

**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе  
Д. А. Зубцов  
декабря 2013 г.

## **ПРОГРАММА**

по курсу ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА (БАЗОВЫЙ КУРС)

факультеты: ФНБИК

кафедра физики

курс II

семестр 4

лекции — 34 часа

Экзамен — 4 семестр

практические (семинарские)

занятия — 34 часа

Зачет — нет

лабораторные занятия — нет

Самостоятельная работа

— 2 часа в неделю

ВСЕГО ЧАСОВ — 68

Программу и задание составил:

к.ф.-м.н., доц. С. В. Толоконников

Программа обсуждена на заседании

кафедры физики

декабря 2013 года

Заведующий кафедрой

А.Л. Барабанов

## ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Принцип относительности. Ньютонова механика и принцип относительности Галилея. Постоянство скорости света. Однородность пространства-времени, изотропия пространства. Преобразования Лоренца и инвариантность интервала. Относительность одновременности и промежутков времени. Сокращение длин и собственное время. Угол Вигнера и прецессия Томаса. Сложение скоростей. Аберрация света.
2. Четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского. Мировая точка. Пространственноподобные, времениподобные и нулевые интервалы. Световой конус. Принцип причинности. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца. Понятие 4-вектора. Скалярное произведение. Метрика четырехмерного пространства. Контр- и ковариантное представление. 4-градиент и 4-дивергенция. Ковариантность физических законов относительно преобразований Лоренца как переформулировка принципа относительности.
3. Описание движения свободной релятивистской точечной частицы. Понятие точечной элементарной частицы, её 4-координата и мировая линия. 4-векторы скорости и ускорения. Ковариантная формулировка принципа наименьшего действия в пространстве Минковского. 4-импульс точечной частицы. Закон сохранения 4-импульса замкнутой системы как следствие однородности пространства-времени. Лабораторная система и система центра масс. Применение закона сохранения 4-импульса для описания упругих столкновений частиц. Неупругие столкновения с образованием новых частиц. Порог реакции. Эффект Доплера.

4. Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле I. Понятия заряда точечной элементарной частицы и электромагнитного поля. 4-вектор потенциал электромагнитного поля. Действие для точечной частицы во внешнем векторном поле. Лагранжиан частицы во внешнем поле. Энергия, обобщенный и кинематический импульсы. Уравнение Лагранжа и сила Лоренца. Функция Гамильтона. Калибровочная инвариантность.
5. Движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле II. Ковариантный вывод уравнений движения в четырехмерном виде. Тензор электромагнитного поля. 4-тензоры и их свойства. Преобразование Лоренца для потенциалов ( $\varphi$ ,  $\mathbf{A}$ ) и напряженностей ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ). Инварианты поля и их следствия. Дуальный тензор. Движение заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле. Дрейф в скрещенных полях. Движение и дрейф заряженной частицы в слабонеоднородном магнитном поле. Адиабатический инвариант, движение ведущего центра орбиты. Магнитные зеркала.
6. Уравнения электромагнитного поля. Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов. Первая пара уравнений Максвелла. Переход от точечных зарядов к распределенной системе зарядов и токов при помощи  $\delta$ -функции. Закон сохранения электрического заряда. 4-вектор плотности тока. Уравнение непрерывности. Действие для электромагнитного поля. Получение второй пары уравнений Максвелла из вариационного принципа. Калибровочная инвариантность уравнений Максвелла. Уравнения для потенциалов. Вид уравнений для 4-потенциалов в кулоновской калибровке и в калибровке Лоренца.

7. Энергия и импульс электромагнитного поля. Плотность энергии поля и вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга). Баланс энергии системы заряженных частиц и электромагнитного поля. (Плотность импульса и тензор напряжений Максвелла. Баланс импульса системы заряженных частиц и электромагнитного поля. Тензор энергии-импульса.)
8. Электростатика и квазистационарное магнитное поле. Электрическое поле системы неподвижных зарядов и магнитное поле усредненного квазистационарного движения зарядов. Уравнение Пуассона и его решение. Электрический дипольный и магнитный моменты. Средняя сила и средний момент силы во внешнем поле. Гиромагнитное отношение. Прецессия магнитного момента в магнитном поле. Мультипольное разложение потенциалов. Выражение энергии системы зарядов во внешнем слабонеоднородном электромагнитном поле через мультипольные моменты. Энергия мультиполь-мультипольного взаимодействия.
9. Свободное электромагнитное поле. Уравнения для потенциалов свободного электромагнитного поля в пустом пространстве. Плоские монохроматические волны и их поляризация. 4-мерный волновой вектор. Линейная, круговая и эллиптическая поляризации. Усреднение по времени и поляризации.
10. Излучение движущихся зарядов I. Функция Грина волнового уравнения. Запаздывающий и опережающий потенциалы. Интенсивность излучения в дипольном приближении. Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в волновой и квазистационарной зонах. Угловое и спектральное распределение излучения. (Интенсивность излучения магнитного диполя и квадруполь.)

