МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
____ декабря 2013 г.

ПРОГРАММА

по курсу: КВАНТОВАЯ ФИЗИКА
по направлению: Прикладные математика и физика
факультет: ФНБИК
кафедра: физики и физического материаловедения
курс: 3
семестр: 6
лекции: 32 часа
практические (семинарские) занятия: 32 часов
лабораторные занятия: нет
самостоятельная работа: 1 час в неделю
экзамен: 6 семестр
зачет: нет

ВСЕГО ЧАСОВ: 64

Программу и задание составил:
д.ф.-м.н., доцент Барабанов Алексей Леонидович

Программа утверждена на заседании кафедры физики и физического материаловедения ____ декабря 2013 года

Заведующий кафедрой А.Л. Барабанов

ПРОГРАММА ОСЕННЕГО СЕМЕСТРА

Уравнение Шредингера. Классические и квантовые состояния физических систем. Волновая функция (ВФ). Условие нормировки ВФ. Волна де Бройля и оператор импульса. Уравнение Шредингера (УШ) и оператор Гамильтона (гамильтониан). Стационарные состояния квантовых систем. Волна де Бройля как стационарное состояние.

Уравнение непрерывности. УШ для частицы, движущейся в потенциальном поле. Уравнение непрерывности для плотности вероятности. Плотность потока вероятности.

Операторы физических величин. Принцип суперпозиции. Линейные, эрмитово сопряжённые и эрмитовые (эрмитово самосопряжённые) операторы. Собственные функции (СФ) и собственные значения (СЗ) оператора. Соответствие между физическими величинами и линейными эрмитовыми операторами; спектр оператора как множество наблюдаемых значений; СФ оператора как ВФ состояний с определёнными значениями физической величины. Принцип суперпозиции. СФ оператора физической величины как полный базис.

Амплитуды, условия ортонормировки, средние значения. Коэффициенты разложения ВФ по СФ оператора физической величины как амплитуды вероятности. Явные выражения для амплитуд. Условия ортонормировки для СФ операторов физических величин. Вычисление средних значений физических величин.

Теория представлений. Формализм Дирака. Эквивалентность ВФ, нормированной на единицу, и коэффициентов её разложения (амплитуд вероятностей) по полному базису, т.е. по СФ оператора физической величины F. Набор амплитуд вероятностей как ВФ системы в f-представлении. ВФ в x-представлении как набор амплитуд вероятностей. Линейное пространство векторов состояний и пространство сопряжённых векторов состояний. Скалярное произведение векторов состояний. Операторы физических величин и их собственные векторы (СВ) и СЗ. Условия ортонормировки для СВ. Разложение вектора состояния по полному набору СВ оператора физической величины; условие полноты набора СВ.

Линейный гармонический осциллятор. Гамильтониан линейного гармонического осциллятора. Стационарные состояния: волновые функции в координатном представлении и энергии. Полиномы Эрмита. Эволюция во времени общего решения уравнения Шредингера для линейного осциллятора. Оператор эволюции.

Операторы повышения и понижения. Операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$ в теории линейного осциллятора. Энергетический спектр линейного осциллятора. Связь n-го состояния линейного осциллятора с основным. Построение собственных функций линейного осциллятора в координатном представлении с помощью операторов $\hat{a}$ и $\hat{a}^+$.

Матричные представления. Матричные представления: операторы–матрицы и векторы–столбцы. Условие нормировки для векторов–столбцов. Унитарные операторы. Преобразования векторов–столбцов и матриц–операторов от одних представлений к другим как унитарные преобразования. Инвариантность коммутаторов операторов относительно унитарных преобразований. Теорема о приведении эрмитовой матрицы к диагональной форме.

Одновременная измеримость. Соотношения неопределённости. Одновременно измеримые величины. Коммутаторы. Прямая и обратная теоремы об одновременной измеримости. Случаи невырожденного и вырожденного спектров. Соотношения неопределённости и когерентные состояния. Полный набор физических величин, описывающих квантовую систему, и квантовые числа.

Законы сохранения в квантовой физике. Оператор эволюции. Зависимость физических величин от времени. Оператор изменения физической величины во времени. Интегралы движения (законы сохранения) в квантовой физике. Инвариантность относительно сдвигов и оператор импульса. Изотропия пространства и оператор углового момента. Некоммутативность вращений и коммутационные сооотношения для составляющих оператора углового момента.

Угловой момент в квантовой физике. Собственные векторы и собственные значения операторов $\hat{\vec{j}}^{\,2}$ и $\hat{j}_z$. Угловой момент как целая или полуцелая величина. Квантования проекции углового момента на ось z. Операторы повышения и понижения в пространстве состояний $|jm\rangle$. Оператор орбитального момента.

Сферические гармоники. Явные выражения для операторов $\hat{\vec{l}}^{\,2}$ и $\hat{l}_z$ в сферических координатах. Сферические гармоники $Y_{lm}(\theta,\varphi)$

как собственные векторы операторов $\hat{\vec{l}}^{\,2}$ и $\hat{l}_z$ в координатном представлении, т.е. $\langle \theta, \varphi | lm \rangle$. Зависимость сферических гармоник от m. Целочисленность орбитального момента (и его проекций на ось z).

Водородоподобный атом. Частица в центральном поле. Уравнение для радиальной функции. Эффективный потенциал. Атомные единицы длины и энергии. Асимптотика радиальной функции на больших и малых расстояниях от кулоновского центра. Явное выражение для радиальной функции. Радиальное квантовое число. Главное квантовое число. Энергетический спектр водородоподобного атома.

Явные выражения для сферических гармоник. Зависимость сферической гармоники от полярного угла θ. Полиномы Лежандра. Присоединённые полиномы Лежандра. Вид сферической гармоники $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ при $m \geq 0$. Определение сферических гармоник для $m < 0$. Зависимость волновых функций s- и p-состояний от углов θ и φ (пространственная направленность химических связей).

ЗАДАНИЕ ОСЕННЕГО СЕМЕСТРА

1. Частица массой m совершает одномерное движение в потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Найдите энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ для n-го стационарного состояния. Проверьте справедливость соотношения неопределённостей для координаты и импульса в любом стационарном состоянии.

