

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)

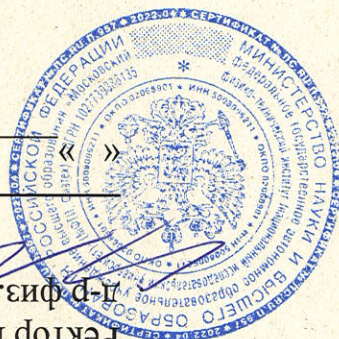
УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2022 г.



Программа
дополнительного образования
«Краткие интервью и гармонический анализ для поступающих в
магистратуру»

Москва 2022

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Краткие интегралы и гармонический анализ для поступающих в магистратуру» является дать обучающимся математический аппарат, который будет использоваться в дальнейшем при изучении естественно-научных дисциплин и в научно-исследовательской работе.

1.2. Категория слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): студенты бакалавриата, студенты специалитета и прочие слушатели, освоившие школьные курсы алгебры и геометрии, вузовские курсы введения в математический анализ, алгебры и геометрию, аналитической геометрии и линейной алгебры, и желающие получить знания, умения и навыки по теме курса.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 72 академических часа.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

1.5. Режим обучения: 7 недель (10 часов в неделю)

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- понятие кратного интеграла
- понятие криволинейного интеграла
- понятие поверхностного интеграла
- формулы Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса
- понятие тригонометрического ряда Фурье
- свойства тригонометрических рядов Фурье
- понятие преобразования Фурье

уметь:

- вычислять кратные интегралы
- вычислять криволинейные интегралы первого и второго рода
- вычислять поверхностные интегралы первого и второго рода
- сводить вычисление интегралов одного типа к интегралам другого типа с помощью формул Грина, Остроградского-Гаусса и Стокса
- раскладывать функции в тригонометрический ряд Фурье
- исследовать тригонометрические ряды Фурье на равномерную сходимость
- вычислять преобразование Фурье

владеть:

- навыками использования стандартных методов и моделей многомерного анализа и их применения к решению прикладных задач

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

- Кратные интегралы
- Криволинейные интегралы. Формула Грина
- Поверхностные интегралы
- Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Скалярные и векторные поля
- Ряды Фурье
- Преобразование Фурье.
- Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе		Итого		Итоговый тест	9
			Аудит. занятия	Самост. работа				
1	Кратные интегралы	12,6	3,2	9,4				
2	Криволинейные интегралы. Формула Грина	12,6	3,2	9,4				
3	Поверхностные интегралы	11,4	2,8	8,6				
4	Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Скалярные и векторные поля	13,2	3,4	9,8				
5	Ряды Фурье	14,5	4,4	10,1				
6	Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами	6,7	1,7	5				
9	Итоговый тест	1		1				
		72	18,7	53,3				

4. Содержание программы
4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)		Тема урока		Кол-во часов	Аудит. занятия	Самост. работа
1. Краткие интегралы	1. Краткие интегралы	Урок 1. Вычисление кратных интегралов		2	4	
		1.1 Мера Жордана		0,4		0,8
		1.2 Кратный интеграл Римана		0,2		0,4
		1.3 Свойства кратного интеграла		0,2		0,4
		1.4 Сведение кратного интеграла к повторному		0,3		0,6
		1.5 Переход от кратного интеграла к повторному		0,3		0,6
		1.6 Смена порядка интегрирования		0,2		0,4
		1.7 Вычисление кратного интеграла		0,1		0,2
		1.8 Вычисление трехмерного кратного интеграла		0,3		0,6
		Урок 2. Замена переменных в кратном интеграле		1,2	5,4	
		1.9 Замена переменных в кратном интеграле		0,2		0,4
		1.10 Вычисление кратного интеграла с помощью полярной замены координат		0,2		0,4
		1.11 Переход к сферическим координатам в кратном интеграле		0,3		0,6
		1.12 Вычисление кратного интеграла с помощью сферической замены координат		0,1		0,2
		1.13 Вычисление кратного интеграла с помощью эллиптической замены координат		0,2		0,4
		1.14 Вычисление кратного интеграла с помощью цилиндрической замены координат		0,1		0,2
		1.15 Вычисление кратного интеграла с помощью сферической замены координат. Геометрическое приложение		0,1		0,2
		2. Криволинейные интегралы	2. Криволинейные интегралы. Формула Грина	Тест 1		
Урок 3. Криволинейные интегралы. Формула Грина				3,2	9,4	
2.1 Простая гладкая кривая				0,3		0,6
2.2 Длина простой гладкой кривой				0,1		0,2
2.3 Криволинейный интеграл первого рода				0,2		0,4
2.4 Вычисление криволинейного интеграла первого рода				0,2		0,4

