

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
(МФТИ)**

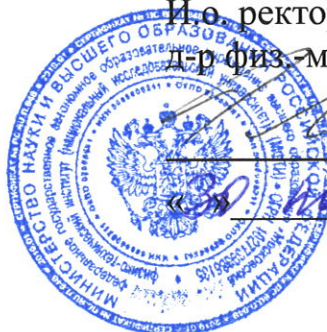
УТВЕРЖДАЮ

И.о. ректора МФТИ

Д-р физ.-мат. наук, профессор

Д.В. Ливанов

2021 г.



**Программа
дополнительного образования
«Аналитическая геометрия»**

Москва 2021

1. Общая характеристика программы

1.1. Целью реализации дополнительной общеобразовательной программы «Аналитическая геометрия» является формирование базовых знаний по аналитической геометрии для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

1.2. Категории слушателей, на обучение которых рассчитана программа дополнительного образования (далее – программа): студенты бакалавриата, студенты специалитета, аспиранты и прочие слушатели, освоившие школьные курсы алгебры и геометрии, и желающие получить знания, умения и навыки по теме курса.

1.3. Нормативный срок освоения программы – 72 академических часа.

1.4. Форма обучения – очно-заочная с применением дистанционных образовательных технологий.

1.5. Режим обучения: 13 недель (5 часов в неделю).

2. Планируемые результаты обучения

В результате освоения программы слушатель должен:

знать:

- Основные определения векторной алгебры
- Виды систем координат, способы перехода от одной системы координат к другой
- Скалярное, векторное, смешанное произведения
- Определение алгебраической линии
- Уравнения прямой на плоскости и в пространстве, уравнения плоскости в пространстве

уметь:

- Решать простейшие задачи аналитической геометрии методом координат
 - Использовать векторную алгебру для решения задач
 - Использовать различные виды уравнений прямых и плоскостей для решения задач
 - Определять вид кривых и поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям и рисовать эскизы их графиков
 - Исследовать свойства геометрических объектов по заданному уравнению
- владеть:
- Математическим аппаратом аналитической геометрии, аналитическими методами исследования геометрических объектов

3. Структура программы

Программа предусматривает изучение следующих тем (модулей):

- Матрицы
- Векторы
- Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов
- Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве
- Алгебраические линии второго порядка на плоскости
- Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы
- Поверхности второго порядка
- Отображения и преобразования
- Определители матриц n -го порядка
- Ранг матрицы
- Обратная матрица
- Общая теория линейных систем

Структура программы представлена в таблице 1.

Таблица 1

№	Тема (модуль)	Кол-во часов	В том числе	
			Аудит. занятия	Самост. работа
1	Матрицы	6	2	4
2	Векторы	7	3	4
3	Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов	7	3	4
4	Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве	7	3	4
5	Алгебраические линии второго порядка на плоскости	5	2	3
6	Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы	7	3	4
7	Поверхности второго порядка	6	2	4
8	Отображения и преобразования	7	3	4
9	Определители матриц n -го порядка	2	2	0
10	Ранг матрицы	6	2	4
11	Обратная матрица	2	2	0
12	Общая теория линейных систем	6	2	4
13	Итоговый тест	4		4
Итого		72	29	43

4. Содержание программы

4.1. Учебно-тематический план программы

Таблица 2

Тема (модуль)	Тема урока	Кол-во часов	
		Аудит. занятия	Самост. работа
Матрицы	1.0 Введение	0,05	0,1
	1.1 Определение матрицы	0,2	0,2
	1.2 Операции с матрицами	0,2	0,2
	1.2.1 Задача. Вычисление линейной комбинации матриц	0,05	0,2
	1.2.2 Задача. Нахождение транспонированной матрицы	0,05	0,2
	1.3 Произведение матриц. Часть 1	0,2	0,3
	1.4 Произведение матриц. Часть 2	0,15	0,2
	1.4.1 Задача. Вычисление произведения матриц	0,1	0,2
	1.4.2 Задача. Проверка существования произведения и его вычисление	0,1	0,3
	1.4.3 Задача. Вычисление матрицы в n-й степени. Пример 1	0,1	0,3
	1.4.4 Задача. Вычисление матрицы в n-й степени. Пример 2	0,1	0,3
	1.4.5 Задача. Вычисление матричного многочлена	0,1	0,3
	1.4.6 Задача. Проверка справедливости матричного равенства	0,1	0,2
	1.4.7 Задача. Вычисление матрицы в числовой степени	0,1	0,2
	1.5 Определитель матриц	0,1	0,2
	1.5.1 Задача. Вычисление определителя матрицы	0,1	0,2
	1.6 Правило Крамера для систем второго и третьего порядков	0,1	0,2
	1.6.1 Задача. Решение системы линейных уравнений методом Крамера	0,1	0,2
2. Векторы	2.1 Определение направленного отрезка, вектора	0,2	0,2
	2.2 Повторение из курса школьной геометрии	0,2	0,2
	2.2.1 Задача. Доказательство неравенства для четырехугольника в пространстве	0,1	0,3
	2.2.2 Задача. Доказательство равенства для n-угольника	0,1	0,3
	2.3 Линейная комбинация векторов	0,2	0,2
	2.4 Линейная зависимость и независимость векторов	0,2	0,2
	2.5 Критерий линейной зависимости системы векторов	0,2	0,2
	2.6 Базис	0,2	0,2