2. Частица массой m совершает одномерное движение в потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. В момент $t = 0$ частица находится в состоянии, которое описывается волновой функцией, равной нулю вне ямы, а внутри ямы имеющей вид:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \lambda x, & 0 < x < a/2, \\ \lambda(a - x), & a/2 < x < a. \end{cases}$$

   Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в состоянии $\psi_0(x)$. Проверьте справедливость соотношения неопределённостей для координаты и импульса. С какой вероятностью w_n частица будет обнаружена в n-м стационарном состоянии (в момент $t = 0$)? Какова средняя энергия $\langle E \rangle$ частицы в состоянии $\psi_0(x)$?

3. Частица массой m совершает одномерное движение в потенциальном поле $U(x)$. При каком условии ВФ частицы является гладкой?

4. Частица массой m движется вдоль оси x в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь $U_0 > 0$, а энергия частицы $E > U_0$. Найдите коэффициенты отражения R и прохождения T.

5. Частица массой m движется вдоль оси x в том же потенциальном поле $U(x)$, что и в предыдущей задаче, но энергия частицы $E < U_0$. Покажите, что $R = 1$, но имеет место проникновение частицы в классически запрещённую область.

6. Частица массой m совершает одномерное движение в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| > a, \\ -U_0, & |x| < a. \end{cases}$$

Здесь $U_0 > 0$. Оцените число связанных стационарных состояний частицы в этой потенциальной яме. Найдите энергии E_n этих состояний и обсудите вид соответствующих волновых функций $\psi_n(x)$.

7. Частица массой m совершает одномерное движение в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

При какой минимальной глубине $U_0 > 0$ потенциальная яма всё ещё может удержать частицу в связанном состоянии?

8. Частица массой m движется вдоль оси x в потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Здесь $U_0 > 0$, а энергия частицы $E < U_0$. Вычислите коэффициент прохождения T (вероятность туннелирования сквозь барьер).

9. Волновая функция частицы массой m, совершающей одномерное движение в потенциальном поле $U(x)$, имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A\,x\,e^{-\frac{x}{a}}, & x \geq 0, \end{cases}$$

где a – известный коэффициент. Найдите A из условия нормировки волновой функции на единицу. Найдите $U(x)$ при $x > 0$ и полную энергию частицы E, если известно, что $U(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Вычислите среднее значение координаты $\langle x \rangle$ частицы, дисперсию координаты $\delta x = \sqrt{(\Delta x)^2}$, среднюю кинетическую $\langle T \rangle$ и среднюю потенциальную $\langle U \rangle$ энергии частицы.

10. Частица массой m находится в основном состоянии в потенциальной яме шириной a с бесконечно высокими стенками. Найдите амплитуду $C(p)$ и плотность вероятности $|C(p)|^2$ обнаружить эту частицу с импульсом p.

11. Частица массой m движется в потенциале $U(x) = -\frac{\hbar^2 æ_0}{m}\,\delta(x)$. Найдите волновую функцию $\psi(x)$ и энергию E связанного состояния. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$, $\langle p \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии. Найдите амплитуды вероятности $C(p)$ и вероятности $w(p)$ обнаружить частицу с импульсом p в связанном состоянии.

12. Частица массой m свободно движется с энергией E вдоль оси x и попадает в область действия потенциала $U(x) = -\frac{\hbar^2 æ_0}{m}\,\delta(x)$. Найдите коэффициенты отражения $R(E)$ и прохождения $T(E)$; нарисуйте графики этих функций.

13. Докажите, что $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$.

14. Пусть $[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{K}$, где $\hat{F}$ и $\hat{G}$ – эрмитовые операторы. Докажите, что оператор $\hat{K}$ также является эрмитовым.

15. Убедитесь в справедливости следующих соотношений:

$$\left[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{C}\right]\hat{B}, \quad \left[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\right] = \hat{B}\left[\hat{A}, \hat{C}\right] + \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{C}.$$

16. Докажите, что операторы координаты и импульса частицы эрмитовы. Докажите, что оператор полной энергии (гамильтониан) частицы, движущейся в потенциальном поле, эрмитов.

17. Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к оператору инверсии $\hat{I}$: $\hat{I}f(x) = f(-x)$. Найдите собственные значения и собственные функции оператора $\hat{I}$. Найдите явный вид оператора $e^{i\varphi\hat{I}}$.

18. Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к оператору сдвига $\hat{T}_a$: $\hat{T}_a f(x) = f(x+a)$.

19. Вычислите коммутаторы: $[\hat{x}, \hat{p}]$, $\left[\hat{x}, \hat{p}^{\,2}\right]$, $[\hat{p}\,, U(x)]$, $\left[\hat{I}, \hat{p}^{\,2}\right]$, $\left[\hat{I}, U(x)\right]$, $\left[\hat{T}_a, \hat{x}\right]$, $\left[\hat{T}_a, \hat{p}\right]$.

20. В координатном представлении $\hat{x} = x$, $\hat{p} = -i\hbar\nabla_x$. Найдите явный вид операторов $\hat{x}$ и $\hat{p}$ в импульсном представлении.

21. Частица массой m движется в потенциале $U(x) = -\frac{\hbar^2 æ_0}{m}\,\delta(x)$. Пользуясь импульсным представлением, найдите волновую функцию $\psi(p)$ и энергию E связанного состояния.

22. Пусть в момент $t = 0$ частица массой m находится в когерентном состоянии и описывается волновой функцией

$$\psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma_x^2)^{1/4}}\, e^{i\frac{p_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_x^2}}\,,$$

здесь $x_0 = \langle x \rangle$, $p_0 = \langle p \rangle$, $\sigma_x = \sqrt{\langle (\Delta x)^2 \rangle}$. В этом состоянии $\sigma_x \sigma_p = \hbar/2$, где $\sigma_p = \sqrt{\langle (\Delta p)^2 \rangle}$. Как меняется во времени волновая функция свободной частицы $\Psi(x,t)$ (и плотность вероятности $|\Psi(x,t)|^2$), если $\Psi(x,0) = \psi_0(x)$? Исследуйте зависимость от времени t средних значений $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$.