11. Излучение движущихся зарядов II. Излучение релятивистских частиц. Потенциалы Лиенара–Вихерта. Формула Лармора. Синхротронное излучение в ультрарелятивистском случае. Полная интенсивность излучения. Оценка длины формирования, углового и спектрального распределения синхротронного излучения.
12. Реакция излучения и рассеяние электромагнитных волн. Сила радиационного трения. Естественная ширина спектральной линии. Пределы применимости классической электродинамики на малых расстояниях и в сильных полях. Постановка задачи о рассеянии. Дифференциальное сечение рассеяния. Рассеяние света на свободном электроде. Томсоновское сечение рассеяния. Поляризация рассеянного света. Рассеяние электромагнитных волн на малых частицах. Резонансное рассеяние.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
2. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по электродинамике. — М.: Наука, 1970.

### Дополнительная литература

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Краткий курс теоретической физики. Т. 1. Механика, электродинамика. — М.: Наука, 1969.
4. *Джэксон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.

5. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика. Ч. 1. Микроскопическая теория. — Москва-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003.
6. *Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н.* Классическая электродинамика. — М.: Наука, 1985.
7. *Паули В.* Теория относительности. — М.: Наука, 1983.
8. *Гинзбург В.Л.* Теоретическая физика и астрофизика. — М.: Наука, 1987.
9. *Фомичев С.В., Толоконников С.В.* Излучение заряженных частиц в вакууме: Учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2003.
10. *Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Движение заряженной частицы во внешнем слабонеоднородном магнитном поле. Дрейфовая теория: Учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2001.
11. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис: Учеб. пособие. — М: МФТИ, 2005.
12. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. — Долгопрудный. Издательский дом "Интеллект", 2009.

# НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ИЗ КУРСА МАТЕМАТИКИ

## 1. Тензорные обозначения и векторный анализ.

Правило Эйнштейна: по дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

$\delta_{\alpha\beta}$  — символ Кронекера, абсолютно симметричный тензор второго ранга.

$e_{\alpha\beta\gamma}$  — абсолютно антисимметричный трехмерный тензор третьего ранга:

$$e_{\alpha\beta\gamma} = -e_{\beta\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma\alpha}, \quad e_{123} = e_{xyz} = 1,$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\rho} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\alpha\mu} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\rho} \\ \delta_{\beta\mu} & \delta_{\beta\nu} & \delta_{\beta\rho} \\ \delta_{\gamma\mu} & \delta_{\gamma\nu} & \delta_{\gamma\rho} \end{pmatrix},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\nu\gamma} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu},$$

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\mu\beta\gamma} = 2\delta_{\alpha\mu}.$$

Векторный оператор дифференцирования

$$\nabla = \left\{ \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x}, \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y}, \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \right\} \equiv \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$\Delta = (\nabla \nabla) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}, \quad \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha},$$

$$\text{div } \mathbf{a} \equiv (\nabla \mathbf{a}) = \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad \text{rot } \mathbf{a} \equiv [\nabla \mathbf{a}] = \mathbf{e}_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial x_\beta}.$$

Разложение в ряд Тейлора

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2!} (\mathbf{a} \nabla)^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{a} \nabla)^n \mathbf{F}(\mathbf{r}) = e^{(\mathbf{a} \nabla)} \mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

## 2. Преобразование Фурье

(разложение по плоским волнам)

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d^3\mathbf{r} dt,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \frac{d^3\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^4}.$$