	2.6.1 Задача. Нахождение координат вектора	0,1	0,3
	2.6.2 Задача. Нахождение координат вершин параллелепипеда через векторы	0,2	0,3
	2.7 Замена базиса	0,2	0,2
	2.7.1 Задача. Нахождение координат вершины призмы в новой системе координат	0,1	0,2
	2.7.2 Задача. Нахождение координат вершины параллелограмма в новой системе координат	0,1	0,2
	2.8 Общая декартова система координат (ОДСК)	0,3	0,2
	2.8.1 Задача. Проверка, что векторы образуют базис	0,1	0,2
	2.9 Замена ОДСК	0,3	0,2
	2.9.1 Задача. Нахождение координат начала координат и базисных векторов в новой и старой системах координат	0,1	0,2
	2.9.2 Задача. Нахождение координат вектора в новом базисе через координаты в старом	0,1	0,2
3. Произведение векторов	3.1 Скалярное произведение векторов	0,1	0,2
	3.2 Проекция вектора на ненулевой вектор	0,2	0,2
	3.3 Свойства скалярного произведения векторов. Часть 1	0,2	0,2
	3.4 Свойства скалярного произведения векторов. Часть 2	0,2	0,2
	3.4.1 Задача. Нахождение длин сторон и углов параллелограмма	0,2	0,3
	3.4.2 Задача. Нахождение ортогональной проекции вектора на прямую	0,1	0,3
	3.5 Ориентация базисов. Ориентированные объёмы и площади	0,2	0,2
	3.6 Смешанное произведение векторов. Часть 1	0,2	0,2
	3.7 Смешанное произведение векторов. Часть 2	0,2	0,2
	3.8 Векторное произведение векторов. Часть 1	0,1	0,2
	3.9 Векторное произведение векторов. Часть 2	0,2	0,2
	3.9.1 Задача. Доказательство компланарности векторов	0,1	0,3
	3.9.2 Задача. Нахождение площади треугольника по координатам вершин	0,2	0,3
	3.9.3 Задача. Доказательство равенства для векторов	0,1	0,2
	3.9.4 Задача. Нахождение объема тетраэдра и его высоты	0,1	0,2
	3.10 Двойное векторное произведение	0,2	0,2
	3.10.1 Задача. Доказательство тождества	0,2	0,2
	3.11 Взаимный базис	0,2	0,2

4. Часть 1. Плоскость в пространстве	4.1 Определение плоскости в пространстве	0,1	0,1
	4.2 Различные формы записи уравнения плоскости	0,2	0,1
	4.3 Общее уравнение плоскости	0,2	0,1
	4.3.1 Задача. Уравнение плоскости	0,1	0,2
4. Часть 2. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве	4.4 Прямая на плоскости	0,2	0,1
	4.4.1 Задача. Нахождение радиуса-вектора точки	0,05	0,2
	4.4.2 Задача. Условия пересечения, параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости	0,05	0,2
	4.5 Общее уравнение прямой на плоскости. Прямая в пространстве	0,3	0,2
	4.5.1 Задача. Нахождение радиуса-вектора точки пересечения прямых	0,1	0,2
	4.5.2 Задача. Уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым	0,05	0,2
	4.5.3 Задача. Уравнение прямой, проходящей через точку параллельно другой прямой	0,05	0,2
	4.5.4 Задача. Условие пересечения прямой и плоскости	0,05	0,2
	4.6 Взаимное расположение прямых и плоскостей	0,3	0,2
	4.6.1 Задача. Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум прямым	0,1	0,2
	4.6.2 Задача. Уравнение плоскости, проходящей через одну прямую и параллельной другой прямой	0,1	0,2
	4.7 Прямая и плоскость в ПДСК	0,3	0,2
	4.7.1 Задача. Уравнение прямых, проходящих через одну точку и равноудаленных от двух других точек в ОДСК	0,05	0,2
	4.7.2 Задача. Уравнение биссектрисы угла между прямыми	0,05	0,2
	4.8 Некоторые метрические задачи в ПДСК. Часть 1	0,2	0,1
	4.8.1 Задача. Уравнение прямых, параллельных другой прямой и отстоящих от точки на некотором расстоянии	0,05	0,2
	4.8.2 Задача. Общее уравнение плоскости, проходящей через некоторую точку и прямую. Расстояние от этой плоскости до заданной точки	0,1	0,2
	4.9 Некоторые метрические задачи в ПДСК. Часть 2	0,2	0,1
	4.9.1 Задача. Расстояние между прямыми	0,1	0,2
5. Алгебраические линии второго порядка на плоскости	5.1 Определение алгебраических линий и поверхности	0,2	0,3
	5.2 Линии второго порядка на плоскости. Уравнение эллипса	0,2	0,4
	5.3 Уравнение мнимого эллипса, пары мнимых пересекающихся прямых, гиперболы, пары пересекающихся прямых	0,2	0,4

	5.4 Уравнение параболы, пары параллельных прямых, пары мнимых параллельных прямых, пары совпавших прямых	0,2	0,4
	5.5 Центр линии. Линии эллиптического и гиперболического типа	0,2	0,4
	5.5.1 Задача. Тип кривой второго порядка, заданной некоторым уравнением. Каноническое уравнение кривой и каноническая система координат. Пример 1	0,3	0,4
	5.5.2 Задача. Тип кривой второго порядка, заданной некоторым уравнением. Каноническое уравнение кривой и каноническая система координат. Пример 2	0,4	0,4
	5.5.3 Задача. Тип кривой второго порядка, заданной некоторым уравнением. Каноническое уравнение кривой и каноническая система координат. Пример 3	0,3	0,3
6. Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы	6.1 Эллипс	0,3	0,3
	6.1.1 Задача. Каноническое уравнение эллипса	0,2	0,3
	6.2 Свойства эллипса	0,3	0,3
	6.3 Уравнение касательной к эллипсу	0,3	0,3
	6.3.1 Задача. Уравнение касательных к эллипсу	0,2	0,3
	6.3.2 Задача. Угол между касательной и осью Ox	0,1	0,3
	6.4 Гипербола	0,3	0,3
	6.4.1 Задача. Эксцентриситет гиперболы	0,1	0,3
	6.5 Геометрические свойства гиперболы	0,3	0,3
	6.5.1 Задача. Доказательство постоянства произведения расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот	0,1	0,3
	6.6 Парабола	0,3	0,3
	6.6.1 Задача. Уравнение параболы	0,2	0,3
	6.6.2 Задача. Уравнения касательных к параболе	0,1	0,2
	6.7 Эллипс, гипербола и парабола в полярной системе координат	0,2	0,2
7. Поверхности второго порядка	7.1 Поверхность вращения	0,2	0,4
	7.2 Эллипсоид	0,2	0,4
	7.3 Конус второго порядка	0,2	0,4
	7.4 Однополостный гиперболоид	0,1	0,4
	7.5 Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида	0,1	0,4
	7.6 Двуполостный гиперболоид, эллиптический и гиперболический параболоид	0,2	0,4
	7.6.1 Задача. Определение типа поверхности	0,3	0,4
	7.6.2 Задача. Общие точки прямой и поверхности второго порядка	0,3	0,4