23. Частица массой m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 æ_0}{m}\left(\delta(x+a) + \delta(x-a)\right),$$

где $æ_0$ и a – параметры потенциала. Найдите энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. Рассматривая эту задачу как модель молекулярного иона водорода H_2^+, исследуйте зависимость энергий уровней от a при фиксированном $æ_0$. Покажите, что в случае $æ_0 a \gg 1$ связанные состояния представляют собой дублеты близко расположенных уровней. Найдите в этом пределе вероятность обнаружения частицы в момент t в левой яме ($x = -a$), если при $t = 0$ частица находится в правой яме ($x = a$). Обсудите, как зависит период колебаний частицы между ямами от параметров $æ_0$ и a.

24. Частица массой m движется в одномерном потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} A\delta(x), & |x| < a, \\ +\infty, & |x| > a, \end{cases}$$

где $A > 0$. Найдите энергии уровней и волновые функции стационарных состояний. В случае, когда $maA/\hbar^2 \gg 1$, исследуйте положение уровней в нижней части спектра.

25. Постройте операторы спина $\hat{s}_{\sigma\sigma'}$ в представлении векторов $|s\sigma\rangle$ для частицы со спином $s = 1/2$ (найдите явные выражения для матриц Паули).

26. Воспользовавшись явным видом матриц Паули, докажите справедливость следующих соотношений:

$$\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i e_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma,$$

$$(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = (\vec{A}\vec{B}) + i(\vec{\sigma}\,[\vec{A} \times \vec{B}\,]),$$

где $\vec{A}$ и $\vec{B}$ – произвольные векторы. Проверьте, что для операторов спина $\hat{s}_\alpha = \sigma_\alpha/2$ (спин $s = 1/2$) справедивы следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{s}_\alpha, \hat{s}_\beta] = i e_{\alpha\beta\gamma} \hat{s}_\gamma.$$

27. Найдите собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\sigma_n = \vec{\sigma}\vec{n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор с составляющими:

$$\vec{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

Обсудите случаи, когда вектор $\vec{n}$ направлен вдоль осей x, y и z.

28. Пусть частица со спином $s = 1/2$ находится в состоянии с проекцией спина на ось z, равной $1/2$. Найдите вероятность того, что проекция спина этой частицы на направление $\vec{n}$ равна $1/2$ (или $-1/2$).

29. Найдите явный вид оператора поворота $\hat{R}(\vec{\alpha}) = e^{-i\frac{\vec{\alpha}\vec{\sigma}}{2}}$ на угол α вокруг единичного вектора $\vec{n}$ (здесь $\vec{\alpha} = \alpha\vec{n}$).

30. Потенциальная энергия $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ взаимодействия двух частиц с массами m_1 и m_2 зависит только от модуля расстояния между частицами. Запишите стационарное уравнение Шредингера, определяющее волновую функцию состояния этих частиц с определенной энергией E. Покажите, что для решения этого уравнения удобно пользоваться относительным радиусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и радиусом-вектором центра масс $\vec{R}$. Какой вид принимает при этом волновая функция $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$?

31. Докажите, что оператор орбитального момента $\hat{\vec{L}} = \hbar\hat{\vec{l}}$ частицы эрмитов.

32. Вычислите следующие коммутаторы:

$$\left[\hat{l}_\alpha, r_\beta\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, (\vec{r}\,\hat{\vec{p}})\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{\vec{r}}^{\,2}\right],$$

$$\left[\hat{l}_\alpha, \hat{\vec{p}}^{\,2}\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, U(r)\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \vec{l}^{\,2}\right].$$

33. Найдите явные выражения (включая нормировочные постоянные) для волновых функций электрона $\psi_{1s}(\vec{r})$, $\psi_{2s}(\vec{r})$, $\psi_{1pm}(\vec{r})$ в атоме водорода. Постройте графики радиальных функций.

ПРОГРАММА ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА

Квазиклассическое приближение. Критерий применимости квазиклассического приближения. Вид волновой функции частицы в квазиклассическом приближении. Решения уравнения Шредингера в окрестности точки поворота. Связь между двумя квазиклассическими решениями, взятыми по разные стороны от точки поворота. Условия квантования Бора–Зоммерфельда. Фазовый объем, приходящийся на одно состояние. Вероятность проникновения частицы через барьер в квазиклассическом приближении.

Квантовая динамика и связь с классической динамикой. Оператор эволюции. Представления Шредингера и Гейзенберга. Зависимость физических величин от времени. Оператор изменения физической величины во времени. Интегралы движения. Операторы изменения во времени координаты и импульса частицы в потенциальном поле. Теорема Эренфеста для одномерного движения частицы (условия перехода от квантовой динамики к классическому описанию движения частицы). Общие условия перехода от квантовой к классической динамике. Коммутаторы и скобки Пуассона. Уравнения Гейзенберга для операторов физических величин.

Теория рассеяния. Постановка задачи рассеяния. Упругое рассеяние. Амплитуда рассеяния. Сечение рассеяния. Функция Грина задачи рассеяния. Интегральное уравнение для задачи рассеяния. Приближение Борна в теории рассеяния. Особенности рассеяния тождественных частиц.

Фазовая теория рассеяния в центральном поле. Дифференциальное сечение упругого рассеяния частиц. Амплитуда рассеяния. Метод парциальных волн. Уравнение для радиальных функций. Сферические функции Бесселя, Неймана и Ханкеля. Разложение амплитуды рассеяния по полиномам Лежандра. Фазы рассеяния. Рассеяние медленных частиц, длина рассеяния. Резонансное рассеяние медленных частиц. Рассеяние быстрых частиц.

Неупругое взаимодействие и оптическая теорема. Упругие и неупругие каналы взаимодействия частиц. Феноменологическое описание неупругого взаимодействия через убывание частиц в упругом канале. Полные сечения упругого и неупругого взаимодействия частиц. Полное сечение взаимодействия частиц. Амплитуда упругого рассеяния и фазы рассеяния. Упругое и неупругое сечения взаимодействия нуклонов с ”чёрным” ядром. Оптическая теорема.

Стационарная теория возмущений. Первое и второе приближения теории стационарных возмущений. Критерий применимости теории. Стационарное возмущение вырожденных уровней дискретного спектра. Волновые функции нулевого приближения. Секулярное уравнение. Эффект Штарка для атома водорода.