3. Разложение плоской волны и потенциала по полиномам Лежандра

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta),$$

$$\frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (R > r).$$

Здесь  $P_l(x)$  — полиномы Лежандра,  $j_l(z)$  — сферические функции Бесселя

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z).$$

Ортогональность полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \delta_{ll'} \frac{2}{(2l+1)}, \quad P_l(1) = 1.$$

$$P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).$$



#### 4. Формула Сохотского. Дельта-функция

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{x - i\delta} = \mathcal{P} \frac{1}{x} + i\pi\delta(x).$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & a < x_0 < b, \\ 0, & x_0 < a, x_0 > b; \end{cases}$$

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x),$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{1}{|f'(x_n)|} \delta(x - x_n), (f(x_n) = 0).$$

### ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

#### 1. Кинематика релятивистской частицы.

4-вектор контрвариантный  $A^i \equiv (A^0, \mathbf{A}) \equiv (A^0, A^\alpha)$ ,  
 — ковариантный  $A_i \equiv (A^0, -\mathbf{A}) \equiv (A^0, -A^\alpha)$ .

Скалярное произведение векторов

$$A^i B_i = A^0 B^0 - \mathbf{A}\mathbf{B} = A^0 B^0 - A^\alpha B^\alpha.$$

4-радиус-вектор  $x^i = (ct, \mathbf{r})$ .

Интервал  $s = \sqrt{x^i x_i}$ ,  $s^2 = (ct)^2 - \mathbf{r}^2$ ,  $ds = cd\tau =$   
 $= cdt\sqrt{1 - (v/c)^2}$ .

Преобразования Лоренца (скорость направлена параллельно оси  $x$ )

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{0'} \\ A^{1'} \\ A^{2'} \\ A^{3'} \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

4-скорость частицы

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\mathbf{v}/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right), \quad u^i u_i = 1.$$

4-импульс

$$p^i = m c u^i = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right), \quad \mathbf{p} = \frac{E \mathbf{v}}{c^2}, \quad p^i p_i = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2,$$

$m$  — масса,  $E$  — энергия,  $\mathbf{p}$  — импульс частицы.

2. Уравнения электромагнитного поля.

4-потенциал  $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$ , где  $\varphi$  — скалярный, а  $\mathbf{A}$  — векторный потенциалы, электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi,$$

магнитное поле

$$\mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}.$$

Тензор электромагнитного поля

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k},$$

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{E} \\ \mathbf{E} & -e_{\alpha\beta\gamma} H_\gamma \end{pmatrix}.$$

Дуальный тензор

$$\tilde{F}_{ik} = \frac{1}{2} e_{iklm} F^{lm}, \quad e^{0123} = -e_{0123} = 1.$$

Инварианты электромагнитного поля — 4-скаляры

$$F^{ik} F_{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2), \quad F^{ik} \tilde{F}_{ik} = -4(\mathbf{E}\mathbf{H}),$$

$$S = -\frac{1}{16\pi c} \int_{ct_A}^{ct_B} \int_{-\infty}^{\infty} d^4x F^{ik} F_{ik}.$$

Уравнения движения заряженной частицы

$$mc \frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c} F^{ik} u_k;$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}], \quad \frac{dE}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}.$$

Уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= -\frac{4\pi}{c} j^i, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ j^i &= (c\rho, \mathbf{j}), & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ & & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Микроскопические плотности заряда и тока

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t));$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad \delta(\mathbf{r}) = \iiint e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}.$$

3. Постоянное электромагнитное поле.

Дипольный момент системы зарядов:

$$\begin{aligned} \text{электрический } \mathbf{d} &= \sum_a e_a \mathbf{r}_a, \\ \text{магнитный } \mathbf{m} &= \frac{1}{2c} \sum_a e_a [\mathbf{r}_a, \mathbf{v}_a]. \end{aligned}$$

Тензор квадрупольного момента

$$D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3x_{a\alpha}x_{a\beta} - (\mathbf{r}_a)^2 \delta_{\alpha\beta}).$$

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{e}{r} + \frac{(\mathbf{dn})}{r^2} + \frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2r^3}; \\ \mathbf{E} &= -\nabla\varphi = \frac{e}{r^2} + \frac{3(\mathbf{dn})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{r^3} + \dots; \\ \bar{\mathbf{A}} &= \frac{[\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad \bar{\mathbf{H}} = \frac{3(\bar{\mathbf{m}}\mathbf{n})\mathbf{n} - \bar{\mathbf{m}}}{r^3}.\end{aligned}$$

Система зарядов во внешнем поле

$$U_e = e\varphi - (\mathbf{dE}) + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} D_{\alpha\beta};$$

$$\bar{U}_m = -(\bar{\mathbf{m}}\mathbf{H}), \quad \bar{\mathbf{F}} = (\bar{\mathbf{m}}\nabla)\mathbf{H}, \quad \bar{\mathbf{M}}_F = [\bar{\mathbf{m}}, \mathbf{H}].$$

5. Волновые уравнения.

