

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор МФТИ

д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2023 г.



**Программа
дополнительного образования**

«Геометрия и группы»

Москва 2023

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Геометрия и группы» является ознакомление слушателей со свойствами фигур, инвариантных относительно действия некоторой группы преобразований.

1.2. Курс ориентирован на слушателей, начинающих изучение геометрии и высшей математики или знакомых с ними поверхностно и желающих разобраться глубже.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 108 академических часов.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

Программа может быть реализована в сетевой форме.

1.5. Режим обучения: 15 недель (7 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:
знать:

- определения и свойства комплексных чисел и кватернионов,
- особенности движения прямой, плоскости, окружности, сферы,
- понятие топологии,

уметь:

- определять движения на плоскости, в пространстве и на сфере,
- представлять движения в виде композиции простых движений,
- геометрически описывать комплексные числа и кватернионы,
- находить порядок элементов,
- описывать подгруппы,
- проверять подгруппы на нормальность,
- находить факторгруппы.

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

- Введение
- Движения прямой
- Движения окружности
- Начальная теория групп
- Факторизация групп
- Взаимно-однозначные соответствия

- Числа, преобразования и подобия
- Комплексные числа
- Движения сферы и плоскости
- Нормальные подгруппы и факторгруппы
- Кватернионы
- Проективная геометрия
- Двойное отношение
- Введение в топологию
- Фундаментальные группы
- Экзамен

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
0	Введение	7,3	1,3	6
1	Движения прямой	7,3	1,6	6
2	Движение окружности	7,1	1,1	5,5
3	Начальная теория групп	6,6	1,2	5,5
4	Факторизация групп	6,4	1	5,4
5	Взаимно-однозначные соответствия	7,9	1,9	6
6	Числа, преобразования и подобия	7,7	1,7	6
7	Комплексные числа	7,8	1,8	6
8	Движения сферы и плоскости	7,6	1,6	6
9	Нормальные группы и факторгруппы	6,8	1,3	5,5
10	Кватернионы	7,5	1,5	6
11	Проективная геометрия	5,8	0,9	4,9
12	Двойное отношение	6,6	1,1	5,5
13	Введение в топологию	6,8	1,3	5,5
14	Фундаментальные группы	6,8	1,3	5,5
	Экзамен	2	1	1
Итого		108	21,6	86,3

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
0. Введение	Введение	0,2	0,3
	Движения, сохраняющие треугольник: отражения	0,1	0,1
	Композиция двух отражений	0,3	0,5
	Движения, сохраняющие квадрат и окружность	0,3	0,5
	Проективная геометрия	0,4	0,6
	Задачи 0		4
1. Движения прямой	Движения прямой: отражения	0,1	0,1
	Догадка	0,1	0,1
	Параллельный перенос	0,2	0,3
	Формулировка основных утверждений	0,3	0,4
	Лемма о двух гвоздях	0,1	0,1
	Утверждение о композиции отражений	0,3	0,4
	Теорема о классификации	0,2	0,3
	Таблица композиций движений	0,3	0,3
2. Движение окружности	Задачи 1		4
	Движения окружности. Диаметрально противоположные точки	0,2	0,3
	Формулировка теоремы о классификации и доказательство леммы о гвоздях	0,3	0,4
	Композиция двух отражений	0,2	0,3
	Завершение доказательства теоремы	0,1	0,1
	Таблица умножения	0,3	0,4
3. Начальная теория групп	Задачи 2		4
	Определение группы	0,2	0,3
	Циклические группы: примеры	0,3	0,4
	Таблица остатков по умножению	0,3	0,4
	Конечные подгруппы в группе движений прямой	0,2	0,2
	Конечные подгруппы в группе движений окружности: схема доказательства	0,2	0,2
4. Факторизация групп	Задачи 3		4
	Факторизация на примере целых чисел	0,3	0,4
	Факторизация на примере движений	0,2	0,3
	Изоморфизм групп	0,3	0,4
	Пример неизоморфных групп	0,2	0,3