	7.6.3 Задача. Параметрические уравнения прямолинейных образующих заданной поверхности	0,2	0,4
	7.6.4 Задача. Тип поверхности, образованной вращением прямой	0,2	0,4
8. Отображения и преобразования	8.1 Определение отображения и преобразования	0,1	0,2
	8.2 Взаимно однозначное отображение. Произведение отображений	0,2	0,2
	8.3 Свойства произведения преобразований плоскости. Координатная запись отображений	0,2	0,2
	8.4 Ортогональные преобразования плоскости	0,2	0,2
	8.5 Линейные и аффинные преобразования	0,2	0,2
	8.6 Образ вектора при линейном преобразовании. Часть 1	0,2	0,3
	8.7 Образ вектора при линейном преобразовании. Часть 2	0,2	0,3
	8.8 Геометрические свойства аффинных преобразований	0,2	0,3
	8.8.1 Задача. Симметрия относительно прямой	0,2	0,3
	8.8.2 Задача. Аффинное преобразование плоскости, переводящее заданные прямые в себя, а заданную точку в некоторую другую точку	0,2	0,3
	8.9 Изменение площадей при аффинном преобразовании	0,1	0,2
	8.10 Образы линий второго порядка при аффинном преобразовании	0,2	0,2
	8.10.1 Задача. Тип кривой второго порядка	0,2	0,3
	8.10.2 Задача. Доказательство равенства сумм площадей треугольников	0,2	0,3
	8.11 Разложение аффинного преобразования	0,2	0,2
	8.11.1 Задача. Представление заданного аффинного преобразования в виде произведений трех преобразований	0,2	0,3
9. Определители (детерминанты) матриц n-го порядка	9.1 Определители (детерминанты)	0,2	
	9.1.1 Задача. Определитель порядка n. Пример 1	0,2	
	9.1.2 Задача. Определитель порядка n. Пример 2	0,2	
	9.2 Свойства детерминанта. Часть 1	0,1	
	9.3 Свойства детерминанта. Часть 2	0,2	
	9.4 Свойства детерминанта. Часть 3	0,2	
	9.4.1 Задача. Определитель Вандермонда	0,2	
	9.4.2 Задача. Определитель порядка 2n	0,2	
	9.5 Формула полного разворачивания детерминанта	0,1	
	9.5.1 Задача. Формула полного разворачивания для матрицы пятого порядка	0,2	
	9.6 СЛАУ в специальном случае	0,1	

	9.7 Правило Крамера	0,1	
10. Ранг матрицы	10.1 Миноры произвольного порядка	0,2	0,3
	10.2 Ранг матрицы	0,2	0,3
	10.2.1 Задача. Ранг и базисная система столбцов матрицы	0,1	0,3
	10.2.2 Задача. Оценка ранга матрицы порядка n	0,1	0,3
	10.2.3 Задача. Оценка ранга произведения матриц.	0,1	0,3
	10.2.4 Задача. Отличие от нуля минора порядка r матрицы ранга r	0,1	0,3
	10.2.5 Задача. Оценка ранга матрицы	0,2	0,3
	10.3 Приведение матрицы к упрощенному виду	0,1	0,3
	10.4 Метод Гаусса	0,2	0,3
	10.5 Теорема о базисном миноре	0,1	0,2
	10.5.1 Задача. Представление матрицы через произведение матриц	0,1	0,3
	10.6 Теорема о ранге матрицы	0,2	0,2
	10.6.1 Задача. Оценка сверху ранга произведения двух матриц	0,2	0,3
	10.6.2 Задача. Доказательство равенства ранга матрицы наибольшему порядку её миноров	0,1	0,3
11. Обратная матрица	11.1 Определение обратной матрицы	0,1	
	11.2 Выражение элементов обратной матрицы через элементы исходной матрицы	0,2	
	11.2.1 Задача. Вычисление обратной матрицы. Пример 1.	0,2	
	11.2.2 Задача. Нахождение обратной матрицы. Пример 2	0,2	
	11.3 Свойства обратной матрицы	0,2	
	11.3.1 Задача. Проверка справедливости тождества для матриц	0,2	
	11.4 Другое доказательство существования обратной матрицы у невырожденной квадратной матрицы	0,1	
	11.5 Характеристический многочлен матрицы	0,1	
	11.5.1 Задача. Вычисление обратной матрицы	0,1	
	11.6 Теорема Гамильтона-Кэли	0,1	
	11.7 Элементарные преобразования, как умножение матриц	0,2	
	11.7.1 Задача. Вычисление обратной матрицы через элементарные преобразования. Пример 1	0,1	
	11.7.2 Задача. Вычисление обратной матрицы. Пример 2	0,2	
12. Общая теория линейных систем	12.1 Теорема Кронекера-Капелли	0,1	0,3
	12.2 Теорема Фредгольма	0,2	0,3

	12.3 Общее решение совместной неоднородной СЛАУ	0,1	0,3
	12.4 Фундаментальная матрица однородной СЛАУ. Часть 1	0,2	0,3
	12.5 Фундаментальная матрица однородной СЛАУ. Часть 2	0,2	0,4
	12.5.1 Задача. Фундаментальная матрица СЛАУ	0,2	0,3
	12.5.2 Задача. Нахождение фундаментальной матрицы СЛАУ	0,2	0,3
	12.5.3 Задача. Решение СЛАУ	0,1	0,3
	12.5.4 Задача. Общий вид произвольной фундаментальной матрицы СЛАУ	0,1	0,3
	12.5.5 Задача. Условие эквивалентности СЛАУ	0,1	0,3
	12.6 Общее решение неоднородной СЛАУ	0,2	0,3
	12.6.1 Задача. Решение СЛАУ	0,1	0,3
	12.6.2 Задача. Выяснить совместность данной неоднородной СЛАУ	0,2	0,3
	13. Промежуточная аттестация	Тестирование	4