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta\varphi &= 4\pi\rho, \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta\mathbf{A} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{A} &= 0.\end{aligned}$$

Запаздывающие потенциалы

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \iiint \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'; \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \iiint \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'.\end{aligned}$$

Плотность  $W$  и поток  $\mathbf{S}$  энергии электромагнитного поля

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0, \quad W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}, \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Плотность импульса  $\mathbf{g}$  и тензор напряжений  $\sigma_{\alpha\beta}$  электромагнитного поля

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0,$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{\mathbf{S}}{c^2}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = W\delta_{\alpha\beta} - \frac{E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta}{4\pi}.$$

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{4} g^{ik} F_{lm} F^{lm} - F^{il} F_l^k \right);$$

$$T^{ik} = \begin{pmatrix} W & S_x/c & S_y/c & S_z/c \\ S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W & \mathbf{S}/c \\ \mathbf{S}/c & \sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix}.$$

Баланс энергии-импульса электромагнитного поля

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} + \frac{1}{c} F^{ik} j_k = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}\mathbf{S} + (\mathbf{j}\mathbf{E}) = 0, \quad \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \rho E_\alpha + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{H}]_\alpha = 0.$$

6. Плоская монохроматическая волна.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right\},$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}, \mathbf{E}], \quad (\mathbf{n}\mathbf{H}) = 0, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Вектор поляризации

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}_0}{|\mathbf{E}_0|} = e_1 \mathbf{e}^{(1)} + e_2 \mathbf{e}^{(2)}, \quad \left( (\mathbf{e}^{(1)} \mathbf{e}^{(2)*}) = 0, (\mathbf{e}^{(1,2)} \mathbf{n}) = 0 \right).$$

Линейный базис

$$\mathbf{e}^{(1)} = \mathbf{e}^{(x)}, \mathbf{e}^{(2)} = \mathbf{e}^{(y)}, (\mathbf{n} \parallel z),$$

циркулярный базис

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(x)} + i\mathbf{e}^{(y)}), \mathbf{e}^{(-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{(x)} - i\mathbf{e}^{(y)}).$$

Усреднение по времени

$$\overline{\operatorname{Re}\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega t}\} \operatorname{Re}\{\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t}\}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\mathbf{A}_0 \mathbf{B}_0^*).$$

Усреднение по поляризации

$$\overline{e_\alpha e_\beta^*} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta).$$

7. Излучение и рассеяние электромагнитных волн.

Интенсивность мультипольного излучения

$$I_d = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2; \quad I_m = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{m}}^2; \quad I_q = \frac{1}{180c^5} \ddot{D}_{\alpha\beta} \ddot{D}_{\alpha\beta}.$$

Сила радиационного трения

$$\mathbf{F}_{fr} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

Сечение рассеяния

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2; \quad r_0 = \frac{e^2}{mc^2}; \quad \sigma = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}.$$

## ЗАДАНИЕ

для студентов II курса ФНБИК  
на IV семестр 2013/2014 учебного года

### ТЕОРИЯ ПОЛЯ

#### 1-е задание

- \*) Начало координат системы  $K'$  движется со скоростью  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  относительно системы  $K$ , а оси координат составляют со скоростью  $\mathbf{v}$  те же самые углы, что и оси системы  $K$ . Записать матрицу преобразований Лоренца от системы  $K$  к системе  $K'$  (а также обратного преобразования). Определить положение осей  $(x', y')$  в системе  $K$  в момент времени  $t = 0$  по часам системы  $K$ .  
Указание: представить радиус-вектор в виде суммы параллельного и перпендикулярного скорости  $\mathbf{v}$  векторов:  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ , где  $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ ,  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ .
- Определить относительную скорость сталкивающихся протонов в ускорителе со встречными пучками, если энергия протонов в каждом пучке 5000 ГэВ. Какова должна быть энергия налетающих протонов, чтобы столкновение с покоящимся протоном происходило с той же относительной скоростью?
- Тонкий стержень, запущенный со скоростью  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$  относительно системы  $K$ , виден в ней вертикальным. Показать, что в сопутствующей стержню системе  $K'$  (см. задачу № 1), он будет повернут относительно вертикали на угол  $\theta$  такой, что