Нестационарная теория возмущений. Переходы под влиянием возмущения, действующего в течение конечного времени. Адиабатические и внезапные возмущения. Переходы под действием периодического возмущения. Правило Ферми. Переходы в двухуровневой системе.

Спин. Сложение угловых моментов. Спиновый угловой момент. Спин 1/2 и матрицы Паули. Магнитный момент частицы. Прецессия спина частицы в магнитном поле. Магнитный резонанс. Полный угловой момент частицы или системы частиц. Коэффициенты Клебша–Гордана.

Релятивистские квантовые уравнения. Уравнение Клейна–Гордона. Уравнение Дирака. Матрицы Дирака. Биспиноры. Плотность вероятности и плотность тока вероятности в теории Дирака. Свободное движение релятивистской частицы. Состояния свободного движения частицы с положительными и отрицательными энергиями. Античастицы.

Заряд во внешнем электромагнитном поле. Уравнения Клейна–Гордона и Дирака для заряженной частицы во внешнем поле. Градиентная инвариантность. Уравнение Паули. Поправки 2-го порядка по v/c: контактное и спин-орбитальное взаимодействия. Движение заряженной частицы в постоянном и однородном магнитном поле. Уровни Ландау.

Вариационный метод. Тождественные частицы. Симметрия волновой функции тождественных частиц относительно перестановок координат частиц. Бозоны и фермионы. Гамильтониан атома гелия. Спиновые функции двух электронов. Парасостояния и ортосостояния атома гелия. Обменное взаимодействие.

Многочастичные системы. Волновые функции систем, состоящих из тождественных ферми-частиц. Методы Хартри и Хартри–

Фока. Детерминант Слетера. Принцип Паули. Приближение центрального поля для электронов в атомах и нуклонов в ядрах. Атомные и ядерные оболочки. Термы. Правила Хунда. Тонкая структура уровней.

Квантование электромагнитного поля. Классическое свободное электромагнитное поле: обобщённые координаты, обобщённые импульсы, функция Гамильтона. Переход от классических переменных к операторам. Гамильтониан электромагнитного поля и его собственные значения. Фотоны.

Квантовая теория излучения. Оператор взаимодействия излучающей системы и квантованного электромагнитного поля. Вероятность излучения в единицу времени и время жизни квантового состояния излучающей системы. Электрическое дипольное излучение. Магнитное дипольное и электрическое квадрупольное излучения. Индуцированное излучение и лазеры.

ЗАДАНИЕ ВЕСЕННЕГО СЕМЕСТРА

Тема 1. Квазиклассическое приближение. Периодический потенциал

1. В квазиклассическом приближении найдите уровни энергии и волновые функции состояний частицы массой m, движущейся в потенциале линейного гармонического осциллятора $U(x) = m\omega^2 x^2/2$. Покажите, что квазиклассические волновые функции в классически разрешённой области обладают нужной четностью, и нарисуйте (схематично) графики этих функций.

2. ** Частица массой m совершает финитное движение в одномерном потенциале:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0 \\ Fx, & x > 0. \end{cases}$$

   Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и волновые функции связанных состояний.

   Обсудите связь этой задачи с квантованием энергии движения нейтрона в гравитационном поле Земли вблизи поверхности, отражающей нейтроны (многие вещества отталкивают нейтроны с энергиями менее 100 нэВ; такие нейтроны называют ультрахолодными). Найдите энергии первых трёх уровней ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле Земли.

3. ** Найдите собственные значения и собственные функции оператора сдвига $\hat{T}_a$. *Пояснение*: Утверждение о явном виде собственных функций оператора сдвига называют теоремой Блоха (или теоремой Флоке). Так вот, докажите эту теорему.

4. Частица массой m движется в одномерном периодическом поле

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 æ_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где $æ_0$ и a – параметры потенциала. Исследуйте, при каких отрицательных и положительных энергиях E частицы такое движение возможно. Покажите, что имеются зоны "разрешенных" и "запрещенных" энергий. Исследуйте, что происходит с ширинами зон в предельных случаях $æ_0 a \gg 1$ (сильная связь) и $æ_0 a \ll 1$ (слабая связь).

Тема 2. Представление Гейзенберга. Внезапные возмущения

5. Получите явные выражения для операторов координаты $\hat{x}_H(t)$ и импульса $\hat{p}_H(t)$ частицы массой m в представлении Гейзенберга в случаях: (а) свободного движения; (б) движения в потенциале $U(x) = Fx$; (в) движения в потенциале линейного гармонического осциллятора $U(x) = m\omega^2 x^2/2$.

6. Получите явные выражения для операторов понижения и повышения, $\hat{a}_H(t)$ и $\hat{a}_H^+(t)$, для линейного гармонического осциллятора в представлении Гейзенберга.

7. Частица массой m находится в связанном состоянии в δ-потенциале $U(x) = -\dfrac{\hbar^2 æ_0}{m}\,\delta(x)$. В момент $t = 0$ происходит мгновенное изменение параметра ямы от $æ_0$ до $æ_1$. Найдите вероятность "ионизации". Обсудите эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $æ_1 = 0$.

8. В результате β-распада ядра атома трития образуется ион $^3He^+$. Вычислите вероятности того, что этот ион окажется: (а) в основном состоянии; (б) на первом возбужденном уровне. Каково отношение этих вероятностей?

Тема 3. Борновское приближение в теории рассеяния

9. Найдите в борновском приближении амплитуды рассеяния и диффереценциальные сечения рассеяния частицы в полях:

$$\text{(а)}\, V(r) = \frac{\alpha}{r}\, e^{-\beta r}, \quad \text{(б)}\, V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

В случае (а) покажите, что в пределе $\beta \to 0$ диффереценциальное сечение принимает вид резерфордовского сечения рассеяния заряженной частицы на отталкивающем кулоновском центре.

Тема 4. Фазовая теория рассеяния

10. Найдите полное сечение рассеяния медленной частицы на сферически симметричной прямоугольной потенциальной яме глубиной U_0 и радиусом R. Найдите, при каких соотношениях между U_0 и R полное сечение намного превышает геометрическое значение πR^2 (резонансное рассеяние) и, наоборот, обращается в нуль (эффект Рамзауэра).