3.	Поверхностные интервалы	Тест 2	2.5 Вычисление криволинейного интеграла первого рода по кривой, заданной геометрически	0,3	0,6			
			2.6 Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью параметризации трехмерной кривой	0,3	0,6			
			2.7 Криволинейный интеграл второго рода	0,2	0,4			
			2.8 Вычисление криволинейного интеграла второго рода	0,2	0,4			
			2.9 Ориентация плоской замкнутой кривой	0,3	0,6			
			2.10 Формула Грина	0,3	0,6			
			2.11 Формула Грина для многоугольной области	0,1	0,2			
			2.12 Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью формулы Грина	0,2	0,4			
			2.13 Область применимости формулы Грина	0,3	0,6			
			2.14 Вычисление криволинейного интеграла второго рода от потенциального поля	0,2	0,4			
			4. Формулы Остроградского- Лаясса и Стокса. Скалярные и векторные поля	Тест 3	Урок 4. Поверхностные интервалы	3.1 Кусочно-гладкие поверхности	0,3	0,6
						3.2 Поверхностный интеграл первого рода	0,3	0,6
	3.3 Ориентация простой гладкой поверхности	0,2				0,4		
	3.4 Ориентация кусочно-гладкой поверхности	0,2				0,4		
	3.5 Вычисление поверхностного интеграла первого рода	0,3				0,6		
	3.6 Вычисление площади поверхности	0,3				0,6		
	3.7 Вычисление массы поверхности с помощью поверхностного интеграла 1 рода	0,2				0,4		
	3.8 Поверхностный интеграл второго рода	0,3				0,6		
	3.9 Вычисление поверхностного интеграла второго рода	0,4	0,8					
	3.10 Вычисление потока векторного поля через поверхность с помощью поверхностного интеграла 2 рода	0,3	0,6					
4. Формулы Остроградского- Лаясса и Стокса. Скалярные и векторные поля	Урок 5. Формулы Остроградского-Лаясса и Стокса. Скалярные и векторные поля	4.1 Операции со скалярными и векторными полями	4.2 Вычисление дивергенции градиента	0,2	0,4			
				0,2	0,4			
				0,4	0,4			
				0,4	0,8			
4.3 Правило Лейбница				0,4	0,8			
				0,4	0,8			

5. Ряды Фурье	4.4 Применение правила Лейбница к решению задач	0,1	0,2
	4.5 Формула Остроградского-Лауэса	0,4	0,8
	4.6 Вычисление поверхностного интеграла второго рода с помощью формулы Остроградского-Лауэса	0,3	0,6
	4.7 Область применимости формулы Остроградского-Лауэса	0,4	0,8
	4.8 Формула Стокса	0,2	0,4
	4.9 Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью формулы Стокса	0,2	0,4
	4.10 Связь операций с полями с формулой Стокса	0,1	0,2
	4.11 Соленоидальные векторные поля	0,4	0,8
	4.12 Потенциальные векторные поля	0,4	0,8
	4.13 Критерий потенциальности поля	0,1	0,2
	Тест 4		3
	Урок 6. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье	3,1	5,1
	5.1 Абсолютно интегрируемая функция	0,25	0,5
	5.2 Тригонометрический ряд Фурье	0,3	0,5
	5.3 Основные задачи классической теории рядов Фурье	0,1	0,2
	5.4 Теорема Римана об осцилляции	0,2	0,4
	5.5 Ядро Дирихле и принцип локализации	0,4	0,6
	5.6 Сходимость ряда Фурье в точке	0,3	0,5
	5.7 Равномерная сходимость ряда Фурье	0,15	0,3
	5.8 Плотечная и равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье	0,3	0,5
	5.9 Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье	0,3	0,4
	5.10 Разложение функции в ряд Фурье по $\{\cos kx\}$	0,3	0,4
	5.11 Разложение функции в ряд Фурье по $\{\sin kx\}$	0,15	0,2
	5.12 Разложение в тригонометрический ряд Фурье с периодом $2l$	0,15	0,2
	5.13 Комплексная форма ряда Фурье	0,2	0,4
	Урок 7. Свойства тригонометрических рядов Фурье	1,3	5
	5.14 Разложение $f(x)$ в ряд Фурье по синусам нечетных дуг.	0,3	0,4
	5.15 Пример разложения $f(x)$ в ряд Фурье по синусам нечетных дуг	0,2	0,3