	Задача 4		4
5. Взаимно-однозначные соответствия	Взаимно-однозначное соответствие	0,3	0,3
	Движения плоскости	0,2	0,2
	Теорема о трёх гвоздях	0,2	0,2
	Множества, равномощные множеству натуральных чисел	0,3	0,3
	Утверждения о равномощных множествах	0,3	0,3
	Сравнение отрезка и множества натуральных чисел	0,4	0,5
	Доказательство теорема Кантора	0,2	0,2
	Задачи 5		4
6. Числа, преобразования и подобия	Перестановки из трёх элементов	0,3	0,4
	Факторизация на примере некоммукативной группы	0,4	0,5
	Числа как преобразования. Подобия	0,4	0,5
	Подобия и линейные преобразования	0,3	0,3
	Подобия на плоскости	0,3	0,3
	Задачи 6		4
7. Комплексные числа	Комплексные числа: введение	0,3	0,4
	Геометрический взгляд на умножение комплексных чисел	0,3	0,4
	Умножение комплексных чисел: доказательство	0,3	0,3
	Тригонометрический бонус	0,3	0,3
	Кватернионы: постановка задачи	0,3	0,3
	Кватернионы и вращения сферы	0,3	0,3
	Задачи 7		4
8. Движения сферы и плоскости	Описание движений сферы. Теорема о трёх гвоздях	0,4	0,5
	Классификация движений сферы: формулировка	0,4	0,5
	Движение сферы, сохраняющее две точки	0,4	0,5
	Классификация движений сферы: доказательство	0,2	0,3
	Движения плоскости	0,2	0,2
	Задачи 8		4
9. Нормальные группы и факторгруппы	Построение кватернионов. Определение нормальной подгруппы	0,3	0,4
	Нормальные подгруппы	0,3	0,4
	Аффинное пространство. Дальнейший план курса	0,2	0,2
	Факторгруппа. Описание группы кватернионов	0,2	0,2
	Четверная группа Клейна	0,3	0,3

	Задачи 9		4
10. Кватернионы	Пространство кватернионов. Сопряжение	0,5	0,7
	Расстояния между кватерионами. Движения	0,3	0,4
	Задание вращений сферы кватерионами	0,4	0,5
	Кватернионы и группа унитарных матриц	0,3	0,4
	Задачи 10		4
11. Проективная геометрия	Проективная геометрия. Гуманитарное введение	0,3	0,3
	Формальное определение проективного пространства	0,3	0,3
	Аналитическая форма для проекции	0,3	0,3
	Задачи 11		4
12. Двойное отношение	Двойное отношение четырёх точек. Формулировка теоремы характеристики	0,4	0,6
	Преобразование двойного отношения	0,4	0,5
	Геометрия Лобачевского	0,3	0,4
	Задачи 12		4
13. Введение в топологию	Комплексная проективная прямая	0,3	0,3
	Расслоение Хопфа	0,3	0,3
	Топология. Гомеоморфизмы	0,3	0,4
	Гомотопическая эквивалентность	0,4	0,5
	Задачи 13		4
14. Фундаментальные группы	Фундаментальная группа	0,3	0,4
	Высшие гомотопические группы	0,3	0,4
	Нетривиальность гомотопической группы для n-мерной сферы	0,3	0,3
	Теорема Брауэра	0,3	0,3
	Заключение	0,1	0,1
	Задачи 14		4
Экзамен		1	1

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
0	Введение	Лекции Введение Движения, сохраняющие треугольник: отражения Композиция двух отражений Движения, сохраняющие квадрат и окружность Проективная геометрия Самостоятельная работа

		Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
1	Движения прямой	Лекции Движения прямой: отражения Догадка Параллельный перенос Формулировка основных утверждений Лемма о двух гвоздях Утверждение о композиции отражений Теорема о классификации Таблица композиций движений Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
2	Движение окружности	Лекции Движения окружности. Диаметрально противоположные точки Формулировка теоремы о классификации и доказательство леммы о гвоздях Композиция двух отражений Завершение доказательства теоремы Таблица умножения Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
3	Начальная теория групп	Лекции Определение группы Циклические группы: примеры Таблица остатков по умножению Конечные подгруппы в группе движений прямой Конечные подгруппы в группе движений окружности: схема доказательства Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
4	Факторизация групп	Лекции Факторизация на примере целых чисел Факторизация на примере движений Изоморфизм групп Пример неизоморфных групп Самостоятельная работа

		Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
5	Взаимно-однозначные соответствия	Лекции Взаимно-однозначное соответствие Движения плоскости Теорема о трёх гвоздях Множества, равномощные множеству натуральных чисел Утверждения о равномощных множествах Сравнение отрезка и множества натуральных чисел Доказательство теоремы Кантора Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
6	Числа, преобразования и подобия	Лекции Перестановки из трёх элементов Факторизация на примере некоммукативной группы Числа как преобразования. Подобия Подобия и линейные преобразования Подобия на плоскости Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
7	Комплексные числа	Лекции Комплексные числа: введение Геометрический взгляд на умножение комплексных чисел Умножение комплексных чисел: доказательство Тригонометрический бонус Кватернионы: постановка задачи Кватернионы и вращения сферы Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
8	Движения сферы и плоскости	Лекции Описание движений сферы. Теорема о трёх гвоздях Классификация движений сферы: формулировка Движение сферы, сохраняющее две точки Классификация движений сферы: доказательство Движения плоскости Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.