4.2. Учебная программа по модулям

Таблица 3

№ п/п	Наименование темы (модуля)	Содержание обучения, наименование и тематика практических занятий (семинаров), самостоятельной работы, используемых образовательных технологий
1	Матрицы	
1.0	Введение	<i>Лекция:</i> введение в аналитическую геометрию и линейную алгебру. Описание плана лекций и необходимые требования для слушателей <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов
1.1	Определение матрицы	<i>Лекция:</i> описываются основные определения матриц, представления матриц, частные случаи матриц, столбцы и строки матрицы, нулевая и единичная матрицы <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.2	Операции с матрицами	<i>Лекция:</i> описываются различные операции с матрицами: равенство матриц, сложение, умножение, вычитание, транспонирование <i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

1.3	Произведение матриц. Часть 1	<i>Лекция:</i> приведены определение произведения матриц, примеры. Описывается первое свойство произведения матриц - некоммутативность
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.4	Произведение матриц. Часть 2	<i>Лекция:</i> продолжается описание свойств произведения матриц: ассоциативность, дистрибутивность по отношению к сложению и др.
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.5	Определитель (детерминант) матрицы	<i>Лекция:</i> вводится определение детерминанта матриц первого, второго и третьего порядков, обозначение детерминанта, способы его вычисления
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
1.6	Правило Крамера	<i>Лекция:</i> рассматривается система линейных уравнений второго порядка, вводится понятие главного определителя системы, первого вспомогательного определителя, второго вспомогательного определителя, доказывается теорема: правило Крамера для $n=2$
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
2	Векторы	
2.1	Определение направленного отрезка, вектора	<i>Лекция:</i> вводятся понятия направленного отрезка, его обозначения, нулевого направленного отрезка, длины направленного отрезка, равенства направленных отрезков. Рассматриваются свойства равенства направленных отрезков: рефлексивность, симметричность, транзитивность и др., вводится определение вектора.
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.2	Повторение из курса школьной геометрии	<i>Лекция:</i> напоминание из курса школьной геометрии некоторых понятий и операций с векторами: сложение, вычитание, умножение на число, понятий коллинеарности и компланарности векторов, угла между векторами, ортогональности векторов. Вводится понятие нормировки вектора.
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.3	Линейная комбинация векторов	<i>Лекция:</i> вводятся определение линейной комбинации векторов (ЛК), ее обозначения, понятия тривиальной и нетривиальной ЛК
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.4	Линейная зависимость и независимость векторов	<i>Лекция:</i> вводятся понятия линейно зависимой и независимой системы векторов, доказываются утверждения, описывающие свойства линейно зависимых и независимых систем векторов
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.5	Критерий линейной зависимости системы векторов	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема о критерии линейной зависимости системы векторов
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.6	Базис	<i>Лекция:</i> вводится понятие базиса на прямой, плоскости и в пространстве, рассматриваются частные случаи базисов, вводится понятие ортогонального и ортонормированного базисов, определение координаты вектора в базисе, доказывается теорема о линейности сопоставления координат
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.7	Замена базиса	<i>Лекция:</i> рассматривается задача о замене базиса. Вводится понятие матрицы перехода от старого базиса к новому, доказывается теорема о связи координатных столбцов векторов в старом и новом базисах, сформулированы замечания к теореме
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.8	Декартова система координат (ДСК)	<i>Лекция:</i> вводится понятие общей декартовой системы координат (ОДСК) на плоскости и в трехмерном пространстве. Рассматривается прямоугольная декартова система координат (ПДСК), координаты точки в ОДСК, доказываются утверждение о координатах вектора в ОДСК, теорема о делении отрезка в данном отношении в ОДСК
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
2.9	Замена ОДСК	<i>Лекция:</i> доказывается теорема о замене ОДСК
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
3	Произведения векторов	
3.1	Скалярное произведение векторов	<i>Лекция:</i> вводится определение скалярного произведения векторов, рассмотрены некоторые его свойства
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.2	Проекция вектора на ненулевой вектор	<i>Лекция:</i> дается определение проекции вектора на ненулевой вектор, её обозначение, формула для вычисления, приводится доказательство этой формулы, вводится понятие модуля векторной проекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.3	Свойства скалярного произведения векторов. Часть 1	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема о свойствах скалярного произведения векторов: неотрицательность скалярного квадрата вектора, симметричность скалярного произведения векторов, аддитивность и однородность скалярного произведения. Сформулировано замечание о линейности скалярного произведения по первому и второму сомножителю
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.4	Свойства скалярного произведения векторов. Часть 2	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема о представлении скалярного произведения векторов через их координаты в ортонормированном базисе. Сформулировано замечание о скалярном произведении в произвольном базисе, введено понятие матрицы Грама. Сформулировано замечание о нахождении длин векторов и угла между ними через координаты
		<i>Семинары:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.5	Ориентация базисов. Ориентированные объёмы и площади	<i>Лекция:</i> даются понятия «правого» и «левого» базиса на плоскости и в пространстве. Даны определения ориентированной площади и ориентированного объёма, их обозначения