6.	Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическим многочленами	Урок 8. Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами	1,7	2
		6.1 Преобразование Фурье	0,2	0,3
		6.2 Основные свойства преобразования Фурье	0,25	0,3
		6.3 Алгебраические свойства и дифференцирование	0,3	0,4
		6.4 Нахождение преобразования Фурье	0,35	0,4
		6.5 Применение свойств преобразования Фурье	0,2	0,2
		6.6 Усреднение ряда Фурье методом Фейера	0,1	0,1
7. Итоговое тестирование		6.7 Теоремы Вейерштрасса	0,3	0,3
		Тест 6		3
		7.1. Итоговый тест		1
		5.16 Почленное интегрирование рядов Фурье	0,2	0,3
		5.17 Равенство Парсеваля	0,1	0,2
		5.18 Нахождение разложения в ряд Фурье с помощью равенства Парсеваля и почленного интегрирования	0,1	0,2
		5.19 Порядок убывания коэффициентов Фурье	0,3	0,4
		5.20 Проверка, является ли тригонометрический ряд рядом Фурье	0,1	0,2
		Тест 5		3

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
Модуль 1. Кратные интегралы		
1	Вычисление кратных интегралов	
1.1	Мера Жордана	Лекция: определение меры Жордана, клетки, меры клетки, клеточного множества, меры объединения, множества: формула меры объединения, аддитивность меры, монотонность меры. Определение нижней меры Жордана, верхней

меры Жордана, измеримого по Жордану множества, меры Жордана. Иллюстрация меры Жордана. Критерий измеримости в терминах границы множества. Основные свойства меры.	<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	
<i>Лекция:</i> понятие диаметра множества, мелкости разбиения, интегральной суммы Римана. Определение кратного интеграла Римана по схеме Римана, его обозначение. Теорема о классе интегрируемых функций.	<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	
<i>Лекция:</i> теорема о зависимости интеграла от подынтегральной функции. Теорема об интегральных неравенствах. Теорема о среднем. Теорема о зависимости интеграла от множества интегрирования.	<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	
<i>Лекция:</i> определение элементарного множества. Теорема о мере элементарного множества. Теорема о повторном интеграле на элементарном множестве, её иллюстрация для $n = 1$. Обсуждение теорем.	<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	
Сведение кратного интеграла к повторному	1.4	Переход от кратного интеграла к повторному
<i>Семinar:</i> определение множества, элементарного относительно оси. Сведение кратного интеграла к повторному. Задача о представлении кратного интеграла в виде повторного двумя способами.	<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
Смена порядка интегрирования	1.6	<i>Семinar:</i> задача о вычислении заданного повторного интеграла. Смена пределов интегрирования.
<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока		тестированию по материалам урока

1.7	Вычисление кратного интеграла	<i>Семнар:</i> задача о вычислении кратного интеграла, где область интегрирования ограничена заданными прямыми. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	1.7	Вычисление кратного интеграла
1.8	Вычисление трехмерного кратного интеграла	<i>Семнар:</i> определение элементарного множества относительно оси OZ. Теорема о сведении кратного интеграла к повторному. Задача о вычислении трехмерного кратного интеграла в области, ограниченной заданными плоскостями. Сведение трехмерного кратного интеграла к интегралу меньшей размерности. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	1.8	Вычисление кратного интеграла
2	Замена переменных в кратном интеграле			
1.9	Замена переменных в кратном интеграле	<i>Лекция:</i> что значит задать отображение. Матрица Якоби частных производных. Якобиан. Понятие диффеоморфизма. Теорема о замене переменных в интеграле. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	1.9	Вычисление кратного интеграла с помощью полярной замены координат
1.10	Вычисление кратного интеграла с помощью полярной замены координат	<i>Семнар:</i> задача о вычислении заданного кратного интеграла при помощи замены координат. Полярная замена координат. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	1.10	Переход к сферическим координатам в кратном интеграле
1.11	Переход к сферическим координатам в кратном интеграле	<i>Семнар:</i> замена координат в кратном интеграле. Якобиан. Задача о вычислении модуля Якобиана для полярных координат, для сферических координат, для цилиндрических координат. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	1.11	Вычисление кратного интеграла с помощью сферической замены координат
1.12	Вычисление кратного интеграла с помощью сферической замены координат	<i>Семнар:</i> задача о вычислении кратного интеграла в заданной области с помощью сферической замены координат. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	1.12	Вычисление кратного интеграла с помощью
1.13	Вычисление кратного интеграла с помощью	<i>Семнар:</i> задача о вычислении трехмерного кратного интеграла в заданной области с помощью	1.13	Вычисление кратного интеграла с помощью

эллиптической замены координат		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока		Тест 1	Материалом модуля
Модуль 2. Криволинейные интегралы. Формула Грина					
3	Криволинейные интегралы. Формула Грина				
2.1	Простая гладкая кривая	<i>Лекция:</i> определение вектор-функции, непрерывной (дифференцируемой) вектор-функции, производной вектор-функции. Теорема Ларанжа для вектор-функции. Определение допустимой вектор-функции, тогда вектор-функции, радиус-вектора, простой гладкой кривой, параметризации кривой. Иллюстрация определения. Понятие касательной, замкнутой кривой. Примеры простой гладкой кривой, замкнутой простой кривой, простой плоской кривой некоторого класса. Понятие кривой. Утверждение об определении одной и той же кривой двумя допустимыми вектор-функциями. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	<i>Лекция:</i> определение разбиения отрезка, разбиения кривой на дуги, вписанной ломаной, длины кривой, спрямляемой кривой. Свойства длины кривой. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	2.2	Длина простой гладкой кривой
2.3	Криволинейный интеграл	<i>Лекция:</i> определение криволинейного интеграла первого рода (КИПР). Основные свойства КИПР.			