11. Найдите полное сечение рассеяния медленной частицы на сферически симметричном прямоугольном потенциальном барьере высотой U_0 и радиусом R. Исследуйте, в частности, предельный случай непроницаемой сферы.

12. Найдите полное сечение рассеяния быстрых частиц ($ka \gg 1$) на:
(а) непроницаемой сфере радиуса a,
(б) чёрном шаре радиуса a.
Обсудите характер зависимости от угла рассеяния θ дифференциальных сечений упругого рассеяния. В случае (а) воспользуйтесь численной процедурой для установления зависимости величин $S_l = e^{2i\delta_l}$ и фаз рассеяния δ_l от орбитального момента l, если $ka = 30$.

Темы 5 и 6. Теория возмущений для невырожденных уровней

13. Эрмитовый оператор с дискретным спектром $\hat{F}(\lambda)$ зависит от параметра λ. Соответственно, собственные значения, $f_n(\lambda)$, и собственные векторы, $|n(\lambda)\rangle$, этого оператора также зависят от λ. Докажите следующее соотношение (теорема Гельмана–Фейнмана):
$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle n|\frac{\partial \hat{F}(\lambda)}{\partial \lambda}|n\rangle.$$

14. Найдите электрическую поляризуемость α линейного гармонического осциллятора. Заряд частицы e, масса m, собственная частота колебаний ω_0.

15. Оцените электрическую поляризуемость α атома водорода, находящегося в основном состоянии. Что происходит с энергией основного состояния атома водорода, помещённого в постоянное и однородное электрическое поле? Как зависит поправка к энергии основного состояния от напряжённости $\mathcal{E}$ поля?

16. Найдите поправку к энергии основного состояния атома водорода, обусловленную конечным размером ядра. Примите, что ядро представляет собой равномерно заряженный по объему шар радиусом r_0.

17. Используя второй порядок стационарной теории возмущений, определите, как зависит энергия взаимодействия от расстояния R между: (а) атомом и ионом ($\sim 1/R^4$); (б) двумя атомами ($\sim 1/R^6$).

Тема 7. Теория возмущений для вырожденных уровней

18. Атом водорода, находящийся в состоянии с главным квантовым числом $n = 2$ (первое возбуждённое состояние), помещают в постоянное и однородное электрическое поле. Что происходит с энергией состояния? Исследуйте расщепление уровня $n = 2$ (эффект Штарка). Как зависят поправки к энергии уровня $n = 2$ от напряженности $\mathcal{E}$ поля? Найдите волновые функции нулевого приближения, описывающие возбуждённые

($n = 2$) состояния атома водорода с определёнными энергиями в постоянном и однородном электрическом поле.

19. Атом водорода находится в стационарном состоянии с главным квантовым числом $n = 2$. Может ли он обладать постоянным (ненулевым) электрическим дипольным моментом? Если "да", то каково максимальное значение дипольного момента атома $\vec{d} = \langle\psi|e\vec{r}|\psi\rangle$? Как выглядит волновая функция $\psi(\vec{r})$, описывающая состояние с максимальным электрическим дипольным моментом?

Тема 8. Правило Ферми

20. С помощью правила Ферми получите формулу для дифференциального сечения упругого рассеяния в борновском приближении.

21. Найдите сечение фотоэффекта σ_p на атоме водорода под действием плоской электромагнитной волны с частотой ω для случая $\hbar\omega \gg I$, где I – потенциал ионизации атома. Выразите ответ через произведение геометрического сечения πa^2, где a – радиус Бора, и некоторого безразмерного множителя.

Тема 9. Спин в магнитном поле

22. Частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\hat{\vec{\mu}} = \mu\vec{\sigma}$ находится в связанном стационарном состоянии. В момент времени $t = 0$, когда "включается" магнитное поле $\vec{H}$, направленное вдоль оси x, спиновое состояние частицы описывается функцией $\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Какой функцией $\chi(t)$ описывается спиновое состояние частицы во все последующие моменты времени в представлении Шредингера? Как выглядит оператор спина частицы $\hat{\vec{s}}(t)$ в представлении Гейзенберга?

    Найдите вектор поляризации частицы $\vec{P}(t) = \langle\chi|\hat{\vec{\sigma}}|\chi\rangle$ как функцию времени, пользуясь представлениями Шредингера и Гейзенберга. Какое движение совершает в пространстве вектор $\vec{P}(t)$? Меняется ли во времени длина $|\vec{P}(t)|$ вектора поляризации?

23. На частицу со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\hat{\vec{\mu}} = \mu\vec{\sigma}$, которая покоится в сильном постоянном и однородном магнитном поле $\vec{H} \parallel z$, падает циркулярно-поляризованное поле $\vec{h}(t) \perp \vec{H}$ с частотой ω. Найдите зависимость от времени спиновой функции $\chi(t)$, если в начальный момент $\chi(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. При какой частоте ω падающей волны возникает "магнитный резонанс"? Найдите вектор поляризации частицы $\vec{P}(t) = \langle\chi(t)|\hat{\vec{\sigma}}|\chi(t)\rangle$ для случая резонанса.

24. ** Покоящаяся частица со спином $s = 1/2$ и магнитным моментом $\hat{\vec{\mu}} = \mu\vec{\sigma}$ помещена в магнитное поле $\vec{H}(t)$, медленно прецессирующее вокруг оси z, составляя с ней постоянный угол θ. Найдите зависимость от времени спиновой функции $\chi(t)$ и поляризации $\vec{P}(t)$ частицы, если в начальный момент времени спин частицы направлен вдоль магнитного поля. Покажите, что $\vec{P}(t)$ следует за направлением магнитного поля. Покажите, что за один полный оборот вектора $\vec{H}(t)$ вокруг оси z спиновая функция приобретает фазу, пропорциональную телесному углу $\Omega(\theta)$, который охватывает вектор $\vec{H}(t)$ (фаза Берри).

Тема 10. Частица в магнитное поле. Сверхтонкое расщепление уровней

25. Покажите, что уравнения Дирака и Паули инвариантны относительно калибровочных преобразований потенциалов электромагнитного поля. Как преобразуется волновая функция частицы при калибровочном преобразовании потенциалов?