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.6	Смешанное произведение векторов. Часть 1	<i>Лекция:</i> дается определение смешанного произведения векторов. Доказано утверждение об ориентированных площадях и объемах в ОНБ. Рассмотрены некоторые свойства смешанного произведения. Сформулирована и доказана теорема о перестановке сомножителей местами, об однородности смешанного произведения по третьему сомножителю, об аддитивности по третьему сомножителю. Сформулировано следствие о линейности по первому и второму сомножителю <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.7	Смешанное произведение векторов. Часть 2	<i>Лекция:</i> сформулирована теорема о свойствах ориентированной площади: смена знака при перестановке векторов, однородность, аддитивность. Сформулирована и доказана теорема о нахождении смешанного произведения через координаты векторов в произвольном базисе, представлены следствия из теоремы о смешанном произведении в ОНБ, об условии компланарности векторов. Сформулированы теорема о представлении ориентированной площади через координаты векторов, её следствие о критерии коллинеарности векторов на плоскости <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.8	Векторное произведение векторов. Часть 1	<i>Лекция:</i> дается определение векторного произведения векторов, его обозначение. Изучены некоторые свойства векторного произведения: векторное произведение векторов в ОНБ, условие коллинеарности векторов на плоскости и в пространстве. Сформулирована и доказана теорема о связи смешанного произведения с векторным <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.9	Векторное произведение векторов. Часть 2	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема об антисимметричности векторного произведения, его однородности, аддитивности. Сформулирована и доказана теорема о выражении векторного произведения через координаты векторов в ОНБ, сделано замечание о выражении векторного произведения через координаты сомножителей в произвольном базисе <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.10	Двойное векторное произведение	<i>Лекция:</i> дается понятие двойного векторного произведения, сформулировано и доказано утверждение о способе его вычисления
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
3.11	Взаимный базис	<i>Лекция:</i> сформулировано и доказано утверждение о линейной независимости векторов базиса. Дано определение взаимного или биортогонального базиса, сформулированы следствия из определения: о базисе, взаимном к ОНБ, символ Кронекера. Сформулировано и доказано утверждение о разложении произвольного вектора по базису через взаимный. Сформулировано утверждение о взаимном базисе взаимного базиса. Дано определение ковариантных и контравариантных координат вектора в базисе
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
4	Часть 1. Плоскость в пространстве	
4.1	Определение плоскости в пространстве	<i>Лекция:</i> вводится понятие множества, плоскости в пространстве, направляющего вектора плоскости, радиуса-вектора точки
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.2	Различные формы записи уравнения плоскости	<i>Лекция:</i> выводятся различные формы уравнения плоскости: векторное параметрическое уравнение (ВПУ), уравнение, записанное через смешанное произведение. Вводится понятие нормали или нормального вектора для плоскости. Выводится уравнение плоскости через скалярное произведение векторов – нормальное уравнение плоскости (НУ), уравнения плоскости в ОДСК – параметрические уравнения
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.3	Общее уравнение плоскости	<i>Лекция:</i> доказываются теорема об общем уравнении плоскости, утверждение о направляющем векторе плоскости, заданной общим уравнением (ОУ). Вводится понятие псевдонормали плоскости
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4	Часть 2. Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве	
4.4	Прямая на плоскости	<i>Лекция:</i> вводится понятие направляющего вектора прямой. Выводятся векторные уравнения для прямой на плоскости: векторное параметрическое уравнение прямой (ВПУ). Вводится понятие нормального вектора или нормали к прямой. Выводится нормальное уравнение (НУ) прямой на плоскости. Сформулировано параметрическое уравнение (ПУ) прямой на плоскости, выводится каноническое уравнение прямой (КУ) <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.5	Общее уравнение прямой на плоскости. Прямая в пространстве	<i>Лекция:</i> доказываются теорема об общем уравнении прямой на плоскости, утверждение о направляющем векторе прямой, заданной НУ. Вводится определение псевдонормального вектора для прямой. Сформулировано ВПУ прямой в пространстве, уравнение в виде векторного произведения, ПУ прямой в ОДСК, выводится каноническое уравнение прямой в пространстве <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.6	Взаимное расположение прямых и плоскостей	<i>Лекция:</i> доказывается теорема о взаимном расположении двух плоскостей, теорема о взаимном расположении прямых <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.7	Прямая и плоскость в ПДСК	<i>Лекция:</i> доказываются утверждение о плоскости и псевдонормали в ПДСК, утверждение о прямой на плоскости и псевдонормали в ПДСК <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.8	Некоторые метрические задачи в ПДСК. Часть 1	<i>Лекция:</i> рассматриваются задачи о расстоянии от точки до плоскости в пространстве в векторной форме и в ПДСК, о расстоянии от точки до прямой на плоскости в векторной форме и в ПДСК <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
4.9	Некоторые метрические задачи в ПДСК. Часть 2	<i>Лекция:</i> рассматриваются задачи о нахождении угла между плоскостями, об угле между прямыми на плоскости, о расстоянии между скрещивающимися прямыми в пространстве <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
5	Алгебраические линии второго порядка на плоскости	
5.1	Определение алгебраических линий и поверхности	<i>Лекция:</i> даются определение алгебраической линии на плоскости, порядка алгебраической линии, алгебраической поверхности в пространстве, порядка алгебраической поверхности. Сформулирована и доказана теорема об уравнениях алгебраической линии и алгебраической поверхности порядка p на плоскости, сформулировано замечание об инварианте порядка относительно замены ОДСК <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.2	Линии второго порядка на плоскости. Уравнение эллипса	<i>Лекция:</i> вводится общий вид уравнения линии второго порядка на плоскости в ОДСК, произведено преобразование уравнения в ПДСК. Вводятся определение эллипса и его каноническое уравнение, уравнение окружности <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.3	Уравнение мнимого эллипса, пары мнимых пересекающихся прямых, гиперболы, пары пересекающихся прямых	<i>Лекция:</i> вводится определение мнимого эллипса и его каноническое уравнение, пары мнимых пересекающихся прямых и их КУ, гиперболы и ее КУ, пары пересекающихся прямых и их КУ <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.4	Уравнение параболы, пары параллельных прямых, пары мнимых параллельных прямых, пары совпавших прямых	<i>Лекция:</i> вводится определение параболы и ее КУ, пары параллельных прямых и их КУ, пары мнимых параллельных прямых и их КУ, пары совпавших прямых и их КУ <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
5.5	Центр линий. Линии эллиптического и гиперболического типа	<i>Лекция:</i> сформулированы теорема о канонической ПДСК, в которой линии второго порядка на плоскости принимают канонический вид; теорема об инвариантах уравнения

		второго порядка относительно замены ОДСК. Введено определение центральной линии второго порядка. Сформулированы теоремы о центре линии второго порядка, об условии центральности линии второго порядка. Введены определения линий эллиптического, гиперболического и параболического типа. Сформулировано следствие о центральности линий эллиптического и гиперболического типа <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекции
6	Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы	
6.1	Эллипс	<i>Лекция:</i> вводятся определения большой и малой полуоси эллипса, его вершин. Доказано утверждение об осях симметрии и центре симметрии эллипса. Введено определение его фокусов, эксцентриситета, фокальных радиусов точки на эллипсе, директрис эллипса. Приведено наглядное представление эллипса. Доказано утверждение о его фокальных радиусах <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.2	Свойства эллипса	<i>Лекция:</i> сформулированы и доказаны теорема о сумме фокальных радиусов эллипса (фокальное свойство), теорема об условии принадлежности точки эллипсу (директориальное свойство) <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.3	Уравнение касательной к эллипсу	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема об уравнении касательной к эллипсу в некоторой точке <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.4	Гипербола	<i>Лекция:</i> вводятся понятия действительной и мнимой полуосей гиперболы, её асимптот, фокусов гиперболы, её эксцентриситета. Сформулированы утверждение о фокальных радиусах гиперболы, доказано утверждение о расстоянии от точки гиперболы до асимптот гиперболы. Введено определение директрис гиперболы <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