9	Нормальные группы и факторгруппы	Лекции Построение кватернионов. Определение нормальной подгруппы Нормальные подгруппы Аффинное пространство. Дальнейший план курса Факторгруппа. Описание группы кватернионов Четверная группа Клейна Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
10	Кватернионы	Лекции Пространство кватернионов. Сопряжение Расстояния между кватернионами. Движения Задание вращений сферы кватернионами Кватернионы и группа унитарных матриц Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
11	Проективная геометрия	Лекции Проективная геометрия. Гуманитарное введение Формальное определение проективного пространства Аналитическая форма для проекции Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
12	Двойное отношение	Лекции Двойное отношение четырёх точек. Формулировка теоремы характеристики Преобразование двойного отношения Геометрия Лобачевского Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
13	Введение в топологию	Лекции Комплексная проективная прямая Расслоение Хопфа Топология. Гомеоморфизмы Гомотопическая эквивалентность Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.

14	Фундаментальные группы	Лекции Фундаментальная группа Высшие гомотопические группы Нетривиальность гомотопической группы для n-мерной сферы Теорема Брауэра Заключение Самостоятельная работа Самостоятельное выполнение заданий по теме лекции, изучение дополнительных материалов, тестирование – решение задач.
	Экзамен	Практическое занятие: итоговое тестирование по материалам лекций Самостоятельная работа: подготовка к итоговому тестированию

Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

Тестовые вопросы

Задача 1. Движением плоскости называется

- 1) Преобразование плоскости, которое содержит одну неподвижную точку
- 2) Тожественное преобразование плоскости
- 3) Преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между точками
- 4) Любая композиция поворотов плоскости

Задача 2. Рассмотрим квадрат $ABCD$ (нумерация вершин против часовой стрелки), пусть l - прямая, содержащая диагональ AC , а m - прямая, проходящая через середины AB и CD . Тогда композиция $S_l \cdot S_m$ равна

- 1) Id
- 2) R_{90°
- 3) R_{180°
- 4) R_{270°

Задача 3. Введём координату на прямой, отметим там точки с целыми координатами: $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Через S_n обозначим отражение в точке n , через T_n – параллельный перенос на число n . Какое преобразование прямой получится при композиции $S_0 \cdot S_1$?

- 1) S_2
- 2) S_1
- 3) S_0
- 4) S_{-1}
- 5) S_{-2}
- 6) T_2
- 7) T_1
- 8) T_0
- 9) T_{-1}
- 10) T_{-2}

Задача 4. Пусть l и m - перпендикулярные прямые (то есть пересекающиеся под углом в 90 градусов). Тогда композиция $S_l \cdot S_m$ будет являться

- 1) тождественным преобразованием
- 2) поворотом на 90°
- 3) поворотом на -90°
- 4) поворотом на 180°

4.3. Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Гилберт С., Найман Дж., Пейдж К. Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 2017.
2. Галочкин А. И., Галочкин Н. А. Группы и симметрии. М.: МЦНМО, 2016.
3. Биркгоф Г. Основы теории групп. М.: Мир, 2017.
4. Хелемский А. Группы и симметрии. М.: МЦНМО, 2015.

Дополнительная литература

1. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: Учебник для студентов университетов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Прикладная математика" / А.И. Кострикин, Ч. 3, Основные структуры алгебры. - 2-е изд., стер. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 271 с.
2. Мищенко, А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии : учеб. для студентов вузов, обучающихся по направлениям "510100- Математика", "511200- Математика. Прикладная математика" и специальности "010100- Математика" / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко; [Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова]. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 298 с.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

<http://lib.mipt.ru/> – электронная библиотека Физтеха

<http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».

<https://ru.wikipedia.org> – электронная энциклопедия Wikipedia.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Аудиторные занятия	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного	Экзамен	Слушателю необходим

обучения		компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
----------	--	---

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Введение	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Движения прямой	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Движение окружности	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Начальная теория групп	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Факторизация групп	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Взаимно-однозначные соответствия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Числа, преобразования и подобия	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Комплексные числа	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Движения сферы и плоскости	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Нормальные группы и факторгруппы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Кватернионы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Проективная геометрия	Установленное количество	Самостоятельное

	выполненных заданий	выполнение заданий, тестирование
Двойное отношение	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Введение в топологию	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Фундаментальные группы	Установленное количество выполненных заданий	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Экзамен	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

7. Составители программы

Зубцова Жанна Исхаковна, к.ф.-м.н., ведущий специалист Отдела сопровождения образовательных программ (Центр «Пуск»).

Согласовано
Ведущий специалист ОСОП

Согласовано
Руководитель проектов (Центр дополнительного, дополнительного профессионального и онлайн-образования "Пуск")

 Ж. И. Зубцова
«__» _____ 2023 г.

_____ М. В. Выголова
«__» _____ 2023 г.