26. Бесспиновая частица массой m с зарядом e движется в постоянном и однородном магнитном поле H. Найдите энергии стационарных состояний частицы (уровни Ландау) и кратности их вырождения, считая, что движение частицы в направлении, перпендикулярном полю, ограничено площадью S.

27. Найдите величину сверхтонкого расщепления основного состояния атома водорода. Вычислите длину волны излучения, испускающегося при переходе между расщепленными подуровнями.

Тема 11. Вариационный метод. Тождественные частицы

28. Вычислите энергию основного состояния атома водорода с помощью вариационного метода. В качестве пробных функций возьмите: $\psi_a(r) = Ae^{-\frac{r}{a}}$ и $\psi_b(r) = Be^{-\frac{r^2}{b^2}}$. Найдите a и b.

29. Найдите, пользуясь вариационным методом, энергию основного состояния гелиеподобного атома с зарядом ядра Z. В качестве пробной функции возьмите

$$\begin{array}{ll} \text{(а)} & \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha(r_1+r_2)}, \\ \text{(б)}^{**} & \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha r_1 - \beta r_2} + e^{-\beta r_1 - \alpha r_2}. \end{array}$$

В случае (б)** воспользуйтесь численной процедурой минимизации матричного элемента от гамильтониана по параметрам α и β. Воспользовавшись полученными результатами, установите, существует ли стабильный ион водорода H^-, а также вычислите диамагнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии.

30. Выразите дифференциальное сечение рассеяния:
    (а) α-частиц на α-частицах,
    (б) протонов на протонах,
через амплитуду кулоновского рассеяния $f_B(\theta)$ (см. задачу 9) двух точечных заряженных частиц друг на друге. В обоих случаях энергии сталкивающих частиц невелики, так что частицы не сближаются до такой степени, чтобы между ними начали действовать ядерные силы притяжения.

Тема 12. Квантовая теория излучения

31. Найдите угловое распределение фотонов, излучающихся в переходе $|2p\,m\rangle \to |1s\rangle$ атома водорода, если: (а) $m = 1$, (б) $m = 0$. Вычислите также время жизни $|2p\,\rangle$ состояния (в атомных единицах времени и в секундах).

32. Найдите время жизни атома водорода в верхнем состоянии сверхтонкой структуры.

33. ** Решите задачу 21, воспользовавшись квантовым описанием падающей электромагнитной волны.

Литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Физматлит, 2002.

2. *Аллилуев С.П.* Квантовая теория сложного атома и квантовая теория излучения. Уч. пособие — М.: МФТИ, 1984.

3. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. — Долгопрудный: Издательский Дом "Интеллект", 2013.

4. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. — М.: Наука, 1992.

5. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1973.

6. *Мессиа А.* Квантовая механика. — М.: Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.

7. *Тернов А.И.* Основы релятивистской квантовой механики: Учеб. пособие — М.: МФТИ, 2002.

8. *Шифф Л.* Квантовая механика. — М.: ИЛ, 1959.

ПЛАН ЗАНЯТИЙ
в весеннем семестре 2013/2014 учебного года

Недели	Лекции	Семинары
1.	Тема 1	Тема 1
2.	Тема 2	Тест по теме 1. Тема 2
3.	Тема 3	Тест по теме 2. Тема 3
4.	Тема 4	Тест по теме 3. Тема 4
5.	Тема 5	Тест по теме 4. Тема 5
6.	Тема 6	Тест по теме 5. Тема 6
7.	Контр. работа 1	Сдача задания 1
8.	Тема 7	Тест по теме 6. Тема 7
9.	Тема 8	Тест по теме 7. Тема 8
10.	Тема 9	Тест по теме 8. Тема 9
11.	Тема 10	Тест по теме 9. Тема 10
12.	Тема 11	Тест по теме 10. Тема 11
13.	Тема 12	Тест по теме 11. Тема 12
14.	Контр. работа 2	Тест по теме 12. Сдача задания 2

По итогам семестра студентам выставляются 10-бальные оценки за работу в семестре. Оценка за работу в семестре принимается во внимание при выставлении оценки за экзамен.

Правила тестирования

Тестирования проводятся на семинарах, как правило, в начале семинара. Список тестовых вопросов составляется в течение семестра: после каждой лекции лектор предлагает студентам 10 вопросов (к концу семестра после 12 лекций появится список из 120 вопросов). На каждом тестировании предлагается письменно ответить на 5 вопросов, выбранных из соответствующих 10 вопросов по теме. При этом преподаватель по своему усмотрению может менять формы вопросов. При ответах на тестовые вопросы никакими письменными (печатными) материалами и электронными приборами пользоваться нельзя. На каждый вопрос и ответ отводится по минуте, всего, следовательно, 5 минут на тестирование.

За ответ на каждый вопрос ставятся либо 2 балла (правильный ответ), либо 1 балл (немного неточный ответ), либо 0 баллов (неправильный ответ). Преподаватель возвращает студентам проверенные работы с выставленными баллами (как правило, через неделю после тестирования) и тем самым информирует их о количестве набранных ими баллов. Таким образом, за 12 тестирований можно набрать от 0 до 120 баллов.

В конце семестра для студентов, недовольных своим итоговым результатом по тестированию, будет проведено дополнительное "итоговое тестирование". Будет предложено письменно ответить на некоторые 25 вопросов из списка тех же 120 вопросов. Время тестирования - примерно 30 минут. За каждый ответ ставится, как и ранее, от 0 до 2 баллов. Результирующая оценка получается умножением суммы полученных баллов на 2. Таким образом, в этом итоговом тестировании можно набрать от 0 до 100 баллов.

Контрольные работы

На каждой контрольной работе предлагаются 2-3 задачи. Время выполнения работы – одна пара. Каждая контрольная работа будет оцениваться 10-бальной оценкой. Таким образом, за 2 контрольные работы можно набрать от 0 до 20 баллов.

Сдача заданий

Задачи задания должны быть представлены в отдельной тетради или на сброшюрованных листах. Задание 1 сдаётся в середине семестра, задание 2 – в конце семестра.