6.5	Геометрические свойства гиперболы	<i>Лекция:</i> приводится наглядное представление гиперболы, введено понятие характеристического прямоугольника. Введено понятие равносторонней гиперболы. Сформулированы теорема о фокальном свойстве гиперболы, теорема о её директориальном свойстве, теорема о касательной гиперболы в некоторой её точке
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.6	Парабола	<i>Лекция:</i> вводятся определения значения эксцентриситета параболы, её фокуса, директрисы. Приводится наглядное представление параболы. Сформулированы и доказаны теорема о равенстве фокальных радиусов параболы, теорема об уравнении касательной к параболе в некоторой точке, принадлежащей параболе
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
6.7	Эллипс, гипербола и парабола в полярной системе координат	<i>Лекция:</i> выводится связь между полярными и декартовыми координатами, уравнение для эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекции
7	Поверхность второго порядка	
7.1	Поверхность вращения	<i>Лекция:</i> дается определение поверхности вращения. Дано наглядное её представление. Выведено уравнение поверхности вращения.
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.2	Эллипсоид	<i>Лекция:</i> вводится понятие о сжатии. Дано определение эллипсоида, наглядное его представление
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.3	Конус второго порядка	<i>Лекция:</i> рассказывается о способе получения конуса второго порядка, дано его определение в ПДСК, наглядное представление
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.4	Однополостный гиперболоид	<i>Лекция:</i> дается определение однополостного гиперболоида, выведено его уравнение, дано понятие прямолинейной образующей

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.5	Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида	<i>Лекция:</i> сформулированы и доказаны теоремы о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
7.6	Двуполостный гиперболоид, эллиптический и гиперболический параболоид	<i>Лекция:</i> дается определение двуполостного гиперболоида, определение эллиптического параболоида, гиперболического параболоида, их наглядное представление. Сформулированы теоремы о прямолинейных образующих гиперболического параболоида
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекции
8	Отображения и преобразования	
8.1	Определение отображения и преобразования	<i>Лекция:</i> дается определение отображения плоскости, введены обозначения отображения, дано определение преобразования плоскости, приведены примеры отображений и преобразований
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.2	Взаимно однозначное отображение. Произведение отображений	<i>Лекция:</i> дается определение взаимно однозначного отображения, примеры, определение произведения отображений, его обозначение.
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.3	Свойства произведения преобразований плоскости. Координатная запись отображений	<i>Лекция:</i> сформулированы и доказаны свойства произведения преобразований: ассоциативность, коммутативность с тождественным преобразованием. Дано определение обратного преобразования, выведено условие его существования, свойства. Приведена координатная запись отображений в ОДСК, приведен пример.
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.4	Ортогональные преобразования плоскости	<i>Лекция:</i> дается определение ортогонального преобразования, выведена его координатная запись в ПДСК, рассмотрены примеры: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия

		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.5	Линейные и аффинные преобразования	<i>Лекция:</i> даны определения линейного преобразования плоскости в ОДСК, аффинного преобразования. Сформулирована и доказана теорема об условии аффинности преобразования. Приведены примеры линейных и аффинных преобразований. Сформулированы и доказаны утверждение о произведении линейных и аффинных преобразований, об аффинности преобразования, обратного к аффинному. <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.6	Образ вектора при линейном преобразовании. Часть 1	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема о линейном преобразовании равных векторов и их координатных представлений, рассмотрены следствия из теоремы о свойствах линейного преобразования векторов <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.7	Образ вектора при линейном преобразовании. Часть 2	<i>Лекция:</i> сформулированы и доказаны утверждение о линейном и аффинном преобразовании точек, утверждение о координатах точки в ОДСК при аффинном преобразовании <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.8	Геометрические свойства аффинных преобразований	<i>Лекция:</i> сформулированы и доказаны теоремы и их следствия о геометрических свойствах аффинного преобразования <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.9	Изменение площадей при аффинном преобразовании	<i>Лекция:</i> выводятся формулы изменения площадей при аффинном преобразовании в ОДСК, сформулировано следствие об инварианте аффинного преобразования, об ориентации образов ориентированных параллелограммов, об отношении площадей треугольников, многоугольников, произвольных фигур, имеющих площадь и их образов при аффинном преобразовании <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.10	Образы линий второго порядка при аффинном преобразовании	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема об аффинном преобразовании алгебраической линии, приведено следствие о линии второго порядка. Введено понятие об

		аффинном классе линий второго порядка. Сформулирована и доказана теорема об аффинном преобразовании линий второго порядка из одного аффинного класса. Дано определение аффинной канонической ОДСК <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
8.11	Разложение аффинного преобразования	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана лемма об аффинном преобразовании взаимно перпендикулярных прямых. Дано определение главных (сингулярных) направлений аффинного преобразования. Сформулирована и доказана теорема о разложении аффинного преобразования <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции <i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
9	Определители матриц n-го порядка	
9.1	Детерминанты (определители).	<i>Лекция:</i> даются определения детерминанта матриц n-го порядка, его обозначения. Введено понятие дополнительного минора элемента матрицы, его обозначение <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
9.2	Свойства детерминанта. Часть 1	<i>Лекция:</i> доказывается формула разложения детерминанта матрицы по первому столбцу, доказано свойство детерминанта транспонированной матрицы
9.3	Свойства детерминанта. Часть 2	<i>Лекция:</i> доказывается антисимметричность детерминанта по строкам и по столбцам, доказаны формулы для разложения детерминанта по любой строке и любому столбцу
9.4	Свойства детерминанта. Часть 3	<i>Лекция:</i> доказывается свойство линейности детерминанта по столбцу и строке, вычислен детерминант матрицы с линейно зависимыми строками (столбцами). Доказано свойство неизменности детерминанта матрицы при добавлении к ней линейной комбинации её строк (столбцов) <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
9.5	Формула полного разворачивания детерминанта	<i>Лекция:</i> даются определения перестановки чисел, нарушения порядка чисел в перестановке, формула полного разворачивания детерминанта <i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
9.6	СЛАУ в специальном случае	<i>Лекция:</i> даются понятия общего случая СЛАУ, матрицы системы, столбца свободных членов, столбца неизвестных, расширенной матрицы системы. Вводится матричная и столбцовая записи СЛАУ. Дается определение решения системы. Рассмотрен специальный случай СЛАУ
9.7	Правило Крамера.	<i>Лекция:</i> доказывается правило Крамера для СЛАУ.
10	Ранг матрицы	