2.9	Ориентация плоской замкнутой кривой	Определение внутренней и внешней кривой. Теорема Жордана о разбивании плоскости.
2.8	Вычисление криволинейного интеграла второго рода	Семнар: определение криволинейного интеграла второго рода (КИР). Основные отличия от КИП, альтернативные формы записи КИР. Задача о вычислении КИР. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
2.7	Криволинейный интеграл второго рода	Лекция: определение криволинейного интеграла второго рода (КИР) по дуге. Обсуждение символической обозначения, дважды сложной подынтегральной функции. Теорема об основных свойствах КИР. Теорема о вычислении КИР в произвольной параметризации. Определение КИР на кусочно-гладкой кривой. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.6	Вычисление криволинейного интеграла первого рода с помощью параметризации трехмерной кривой	Семнар: задачи о вычислении криволинейных интегралов по кривым, заданным параметрически. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
2.5	Вычисление криволинейного интеграла первого рода по кривой, заданной геометрически	Семнар: задача о вычислении КИП по замкнутой ломаной с вершинами в заданных точках. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.4	Вычисление криволинейного интеграла первого рода	Семнар: определение КИП по заданной кривой. Вычисление КИП по заданной кривой. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	первого рода	Теорема о вычислении КИП в произвольной параметризации. Определение кусочно-гладкой кривой. Определение КИП по кусочно-гладкой кривой. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

3.1	Кусочно-гладкие поверхности	Лекция: понятие допустимой вектор-функции. Определение простой гладкой поверхности (ППП).
4	Поверхностные интегралы	
Модуль 3. Поверхностные интегралы		
2.10	Формула Грина	Определение положительной ориентации замкнутой кусочно-гладкой кривой относительно связности. Определение односвязных областей. Примеры односвязных областей. Определение многосвязной области. Определение положительно ориентированной границы. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.11	Формула Грина для многосвязной области	Лекция: формула Грина для многосвязной области, её доказательство. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.12	Вычисление криволинейного интеграла второго рода с помощью формулы Грина	Семинар: формула Грина. Понятие положительного направления обхода. Задача о вычислении КИВР с помощью формулы Грина. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.13	Область применимости формулы Грина	Семинар: задача о вычислении КИВР с помощью формулы Грина, где контур не задан явно. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
2.14	Вычисление криволинейного интеграла второго рода от потенциального поля	Семинар: случай особого вида векторного поля. Задача о вычислении КИВР от потенциального поля. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
Тест 2		Самостоятельная работа: тестирование по материалам лекции

3.6	Вычисление площади поверхности	Семinar: задача о нахождении площади поверхности заданного конуса, заключенного внутри заданного цилиндра.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
3.5	Вычисление поверхности первого рода	Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
3.4	Ориентация кусочно-гладкой поверхности	Лекция: согласование ориентации ПП с ориентацией её края. Определение ориентируемой КПП.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
3.3	Ориентация простой гладкой поверхности	Лекция: определение гладкой поверхности. Примеры гладких поверхностей. Определение замкнутой (кусочно-гладкой) поверхности. Примеры замкнутых поверхностей. Определение ориентируемой гладкой поверхности. Лемма об ориентируемости простых и замкнутых ПП. Пример гладкой, но не ориентируемой поверхности.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
3.2	Поверхностный интеграл первого рода	Лекция: понятие дифференциала площади поверхности. Определение поверхности первого рода (ПИПР). Лемма о корректности определения. Определение площади (плоской меры) простой гладкой поверхности, площади кусочно-гладкой поверхности.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
3.1	Параметризация поверхности, касательной плоскости. Определение края ПП с краем или куском, точек гладкости. Примеры кусков. Определение кусочно-гладкой поверхности (КПП). Примеры КПП.	Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к
		Семinar: определение поверхности первого рода (ПИПР). Задача о вычислении ПИПР.	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к