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \gamma \operatorname{tg} \varphi, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{v_y}{v_x}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{(\gamma - 1) \operatorname{tg} \varphi}{1 + \gamma \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

4. \*) На частицу, движущуюся со скоростью  $\mathbf{v}$ , действует сила, сообщающая ей ускорение  $\dot{\mathbf{v}}$ . Определить, с какой угловой скоростью будет поворачиваться спин частицы относительно лабораторной системы отсчета, если сила, действующая на частицу, не действует на ее спин (прецессия Томаса).

Ответ:

$$\vec{\omega} = \frac{\gamma^2}{(\gamma + 1)c^2} [\dot{\mathbf{v}} \mathbf{v}].$$

Указание: использовать результат задачи № 3.

5. Доказать, что трехмерные тензора  $\delta_{\alpha\beta}$  и  $e_{\alpha\beta\gamma}$  являются инвариантными тензорами. Вычислить свертки

а)  $\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{\gamma\mu} \delta_{\mu\alpha}$ ;

б)  $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\nu\gamma}$ ,  $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\mu\beta\gamma}$ ,  $e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta\gamma}$ ;

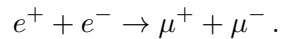
покоординатно проверить, что  $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  эквивалентно  $c_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} a_\beta b_\gamma$ .

6. Раскрыть в тензорных обозначениях выражения:  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ ,  $\operatorname{rot} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $\operatorname{rot}(f \mathbf{A})$ ,  $\operatorname{div}(f \mathbf{A})$ ,  $\operatorname{div} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ,  $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{b})$ . Вычислить: а)  $\operatorname{rot}[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ ,  $\operatorname{grad}(\mathbf{a}\mathbf{r})$ , где  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{a}$  — постоянные векторы; б)  $\operatorname{grad} r$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{r}$ ,  $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$ ,  $\operatorname{grad} f(r)$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{a}(r)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{a}(r)$ , ( $r \equiv |\mathbf{r}|$ ).

7. Для получения  $\gamma$ -квантов высокой энергии на встречу пучку электронов с энергией  $E = 200$  ГэВ выстреливает лазер с энергией фотонов  $\varepsilon = 2$  эВ. Какую энергию будут иметь фотоны, рассеянные назад? Найти зависимость энергии фотонов от угла рассеяния.



8. В ускорителе на встречных пучках идет реакция



Зная энергию каждого из пучков  $e^+$  и  $e^-$ , найти энергию и импульсы  $\mu^+$  и  $\mu^-$ . Каков энергетический порог этой реакции? Сравнить с порогом в случае, когда ускоренные позитроны падают на неподвижные электроны.

9. Для нейтрино, образующихся при распаде  $\pi$ -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса  $\pi$ -мезона  $\approx 140$  МэВ, масса  $\mu$ -мезона  $\approx 105$  МэВ), определить энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя  $\pi$ -мезона распад  $\pi \rightarrow \mu + \nu$  происходит изотропно.

10. Показать, что однородное магнитное поле  $\mathbf{H}$ , направленное по оси  $z$ , может быть описано векторным потенциалом

$$\mathbf{A} = \{0, Hx, 0\}.$$

Градиентным преобразованием перейти к потенциалу  $\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}, \mathbf{r}]$ .

11. Магнитное поле, направленное по оси  $z$  вдоль этой оси, убывает с постоянным градиентом  $\partial H_z / \partial z = -h = \text{const}$ . Может ли поле во всем пространстве оставаться параллельным оси  $z$ ? Найти радиальные компоненты поля вне оси  $z$ . Представить картину силовых линий.

12. Найти движение релятивистской частицы массы  $m$  и заряда  $e$  в перпендикулярных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ .

13. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в магнитном поле в плоскости, перпендикулярной направлению поля. Определить изменение энергии частицы за один оборот в случае, когда магнитное поле медленно меняется со временем (так, что изменение поля за период движения мало по сравнению с самим значением поля). Доказать, что величина  $p_{\perp}^2/H$  остается постоянной (т.е. является адиабатическим инвариантом). Вычислить изменение радиуса орбиты и энергии частицы, если поле изменилось от значения  $H_1$  до  $H_2$ .
14. Получить формулу  $\mathbf{F} = (\boldsymbol{\mu}\nabla)\mathbf{H}$  для силы, действующей на магнитный диполь в неоднородном поле и найти в нерелятивистском случае уравнение движения ведущего центра орбиты заряженной частицы. (Поле мало меняется на расстояниях порядка радиуса орбиты).
15. \*) На больших расстояниях поле Земли представляет поле диполя с магнитным моментом

$$\mathbf{m} = 8.1 \cdot 10^{25} \text{Гс} \cdot \text{см}^3.$$

- а) Найти в полярных координатах уравнение силовой линии магнитного диполя. Определить, как меняется поле вдоль силовой линии. б) Предполагая, что скорость частицы на экваторе составляет угол  $\alpha$  с плоскостью экватора, определить максимальную широту (полярный угол), достигаемую частицей. Найти угол  $\alpha$ , при котором частица достигнет поверхности Земли, если расстояние от Земли, на котором частица находилась в экваториальной плоскости значительно больше радиуса Земли. в) Используя результат задачи № 12, найти период дрейфа вокруг Земли протона

с энергией 10 МэВ, движущегося в экваториальной плоскости на расстоянии 30 000 км от Земли.

2-е задание

16. Определить потенциальную энергию взаимодействия двух диполей с моментами  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_2$ .
17. Заряд электрона распределен в основном состоянии атома водорода с плотностью электронного облака

$$\rho(r) = \frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

$e$  — заряд электрона,  $a$  — боровский радиус  $\sim 10^{-8}$  см. Найти энергию взаимодействия электронного облака с ядром:

а) считая ядро точечным зарядом;

б) считая ядро сферически-симметричным заряженным шаром радиуса  $r_0 \sim 10^{-13}$  см с плотностью заряда  $\rho_{\text{ядра}}(r)$ . Получить ответ для частного случая равномерно-заряженного шара.

18. Найти тензор квадрупольного момента равномерно заряженного эллипсоида вращения относительно его центра. Найти электрическое поле на больших расстояниях.
19. Вычислить средние значения произведений единичных векторов:

$$\langle n_\alpha \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma \rangle,$$

$$\langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu \rangle, \quad \langle n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu n_\nu \rangle.$$

Усреднение ведется по единичной сфере  $n_\alpha n_\alpha = 1$ .

20. Определить электрическое и магнитное поле гармонически колеблющегося диполя на расстояниях, много больших размеров диполя (но необязательно больших длины волны).
21. \*) Гармонически колеблющийся диполь помещен на высоте  $L$  над идеально проводящей металлической плоскостью. В пределе  $L \ll \lambda$  и  $L \gg \lambda$  найти интенсивность излучения диполя в зависимости от угла наблюдения и угла между диполем и нормалью к плоскости.
22. Два заряда  $(e_1, m_1; e_2, m_2)$  благодаря кулоновским силам обращаются один вокруг другого по круговой орбите радиуса  $R$ . Определить энергию, теряемую на излучение за один оборот. Найти зависимость расстояния между зарядами от времени. Определить время, за которое один заряд упадет на другой.
23. Два одноименных заряда  $(e_1, m_1; e_2, m_2)$  испытывают лобовое столкновение. Определить излученную энергию, если задана относительная скорость на бесконечности  $v_\infty \ll c$ . Рассмотреть случай  $e_1/m_1 = e_2/m_2$  (квадрупольное излучение).
24. Найти энергию излучения релятивистского электрона в однородном магнитном поле за один оборот. Найти полную мощность (в мегаваттах) синхротронного излучения в ускорителе на встречных пучках электронов и позитронов с энергией 100 ГэВ соответственно. Длина окружности ускорителя 30 км, число ускоряемых частиц в кольце —  $5 \cdot 10^{12}$ . Оценить характерную длину волны излучения.
25. Пучок релятивистских электронов пролетает через плоский конденсатор, к которому приложено пере-

менное электрическое поле с частотой  $\omega_0$ . Найти частоту излучения электронов в зависимости от угла  $\theta$  между наблюдателем и направлением движения пучка.

26. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния естественного света (а также линейно поляризованного) с частотой  $\omega$  осциллятором с затуханием.

Со значком \*) — дополнительные задачи.

Контрольная работа № 1 и сдача I-го задания:  
31.03–04.04.2014 г.

Контрольная работа № 2 и сдача II-го задания:  
12.05–17.05.2014 г.