10.1	Миноры произвольного порядка	<i>Лекция:</i> даются определения минора произвольного порядка, дополнительного минора, алгебраического дополнения, элементарных преобразований матрицы
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.2	Ранг матрицы	<i>Лекция:</i> даются определения базисного минора, базисных строк и столбцов, ранга матрицы, его обозначение. Доказано утверждение о неизменности ранга матрицы при элементарных преобразованиях
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.3	Приведение матрицы к упрощенному виду	<i>Лекция:</i> вводится определение упрощенного вида матрицы, доказано утверждение о приведении произвольной матрицы к упрощенной элементарными преобразованиями строк
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.4	Метод Гаусса	<i>Лекция:</i> дается понятие о методе Гаусса, представлен его алгоритм.
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.5	Теорема о базисном миноре	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема о базисном миноре. Даются определения вырожденной и невырожденной матрицы. Сформулирован критерий вырожденности матрицы
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
10.6	Теорема о ранге матрицы	<i>Лекция:</i> дается определение столбцового и строчного ранга матрицы, их обозначения. Доказываются теорема о ранге матрицы и утверждение о ранге произведения матриц
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекций
11	Обратная матрица	
11.1	Определение обратной матрицы	<i>Лекция:</i> дается определение обратной матрицы, её обозначение. Сформулировано следствие о ранге обратной матрицы. Доказывается теорема о существовании и единственности обратной матрицы у невырожденной квадратной матрицы

11.2	Выражение элементов обратной матрицы через элементы исходной матрицы	<i>Лекция:</i> доказывается формула выражения элементов обратной матрицы через элементы исходной, доказывается утверждение о получении обратной матрицы методом Гаусса
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
11.3	Свойства обратной матрицы	<i>Лекция:</i> доказываются свойства обратной матрицы: обратная матрица обратной матрицы, обратная матрица произведения матриц, обратная матрица транспонированной матрицы.
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
11.4	Другое доказательство существования обратной матрицы у невырожденной квадратной матрицы	<i>Лекция:</i> приводится другое доказательство существования обратной матрицы у невырожденной квадратной матрицы, выведена матричная запись формул Крамера
11.5	Характеристический многочлен матрицы	<i>Лекция:</i> дается понятие о характеристическом многочлене для матрицы, его обозначение, даны определения следа матрицы, матричного многочлена
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
11.6	Теорема Гамильтона-Кэли	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема Гамильтона-Кэли
11.7	Элементарные преобразования, как умножение матриц	<i>Лекция:</i> представлены элементарные преобразования матрицы через умножение матриц: перестановка строк и столбцов, умножение на число, сложение строк и столбцов. Доказаны утверждения о детерминантах элементарных матриц, о детерминанте произведения матрицы на элементарную, о выражении матрицы через произведение элементарных матриц. Сформулирована и доказана теорема о детерминанте произведения матриц
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
12	Общая теория линейных систем	
12.1	Теорема Кронекера-Капелли	<i>Лекция:</i> сформулирована и доказана теорема Кронекера-Капелли, доказывается следствие об условии несовместности СЛАУ
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
12.2	Теорема Фредгольма	<i>Лекция:</i> дается определение сопряженной однородной системы для СЛАУ. Доказывается теорема Фредгольма
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
12.3	Общее решение неоднородной СЛАУ	<i>Лекция:</i> выводится общее решение неоднородной СЛАУ. Дается определение базисных и параметрических неизвестных
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции

12.4	Фундаментальная матрица однородной СЛАУ. Часть 1	<i>Лекция:</i> доказывается утверждение о решении неоднородной и однородной СЛАУ, сформулированы замечания и следствия этого утверждения. Дается понятие фундаментальной матрицы однородной СЛАУ, определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ. Представлены свойства фундаментальной матрицы
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
12.5	Фундаментальная матрица однородной СЛАУ. Часть 2	<i>Лекция:</i> доказывается теорема о ФСР у однородной СЛАУ. Дано определение нормальной фундаментальной матрицы однородной СЛАУ. Доказывается утверждение о ФСР любой линейно независимой системы из решений однородной СЛАУ
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции
12.6	Общее решение неоднородной СЛАУ	<i>Лекция:</i> доказывается теорема о решении неоднородной СЛАУ. Дается определение общего решения неоднородной СЛАУ. Дается метод решения неоднородной СЛАУ. Доказана необходимость условия в правиле Крамера.
		<i>Семинар:</i> разбор задач по темам лекции
		<i>Самостоятельная работа:</i> изучение дополнительных материалов, подготовка к тестированию по материалам лекции, тестирование по материалам лекции
13	Промежуточная аттестация	Тестирование

4.3. Примеры заданий для организации самостоятельной работы слушателей

1. Определитель матрицы.

Чему равен определитель матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

Обучающийся должен уметь вычислять детерминант по определению.

2. Метрические задачи для прямых и плоскостей.

Найдите расстояние от точки $M(0,2,3)$ до прямой $\frac{x-3}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$.

Система координат прямоугольная.

Обучающийся должен знать или уметь вывести формулу для расстояния от точки до прямой.

3. Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы

Запишите уравнения касательной к эллипсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, проходящей через

точку $M(3;3,2)$.

Обучающийся должен знать или уметь вывести уравнение касательной к эллипсу.

4. Поверхность второго порядка

Установите соответствие между видом поверхности и её уравнением.

- 1) Эллипсоид
- 2) Однополостный гиперболоид
- 3) Двуполостный гиперболоид
- 4) Эллиптический параболоид

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$

b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1$

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 2z$

e) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

f) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 2z$

Обучающийся должен знать канонические уравнения поверхностей второго порядка.