4.2	Вычисление дивергенции	Семинар: задача о нахождении дивергенции
4.1	Операции со скалярными и векторными полями	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
		Семинар: понятие оператора набла, градиента, дивергенции, ротора, производной по направлению, оператора Лапласа, градиента одного вектора по другому вектору. Задача о вычислении производной по направлению заданной функции.
5	Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Скалярные и векторные поля	
Модуль 4. Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса. Скалярные и векторные поля		
3.10	Вычисление потока векторного поля через поверхность с помощью поверхностного интеграла 2 рода	Тест 3
		Самостоятельная работа: тестирование по материалам модуля
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
		Семинар: физическое приращение к ПИВР. Задача о вычислении потока векторного поля через поверхность.
3.9	Вычисление поверхностного интеграла второго рода	Семинар: определение ПИВР, его свойство. Задача о вычислении ПИВР, где поверхность – внутренняя сторона заданной полусферы.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.8	Поверхностный интеграл второго рода	Лекция: понятие вектора дифференциальной площади. Определение поверхностного интеграла второго рода (ПИВР). Физический смысл ПИВР. Теорема о вычислении ПИВР. Следствие о вычислении ПИВР в случае явного задания ППТ. Интеграл по верхней стороне поверхности. Обозначение ПИВР. ПИВР на КГП.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
3.7	Вычисление массы поверхности с помощью поверхностного интеграла 1 рода	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
		Семинар: физические приложения поверхностных интегралов. Задача о вычислении массы заданной поверхности с некоторой поверхностью

4.9	Вычисление		Семinar: формула Стокса. Задача о вычислении
4.8	Формула Стокса		Лекция: понятие циркуляции. Определение ротора векторного поля. Теорема Стокса, ее обоснование. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.7	Область применимости формулы Остроградского-Гаусса		Семinar: задача о вычислении ПИВР по внешней стороне части заданного эллипсоида. Область применимости формулы Остроградского-Гаусса. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.6	Вычисление поверхностного интеграла второго рода с помощью формулы Остроградского-Гаусса		Семinar: формула Остроградского-Гаусса. Задача о вычислении ПИВР по внутренней стороне заданной сферы с помощью формулы Остроградского-Гаусса. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.5	Формула Остроградского-Гаусса		Лекция: определение дивергенции векторного поля. Обоснование определения. Теорема Остроградского-Гаусса, ее доказательство. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.4	Применение правила Лейбница к решению задач		Семinar: задача о нахождении дивергенции скалярного произведения функции и вектора с помощью правила Лейбница. Вспомогательные формулы. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
4.3	Правило Лейбница		Семinar: правило Лейбница. Задача о вычислении дивергенции скалярного произведения скалярной функции и векторной функции. Задача о нахождении дивергенции векторного произведения векторов. Задача о вычислении ротора векторного произведения некоторых векторов. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
	градиента		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока

6	Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье	
Модуль 5. Ряды Фурье		
4.10	Связь операций с полями с формулой Стокса	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
		Семinar: задача на доказательство, что для простой гладкой поверхности циркуляция по её краю векторного поля равна заданной формуле.
	формулы Стокса	КИВР по заданной кривой, ориентированной положительно относительно некоторого вектора.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.11	Солёноидальные векторные поля	Лекция: теорема о геометрическом смысле дивергенции. Определение солёноидальности. Примеры объёмно односвязных областей. Критерий солёноидальности. Пример несолёноидального векторного поля, дивергенция которого равна нулю.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
	Потенциальные векторные поля	Лекция: теорема о проекции ротора на некоторое направление в заданной точке. Определение потенциального векторного поля, его потенциала. Любая критерий потенциальности. Теорема об описании всех потенциалов. Определение безвихревого векторного поля на некоторой области. Определение поверхности односвязных областей. Критерий потенциальности с применением понятия ротора.
		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.12	Потенциальные векторные поля	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
		Семinar: задача о доказательстве потенциальности поля, и что его потенциал – решение уравнения Лапласа.
	Критерий потенциальности поля	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
		Тест 4
Материалам модуля		

5.1	Абсолютно интегрируемая функция	<i>Лекция:</i> определение абсолютно интегрируемой функции на заданном интервале. Обозначение. Лемма об умножении функций. Лемма о сдвиге при интегрировании на периоде. Определение пространства абсолютно интегрируемых (AI) с квадратом функций. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	5.2	Тригонометрический ряд Фурье	<i>Лекция:</i> определение почти скалярного произведения функций, интегральной евклидовой нормы (полунормы) функции. Определение тригонометрической системы (ТС). Теорема об ортогональности ТС. Понятие тригонометрического ряда (ТР), тригонометрических коэффициентов Фурье (ТКФ). Определение тригонометрического ряда Фурье (РФ). <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	5.3	Основные задачи классической теории рядов Фурье	<i>Лекция:</i> типы задач. Вопросы задач первого типа. Замечание о поточечной сходимости ТР. Вопросы задач второго типа. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	5.4	Теорема Римана об осцилляции	<i>Лекция:</i> теорема Римана об осцилляции, её доказательство. Следствие из теоремы о коэффициентх Фурье. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	5.5	Ядро Дирихле и принцип локализации	<i>Лекция:</i> определение ядра Дирихле. Теорема о ядре Дирихле, доказательство её утверждений. Лемма о представлении частичных сумм Р.Ф. Интервал Дирихле. Доказательство сформулированной леммы. Лемма о локализации интервала Дирихле. Принцип локализации. Доказательство леммы. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	5.6	Сходимость ряда Фурье в точке	<i>Лекция:</i> лемма о достаточном условии Дини сходимости РФ в точке. Доказательство леммы. Определение обобщенных односторонних
-----	---------------------------------	---	-----	------------------------------	--	-----	---	--	-----	------------------------------	--	-----	------------------------------------	--	-----	-------------------------------	--

