 1, 2, 3. – М. : Дрофа, 2007.
2. Геворкян П.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М. : Физматлит, 2007.
3. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Учебное пособие. 13-е изд., стер. – СПб: Издателсьтво «Лань», 2010. – 480 с.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

2. http://www.exponenta.ru – образовательный математический сайт.
3. http://mathnet.ru – общероссийский математический портал. 4. http://www.edu.ru – федеральный портал «Российское образование».
4. http://benran.ru –библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

5. http://www.i-exam.ru – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

6. https://mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/ Ершов_Л_ЛА_2020.pdf – Лекции по линейной алгебре, А.В. Ершов.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	**Вид занятий**	**Наименование оборудования, программного обеспечения**
Система дистанционного обучения	Лекции	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Семинары	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	**Основные показатели оценки**	**Формы и методы контроля и оценки**
Понятие линейного пространства	Определение линейного пространства, аксиомы ЛП, определение комплексного ЛП, элемента ЛП, вещественного ЛП, примеры линейных пространств, определение разности векторов, линейной комбинации векторов из ЛП, линейно зависимой и независимой системы векторов, базиса, обозначение базисных векторов, размерности ЛП. Примеры	

	размерностей ЛП. Умение определять размерность ЛП, находить координаты векторов через матрицу перехода	
Линейные подпространства линейных пространств	Определение линейного подпространства ЛП, примеры. Умение определять линейную зависимость и независимость систем векторов в ЛП. Определение линейной оболочки множества векторов, свойства линейной оболочки ЛП, определение пересечения подпространств, суммы линейных подпространств, их обозначения. Умение определять размерность суммы подпространств. Определение прямой суммы подпространств, ее обозначение, свойства.	Тестирование по лекциям 1 и 2
Линейные отображения линейных пространств	Определения отображений ЛП, линейных отображений ЛП, линейного преобразования ЛП. Свойства линейных отображений и преобразований. Определение множества значений отображений ЛП, размерности этого множества, определение сюръекции или наложения, ядра множества, инъекции или вложения. Критерий инъективности отображения. Умение представлять линейные отображения в координатной записи. Определение матрицы линейного отображения в паре базисов. Умение находить размерность отображаемого пространства через ранг множества отображений и размерности его ядра. Определение взаимно однозначного отображения. Критерий взаимной однозначности отображения. Понятие изоморфизма взаимно однозначного отображения, изоморфных ЛП. Умение выражать матрицы линейного отображения через матрицы перехода. Простейший вид матрицы линейного отображения. Определение суммы линейных отображений, произведения отображения на число, произведения отображений. Умение находить	

	матрицу произведения отображений, ранг произведения отображений, определение обратного отображения	
Линейные преобразования линейных пространств (Линейные операторы)	Определение матрицы линейного преобразования. Умение находить матрицу линейного преобразования через матрицы перехода. Определение инвариантного линейного подпространства, ограничения преобразования на линейное подпространство, собственного вектора и собственного значения преобразования. Умение находить собственные значения и собственные векторы ЛП. Определение характеристического уравнения, характеристического многочлена матрицы преобразования, следа матрицы преобразования, его обозначение	
Свойства собственных значений и собственных векторов линейных преобразований	Определение собственных подпространств. Умение находить сумму собственных подпространств. Определение инварианта преобразования. Умение оценивать размерность собственного подпространства. Определение диагональной матрицы. Условие диагональности матрицы линейного преобразования в некотором базисе. Свойства собственных значений и собственных векторов линейных преобразований	Тестирование по лекциям 3, 4, 5
Евклидово пространство	Определение евклидова пространства, аксиомы евклидова пространства, определение скалярного произведения векторов евклидова пространства, длины вектора евклидова пространства, угла между векторами евклидова пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Определение ортогональности векторов, нулевого вектора евклидова пространства, ортогональной и ортонормированной системы векторов. Алгоритм процесса ортогонализации Грамма-Шмидта. Умение находить скалярное	

	произведение векторов евклидова пространства в координатном и матричном видах. Определение матрицы Грамма, её свойства. Определение и свойства ортогональной матрицы, определение ортогонального дополнения евклидова пространства, его обозначение, свойства. Умение находить размерность ортогонального дополнения подпространства.	
Линейные преобразования в евклидовом пространстве	Определение сопряженного линейного преобразования евклидова пространства, самосопряженного линейного преобразования евклидова пространства. Умение находить собственные значения и собственные векторы самосопряженного преобразования. Определение изоморфных евклидовых пространств. Условии изоморфности евклидовых пространств. Определение ортогонального преобразования евклидова пространства	Тестирование по лекциям 6, 7
Функции на линейных пространствах	Понятие о функции на ЛП, о функционалах на ЛП, определение линейной функции на ЛП, координатное представление линейной функции, определение координатной строки линейной функции в базисе, билинейной функции (БФ) на линейном пространстве, билинейной формы, координатное представление БФ. Умение находить матричный вид БФ при замене базиса. Определение симметричной БФ. Условие симметричности БФ. Определение квадратичной формы (КФ) на ЛП, матрицы КФ. Умение находить матрицу КФ при замене базиса. Определение диагонального и канонического видов КФ. Умение приводить КФ к каноническому виду.	
Ранг и индекс квадратичной формы на линейном пространстве	Умение находить ранг произведения матриц. Определения ранга КФ, его обозначение, положительно и отрицательно определенной,	

	положительно и отрицательно полуопределенной КФ на ЛП, индекса КФ, его обозначение. Закон инерции квадратичных форм. Связь индекса, ранга КФ и ее канонического вида. Критерий Сильвестра	
Билинейные и квадратичные формы в евклидовых пространствах	Определение присоединенного линейного преобразования евклидова пространства. Умение находить ортонормированный базис, в котором КФ имеет диагональный вид. Определение евклидова пространства через положительно определенную КФ. Умение приводить к диагональному виду двух КФ	Тестирование по лекциям 8, 9, 10
Промежуточная аттестация	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

7. Составители программы

Д. А. Терёшин Доцент кафедры высшей математики МФТИ
А. В. Ершов Доцент кафедры высшей математики МФТИ

Согласовано
Зам. директора ЦДПО

___________У.Б. Вещезерова
« 24 » _____09_____ 2021 г.

Согласовано
Зав. кафедрой высшей математики

_____________ Г. Е. Иванов
« 24 » _____09_____ 2021 г.