За сдачу всех задач задания в срок, определённой программой, выставляется 10 баллов. Если все задачи не удалось сдать в срок, но "отложенные" задачи были сданы с недельным опозданием, то за сдачу задания выставляется 8 баллов. Более поздняя сдача задания (уже всё равно в какие сроки, но до начала экзаменационной сессии) оценивается в 6 баллов. Если последняя задача задания принимается после начала экзаменационной сессии, то за задание ставится не выше 4 баллов. Задание может быть засчитано без 1, 2, . . . задач, при этом за каждую несданную задачу из 6 или 4 баллов вычитаются по 2 балла (до 0 баллов за задание, но не ниже).

За каждую выполненную задачу с двумя звёздочками (в обоих заданиях таких необязательных для выполнения задач всего 5 штук) прибавляется 2 балла. Не важно, в какие сроки сдаются эти необязательные задачи (но до начала экзаменационной сессии).

Таким образом, за сдачу двух домашних заданий можно набрать от 0 до 30 баллов. Студенты, не сдавшие задание хотя бы на 0 баллов, не допускаются до экзамена.

Оценка за работу в семестре

Студентам, набравшим за тесты 70 или более баллов, выставляется оценка за тесты по следующей схеме:

Сумма баллов за тесты:	70 – 82	83 – 94	95 – 120
Оценка за тесты:	1	2	3

По результатам двух контрольных выставляется оценка за контрольные по следующей схеме:

Сумма баллов за 2 контр. работы:	0 – 4	5 – 9	10 – 14	15 – 20
Оценка за контрольные:	1	2	3	4

По результатам сдачи двух заданий выставляется оценка за задания по следующей схеме:

Сумма баллов за сдачу заданий:	0 – 9	10 – 19	20 – 30
Оценка за задания:	1	2	3

Оценка за зачёт по 10-бальной системе равна сумме оценок за тесты, контрольные и задания.

Студенты, набравшие за тестирование менее 70 баллов, не допускаются до экзамена.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КУРСА

ВЕКТОРЫ СОСТОЯНИЯ И ОПЕРАТОРЫ

Эрмитово сопряженные операторы:

$$\hat{F}|\psi\rangle \equiv |\hat{F}\psi\rangle, \quad \langle\varphi|\hat{F}\psi\rangle = \langle\hat{F}^+\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{F}^+\varphi\rangle^*.$$

Физические величины (наблюдаемые):

$$F \to \hat{F}, \quad \hat{F}^+ = \hat{F}, \quad \langle F\rangle = \langle\psi|\hat{F}\psi\rangle \equiv \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle.$$

Дискретный спектр:

$$\hat{F}|n\rangle = f_n|n\rangle, \quad \langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}.$$

Непрерывный спектр:

$$\hat{F}|f\rangle = f|f\rangle, \quad \langle f|f'\rangle = \delta(f - f').$$

Разложение вектора состояния по полному базису:

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle\langle n|\psi\rangle + \int df|f\rangle\langle f|\psi\rangle.$$

Условие полноты:

$$\sum_n |n\rangle\langle n| + \int df|f\rangle\langle f| = \hat{1}.$$

Нормировка на единицу и вероятности:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1, \quad w_n = |\langle n|\psi\rangle|^2, \quad w(f)df = |\langle f|\psi\rangle|^2 df.$$

Коммутатор:

$$\left[\hat{F}, \hat{G}\right] = \hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F}.$$

Соотношение неопределенностей ($\hat{F}^+ = \hat{F}$, $\hat{G}^+ = \hat{G}$):

$$\left[\hat{F}, \hat{G}\right] = i\hat{K}, \quad \langle(F - \langle F\rangle)^2\rangle\langle(G - \langle G\rangle)^2\rangle \geq \frac{\langle K\rangle^2}{4}.$$

Волновая функция в f-представлении: $\langle n|\psi\rangle, \langle f|\psi\rangle$.

КООРДИНАТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Операторы координаты и импульса:

$$\hat{\vec{r}} = \vec{r}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}.$$

Собственные функции оператора импульса:

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}\,) \equiv \langle\vec{r}\,|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, e^{i\vec{p}\vec{r}/\hbar}, \quad \langle\vec{p}\,|\vec{p}\,'\rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}\,').$$

Собственные функции оператора координаты:

$$\psi_{\vec{r}\,'}(\vec{r}\,) \equiv \langle\vec{r}\,|\vec{r}\,'\rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Зависимость вектора состояния от времени:

$$i\hbar\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle.$$

Стационарное состояние:

$$\Psi_E(q,t) = e^{-iEt/\hbar}\psi_E(q), \quad \hat{H}\psi_E(q) = E\psi_E(q).$$

Зависимость средних значений от времени:

$$\frac{d\langle F\rangle}{dt} = \langle\Psi|\frac{d\hat{F}}{dt}|\Psi\rangle, \quad \frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial\hat{F}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{F}\right].$$

Оператор эволюции:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle.$$

Стационарный случай ($\widehat{H}$ не зависит от t):

$$i\hbar\frac{\partial\hat{U}}{\partial t} = \hat{H}\hat{U}, \quad \hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar},$$

$$\Psi(q,t) = \hat{U}(t)\Psi(q,0) = \sum_E e^{-iEt/\hbar}c_E\psi_E(q).$$

Представление Гейзенберга:

$$\hat{F}_{\text{H}}(t) = \hat{U}^{+}(t)\,\hat{F}\,\hat{U}(t), \quad \frac{d\hat{F}_{\text{H}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{F}_{\text{H}}\right].$$

КВАНТОВАЯ ДИНАМИКА ЧАСТИЦЫ

Гамильтониан:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^{\,2}}{2m} + U(\vec{r}), \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}.$$

Уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0, \quad \rho = |\Psi|^2, \quad \vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right).$$

Оператор орбитального момента:

$$\hat{\vec{L}} = \hbar\,\hat{\vec{l}} = \left[\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}\right] = -i\hbar\left[\vec{r}\times\vec{\nabla}\right], \quad \left[\hat{l}_\alpha, \hat{l}_\beta\right] = ie_{\alpha\beta\gamma}\hat{l}_\gamma,$$

$$\hat{\vec{l}}^{\,2} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \quad \hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Собственные функции операторов орбитального момента:

$$\left\{\begin{array}{lcll} \hat{\vec{l}}^{\,2}Y_{lm}(\theta,\varphi) & = & l(l+1)\,Y_{lm}(\theta,\varphi), & l = 0, 1, 2, \ldots, \\ \hat{l}_z Y_{lm}(\theta,\varphi) & = & m\,Y_{lm}(\theta,\varphi), & m = 0, \pm1 \ldots \pm l. \end{array}\right.$$