5.10	Разложение функции в ряд Фурье по $\{\cos kx\}$	Семinar: задача о разложении в ряд Фурье по косинусам, построении графика суммы ряда, исследование ряда Фурье на равномерную сходимость. Альтернативная форма записи разложения в ряд Фурье.
5.9	Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье	Семinar: задача о разложении заданной функции в ряд Фурье, построении графика суммы ряда, исследование ряда Фурье на равномерную сходимость. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
5.8	Плотечная и равномерная сходимость тригонометрических рядов Фурье	Семinar: определение тригонометрического ряда, ряда Фурье. Задача о разложении заданной функции в ряд Фурье, типовая задача о разложении заданной функции в ряд Фурье, построении графика суммы ряда, исследование на равномерную сходимость. Теорема о поточечной сходимости РФ. Теорема о равномерной сходимости РФ для 2π-периодической, непрерывной, кусочно непрерывно дифференцируемой функции. Теорема о непрерывности в некоторой точке суммы ряда. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.7	Равномерная сходимость ряда Фурье	Лекция: определение кусочно-гладкой функции. Теорема о равномерной сходимости РФ к 2π-периодической кусочно-гладкой функции. Теорема о почленном дифференцировании РФ. Определение кусочно-непрерывной на отрезке функции. Теорема о почленном интегрировании РФ. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
		Доказательство теорем. Следствие о сходимости РФ к значению функции в точке. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции Семinar: задача о разложении заданной функции в ряд Фурье, построении графика суммы ряда, исследование ряда Фурье на равномерную сходимость. Альтернативная форма записи разложения в ряд Фурье.

		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.11	Разложение функции в ряд Фурье по $\{\sin kx\}$	Семinar: задача о разложении в РФ заданной функции, построении графика суммы ряда. Задача о разложении в РФ по синусам. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.12	Разложение в тригонометрический ряд Фурье с периодом $2l$	Семinar: задача о разложении в РФ $2l$ -периодической функции. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.13	Комплексная форма ряда Фурье	Семinar: комплексный ряд Фурье. Задача о комплексной форме РФ функции с периодом π . Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
7	Свойства тригонометрических рядов Фурье		
5.14	Разложение $f(x)$ в ряд Фурье по синусам нечетных l и $2l$.	Семinar: задача о продолжении функции на заданном интервале, чтобы разложение в РФ было по синусам. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.15	Пример разложения $f(x)$ в ряд Фурье по синусам нечетных l и $2l$.	Семinar: задача о разложении заданной функции на интервале по синусам. Вспомогательная таблица четности. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.16	Полное интегрирование рядов Фурье	Семinar: задача о разложении в РФ для квадрата и куба. Полное интегрирование. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.17	Равенство Парсеваля	Семinar: равенство Парсеваля. Задача о нахождении числового ряда с помощью равенства Парсеваля. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока	
5.18	Нахождение разложения в	Семinar: задача. По заданным двум разложениям	

6.3	Алгебраические свойства и дифференцирование	Лекция: теорема об алгебраических операциях и преобразованиях Фурье. Свойства линейности, растяжения аргумента, сдвига аргумента. Теорема о преобразовании Фурье производной. Следствие о преобразовании Фурье в применении к производным высокого порядка. Теорема о производной преобразования Фурье высокого порядка.
6.2	Основные свойства преобразования Фурье	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.1	Преобразование Фурье	Лекция: теорема об основных свойствах прямого и обратного преобразования Фурье. Обсуждение теоремы о Фурье-образе. Лемма о Фурье-образе четных и нечетных функций. Теорема о формуле обращения. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8	Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении	
Модуль 6. Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении		
5.20	Проверка, является ли тригонометрический ряд рядом Фурье	Тест 5
5.19	Порядок убывания коэффициентов Фурье	Семинар: лемма Римана об оциллиции. Теорема о порядке убывания коэффициентов Фурье. Задача о порядке убывания коэффициентов Фурье заданных функций. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока
	ряд Фурье с помощью равенства Парсеваля и почленного интегрирования	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам урока Парсеваля.
		получить разложение заданной функции в РФ, используя почленное интегрирование и равенство Парсеваля.

		Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции Семinar: определение преобразования Фурье, обратного преобразования Фурье. Интегралы Дирихле, Пуассона, Лапласа. Задачи о преобразовании Фурье некоторых функций. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	6.4	Нахождение преобразования Фурье	Семinar: задача о доказательстве, что преобразование Фурье заданной функции имеет 10 непрерывных производных. Задача о нахождении преобразования Фурье произвольной заданной функции. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	6.5	Применение свойств преобразования Фурье	Лекция: определение сумм Фейера, ядер Фейера. Лемма о свойствах ядер Фейера. Их обсуждение, сравнение ядер Фейера с ядрами Дирихле. Лемма об интегральном представлении сумм Фейера. Обсуждение леммы. Теорема Фейера об аппроксимации. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	6.6	Усреднение ряда Фурье методом Фейера	Лекция: определение тригонометрического многочлена. Первая теорема Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическим многочленом. Доказательство теоремы. Вторая теорема Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами, её доказательство. Понятие конечномерных и бесконечномерных линейных пространств. Примеры таких пространств. Определение нормированного линейного пространства, нормы. Примеры норм в заданном пространстве. Замечание о порождении разными нормами разных нормированных пространств. Понятие систем векторов. Определение полной системы векторов. Переработка теоремы Вейерштрасса в терминах полных систем. Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции	6.7	Теоремы Вейерштрасса о приближении	Самостоятельная работа: изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
--	--	--	-----	---------------------------------	--	-----	---	--	-----	--------------------------------------	---	-----	------------------------------------	---

Тест 6	Самостоятельная работа: тестирование по материалам модуля
7	Самостоятельная работа: тестирование по материалам курса

4.3. Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

1. Вычислить повторный интеграл $\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x+y) dy$

Слушателю необходимо ознакомиться с материалами лекций и семинаров 1 модуля

2. Вычислите $\int_{\Gamma} y dx + x dy$, где Γ – отрезок AB с концами $A(0,0), B(1,1)$

Слушателю необходимо ознакомиться с материалами лекций и семинаров 2 модуля

3. Вычислить $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$, где S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Слушателю необходимо ознакомиться с материалами лекций и семинаров 3 модуля

4. Пусть $r = (x, y, z), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найти $grad u$, где $u = u(r)$.

Слушателю необходимо ознакомиться с материалами лекций и семинаров 3 модуля

4.4. Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Дымарский Я.М. "Лекции по математическому анализу. Часть 3" Москва, МФТИ. 2022.
2. Бесов О.В. "Лекции по математическому анализу. Часть 2" Москва, Физматлит, 2016.
3. Иванов Г.Е. "Лекции по математическому анализу. Часть 2" Москва, МФТИ, 2017.
4. Петрович А.Ю. "Лекции по математическому анализу. Часть 3" Москва, МФТИ. 2017

5. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. "Сборник задач по математическому анализу. Т. 1-3. Прелюдия, непрерывность, дифференцируемость." 2е изд., перераб. М.: Физматлит, 2019.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <https://mir.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/> -- сайт кафедры высшей математики МФТИ, на котором есть указанные выше учебники
2. <https://mir.ru/education/chair/mathematics/exams/exams.php> -- варианты экзаменационных контрольных МФТИ прошлых лет с ответами по математическим дисциплинам

3. <http://www.exponenta.ru> -- образовательный математический сайт.

4. <http://mathnet.ru> -- общероссийский математический портал.

5. <http://www.edu.ru> -- федеральный портал «Российское образование».

6. <http://benpa.ru> -- библиотека по естественным наукам Российской академии наук.

7. <http://www.i-exam.ru> -- единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

5. Материально-технические условия реализации программы

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Лекции	Слушателью необходимо компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателью необходимо компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Семинары	Слушателью необходимо компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Итоговое тестирование	Слушателью необходимо компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