4.4. Список рекомендуемой литературы

Основная литература:

1. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. СПб. : Лань, 2020. – 912 с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 17-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2020. – 448 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Т. Аналитическая геометрия. – М. : Физматлит, 2019. – 224 с.

Дополнительная литература:

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 1, 2, 3. – М. : Дрофа, 2007.
2. Геворкян П.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М. : Физматлит, 2007.
3. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие для вузов. – СПб. : «Специальная Литература», 1998. – 204 с.
4. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 296 с.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет":

1. <http://www.exponenta.ru> – образовательный математический сайт.
2. <http://mathnet.ru> – общероссийский математический портал.
3. <http://www.edu.ru> – федеральный портал «Российское образование».
4. <http://benran.ru> –библиотека по естественным наукам Российской

академии наук.

5. <http://www.i-exam.ru> – единый портал Интернет-тестирования в сфере образования.

5. Материально-технические условия реализации программы

Таблица 4

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Система дистанционного обучения	Лекции	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Самостоятельная работа	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.
Система дистанционного обучения	Семинары	Слушателю необходим компьютер, наличие доступа в сеть интернет.

6. Оценка качества освоения программ

Оценка качества освоения программы осуществляется в процессе промежуточной аттестации.

Формы и методы промежуточного контроля представлены в таблице 5.

Таблица 5

Наименование модулей	Основные показатели оценки	Формы и методы контроля и оценки
Матрицы	Знание определения матриц, представления матриц, умение оперировать матрицами. Понимание свойств произведения матриц. Знание определителя матриц, способы его вычисления. Умение решать систему линейных уравнений второго и третьего порядков методом Крамера	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Векторы	Знание определения направленного отрезка, его обозначения, длины направленного отрезка, его свойства. Определение вектора. Умение оперировать векторами, понимание коллинеарности и компланарности векторов, угла между векторами, ортогональности векторов,	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

	нормировки вектора. Знание определения линейной комбинации векторов, свойств линейно зависимых и независимых систем векторов. Понимание критерия линейной зависимости системы векторов. Определение базиса, ортогонального и ортонормированного базиса. Умение определять координаты вектора в базисе. Умение решать задачу замены базиса, знание матрицы перехода. Знание общей декартовой системы координат, прямоугольной декартовой системы координат. Умение находить координаты вектора в ПДСК	
Произведение векторов	Знание скалярного, векторного, смешанного произведения векторов, двойного векторного произведения векторов. Понимание свойств скалярного, векторного, смешанного, двойного векторного произведений векторов. Умение ими оперировать. Понимание ориентированных объемов и площадей, умение их вычислять через произведения векторов. Знание условий коллинеарности и компланарности векторов. Умение вычислять произведения векторов в ортонормированном базисе	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Плоскость в пространстве	Знание различных формы уравнения плоскости. Умение переходить от одной формы записи уравнения к другой	Самостоятельное выполнение заданий
Прямая на плоскости. Прямая и плоскость в пространстве	Знание определения направляющего вектора прямой. Умение выводить уравнения прямой в различных формах на плоскости и в пространстве. Умение решать различные метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат для прямых и плоскостей	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Алгебраические линии второго порядка на плоскости	Знание определения алгебраической линии на плоскости и поверхности в пространстве. Знание канонических уравнений различных линий второго порядка на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат. Умение находить центр алгебраической линии	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Изучение свойств эллипса, гиперболы и параболы	Знание определений эллипса, гиперболы и параболы. Понимание наглядного представления эллипса, гиперболы и параболы, их основных параметров. Знание свойств эллипса, гиперболы и параболы. Умение выводить канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы в прямоугольной декартовой системе координат, уравнений касательных к ним	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование

Поверхность второго порядка	Знание различных поверхностей второго порядка, их канонических уравнения, простейших свойств. Умение находить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Отображения и преобразования	Знание определений отображения и преобразования, примеры взаимно однозначного отображения. Знание определения произведения отображений. Знание свойств произведения преобразований. Умение получать координатные формулы отображений и преобразований. Знание определения ортогонального преобразования, его координатной записи в ПДСК. Знание определения линейного преобразования плоскости, аффинного преобразования, их координатного представления. Знание геометрических свойств аффинного преобразования. Умение выводить координатные формулы аффинного преобразования	Самостоятельное выполнение заданий, тестирование
Определители матриц n -го порядка	Знание определения детерминанта n -го порядка, его обозначения, определения дополнительного минора, его обозначение. Умение вычислять детерминант матрицы. Знания свойств детерминанта.	Самостоятельное выполнение заданий
Ранг матрицы	Знание определения минора произвольного порядка, дополнительного минора, алгебраического дополнения минора, элементарных преобразований матриц, базисного минора, ранга матрицы, свойств ранга матрицы. Умение находить ранг матрицы. Умение приводить матрицу к упрощенному виду. Знание метода Гаусса, умение его применять.	Самостоятельное выполнение заданий, объединенное тестирование по лекциям 9 и 10
Обратная матрица	Знание определения обратной матрицы, её свойств, определения характеристического многочлена матрицы. Умение находить обратную матрицу.	Самостоятельное выполнение заданий
Общая теория линейных систем	Понимание условий совместности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Умение находить общее решение неоднородной СЛАУ. Знание понятий фундаментальной матрицы однородной СЛАУ, фундаментальной системы решений однородной СЛАУ	Самостоятельное выполнение заданий, объединенное тестирование по лекциям 11 и 12
Промежуточная аттестация	Обобщение знаний по темам курса. Применение полученных знаний.	Тестирование

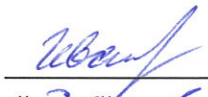
7. Составители программы

Д. А. Терёшин	Доцент кафедры высшей математики МФТИ
М. А. Лунина	Доцент кафедры высшей математики МФТИ
А. В. Ершов	Доцент кафедры высшей математики МФТИ

Согласовано
Зам. директора ЦДПО


У.Б. Вещезерова
« 30 » августа 2021 г.

Согласовано
Зав. кафедрой высшей математики


Г. Е. Иванов
« 20 » августа 2021 г.