Таблица 4

6. Оценка качества освоения программ
Оценка качества освоения программ осуществляется в процессе промежуточной аттестации.
Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
1. Краткие интегралы	Знать: Определение меры Жордана, клетки, меры клетки, клеточного множества, меры клеточных множества. Основные свойства клеточных множества: корректность, формула меры объединения, аддитивность меры, монотонность меры. Определение нижней меры Жордана, верхней меры Жордана, измеримого по Жордану множества, меры Жордана. Критерий измеримости в терминах граничных множества. Основные свойства меры. Понятие диаметра множества, мелкости разбиения, интегральной суммы Римана. Определение кратного интеграла Римана по схеме Римана, его обозначение. Определение элементарного множества. Уметь: Решать задачи о сведении кратного интеграла к повторному. Вычислять заданные кратные интегралы при помощи смены порядка интегрирования, замены переменных, полярной замены координат, перехода к сферическим, эллиптическим, цилиндрическим координатам	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
2. Криволинейные интегралы. Формула Грина	Знать: Определение вектор-функции, непрерывной (дифференцируемой) вектор-функции, производной вектор-функции, допустимой вектор-функции, гомотопии вектор-функции, радиуса-вектора, простой гладкой кривой, параметра кривой, параметризации кривой, разбиения отрезка, разбиения кривой на дуги, вписанной ломаной, длины кривой, свойства длины кривой. Определение криволинейного интеграла первого рода (КИПР). Основные свойства КИПР. Определение КИПР по кусочно-	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

Таблица 5

4. Формулы Остроградского-Лапласа и Скалярные и векторные поля	3. Поверхностные интегралы	
Знать: Операторы градиента, дивергенции, ротора, производной по направлению, оператора Лапласа, градиента одного вектора по другому вектору. Лравило Лейбница о производной произведения. Формулу Остроградского-Лапласа. Формулу Стокса. Определение потенциального векторного поля, его потенциала. Глобальный критерий потенциальности. Уметь:	Знать: Определение простой гладкой поверхности (ППТ), параметризации поверхности, ППТ с краем или куском, края ППТ, точек гладкости. Определение кусочно-гладкой поверхности (КГТ). Определение поверхности интеграла первого рода (ПИПР). Определение поверхности интеграла второго рода (ПИВР). Физический смысл ПИВР. Уметь: Вычислять ПИПР. Вычислять площадь заданной поверхности. Вычислять массу заданной поверхности с некоторой поверхностной плотностью. Вычислять ПИВР. Вычислять поток векторного поля через поверхность.	Определение криволинейного интеграла второго рода (КИБР) по дуге. Основные свойства КИБР. Определение КИБР на кусочно-гладкой кривой. Формулу Грина. Область применимости формулы Грина. Уметь: Вычислять КИПР по заданной кривой, по кривой, заданной геометрически, с помощью параметризации трехмерной кривой. Вычислять КИБР в том числе с помощью формулы Грина. Вычислять КИБР от потенциального поля.
Самостоятельное выполнение заданий, тестирование	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование	

	Решать задачи с операторами набла, градиента, дивергенции, ротора, произвольной по направлению, оператора Лапласа, градиента одного вектора по другому вектору. Вычислять $\nabla \cdot \mathbf{F}$ с помощью формулы Остроградского-Гаусса. Вычислять $\nabla \times \mathbf{F}$ с помощью формулы Стокса.	Знать: Определение тригонометрического ряда Фурье (РФ). Определение ядра Дирихле. Интервал Дирихле. Теорема о поточечной сходимости РФ. Теорема о равномерной сходимости РФ для 2π-периодической, непрерывной, кусочно непрерывно дифференцируемой функции. Теорема о непрерывности в некоторой точке суммы ряда. Определение комплексного ряда Фурье. Равенство Парсеваля. Лемма Римана об осцилляции. Теорема о порядке убывания коэффициентов Фурье. Уметь: Решать задачи о разложении заданной функции в ряд Фурье, построении графика суммы ряда, исследования на равномерную сходимость. Решать задачи о разложении заданной функции в ряд Фурье по косинусам или по синусам. Решать задачи о почленном интегрировании, о нахождении сумм числового ряда с помощью равенства Парсеваля. Решать задачи о порядке убывания коэффициентов Фурье заданных функций. Определять, является ли заданный тригонометрический ряд рядом Фурье.	5. Ряды Фурье	6. Преобразование Фурье. Теоремы Вейерштрасса о приближении и непрерывных функций Преобразование Фурье. Определение преобразования Фурье, обратного преобразования Фурье. Основные свойства прямого и обратного преобразования Фурье. Формула обращения. Алгебраические операции и преобразование Фурье. Интегрирование и дифференцирование преобразования Фурье. Интегралы Дирихле, Пуассона, Лапласа. Определение сумм Фейера, ядер Фейера. Определение тригонометрического многочлена.	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
--	---	--	----------------------	---	---

исכיםи многочленз ми	Первая и вторая теоремы Вейерштрасса. Уметь: Находить преобразование Фурье
7. Итоговое тестировани е	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.
Тестирование	

7. Составители программы

Я. М. Дымарский Профессор кафедры высшей математики МФТИ

А. А. Скубачевский Старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП МФТИ

Ж. И. Зубцова

« »
2022 г.

Согласовано
Зав. кафедрой высшей
математики

Г. Е. Иванов

« »
2022 г.