Сферические гармоники:

$$\left\{\begin{array}{ll} Y_{lm}(\theta,\varphi) = C_{lm}\,P_l^m(\theta)\,e^{im\varphi}, & m \geq 0, \\ Y_{lm}(\theta,\varphi) = (-1)^m\,Y^*_{l\,-m}(\theta,\varphi), & m < 0, \end{array}\right.$$

нормировочная постоянная:

$$|C_{lm}| = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2},$$

присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_l^m(\theta) = (\sin\theta)^m\frac{d^m}{d(\cos\theta)^m}\,P_l(\cos\theta), \quad P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!}\,\frac{d}{d\xi^l}\,(\xi^2-1)^l.$$

УГЛОВОЙ МОМЕНТ

Преобразование поворота вектора состояния (система координат 2 получена из системы координат 1 поворотом на угол φ вокруг единичного вектора $\vec{n}$):

$$|\psi; 2\rangle = \hat{R}(\vec{\omega})|\psi; 1\rangle, \quad \hat{R}(\vec{\omega}) = e^{-i\hat{\vec{J}}\vec{\omega}/\hbar}, \quad \vec{\omega} = \varphi\,\vec{n},$$

где $\hat{\vec{J}}$ – оператор углового момента. В координатном представлении:

$$\langle\vec{r}\,|\hat{\vec{J}}\,|\Psi\rangle = \hat{\vec{L}}\langle\vec{r}\,|\Psi\rangle, \quad \hat{\vec{L}} = -i\hbar\,[\,\vec{r}\times\vec{\nabla}\,] = [\hat{\vec{r}}\times\hat{\vec{p}}] = \hbar\,\hat{\vec{l}}.$$

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Волновая функция:

$$\psi \simeq \frac{1}{\sqrt{|p|}}\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int p(x)dx\right).$$

Критерий применимости:

$$\left|\frac{d\lambda}{dx}\right| = \left|\frac{\hbar p'}{p^2}\right| \ll 1.$$

Правило квантования Бора–Зоммерфельда:

$$\Gamma(E_n) = \oint p(x)dx = 2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right), \quad n \gg 1.$$

Фазовый объем на одно состояние: $\Delta\Gamma = 2\pi\hbar$.
Проницаемость барьера:

$$D \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int\limits_a^b |p\,|dx\right),$$

$D \ll 1$, a и b – точки поворота.

ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Гамильтониан и энергетический спектр:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right),$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\xi} + i\hat{p}_\xi}{\sqrt{2}}, \quad \hat{\xi} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\hat{x}, \quad \hat{p}_\xi = \frac{\hat{p}}{\sqrt{m\hbar\omega}}\,,$$

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Волновые функции стационарных состояний:

$$\langle x|n\rangle \equiv \psi_n(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\,2^n n!}\right)^{1/2} H_n(\xi)\, e^{-\xi^2/2},$$

$$\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}, \quad \xi = \alpha x.$$

Полиномы Эрмита:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n}{d\xi^n}\, e^{-\xi^2} = e^{\xi^2/2}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2/2}.$$

Операторы понижения и повышения:

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad |n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

АТОМ ВОДОРОДА

Гамильтониан и энергетический спектр:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}, \quad \hat{H}|nlm\rangle = E_n|nlm\rangle, \quad E_n = -\frac{Z^2}{2n^2}\frac{e^2}{a}.$$

атомная единица (а.е.) длины: $a = \hbar^2/me^2$,
а.е. импульса: $\hbar/a = me^2/\hbar$,
а.е. скорости: $e^2/\hbar$,
а.е. энергии: $e^2/a = me^4/\hbar^2$.

Волновые функции стационарных состояний:

$$\langle\vec{r}\,|nlm\rangle \equiv \psi_{nlm}(\vec{r}\,) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi),$$

$$R_{nl}(\rho) = \rho^l w_{n_r}(\rho)\, e^{-Z\rho/n}, \quad w_{n_r}(\rho) = c_{nl} L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

где $\rho = r/a$, $L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$ – обобщенный полином Лагерра степени $n_r = n - l - 1$, где n_r – радиальное квантовое число.

Сферические гармоники для низших моментов:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_{1\,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1), \quad Y_{2\,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi},$$

$$Y_{2\,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

Радиальные функции для низших состояний ($Z = 1$):

$$R_{10} = \frac{2\, e^{-r/a}}{\sqrt{a^3}}, \quad R_{20} = \frac{e^{-r/2a}}{\sqrt{2a^3}}\left(1 - \frac{r}{2a}\right), \quad R_{21} = \frac{r\, e^{-r/2a}}{\sqrt{24a^5}}.$$

РАССЕЯНИЕ И РЕАКЦИИ

Асимптотика волновой функции и дифференциальное сечение рассеяния:

$$\psi(\vec{r})|_{r\to\infty} \simeq e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}, \quad d\sigma = |f(\theta)|^2 d\Omega.$$

Первое борновское приближение:

$$f(\theta, \varphi) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}\, U(\vec{r})\, d^3r.$$

Разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам:

$$f(\theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - S_l) P_l(\cos\theta).$$

Полное сечение упругого рассеяния:

$$\sigma_e = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)|1 - S_l|^2 = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)\sin^2\delta_l, \quad S_l = e^{2i\delta_l}.$$

Полное сечение неупругого взаимодействия:

$$\sigma_{ie} = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l+1)(1 - |S_l|^2).$$

Полное сечение взаимодействия (оптическая теорема):

$$\sigma_t = \sigma_e + \sigma_{ie} = \frac{4\pi}{k} \, \mathrm{Im} f(0).$$

СТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Невырожденный случай:

$$E_n^{(1)} = \langle n|V|n\rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{|\langle n|V|k\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}},$$

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum_{n \neq k} |\psi_k^{(0)}\rangle \frac{\langle \psi_k^{(0)}|V|\psi_n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \, .$$

Вырожденный случай:

$$\det \|V_{\alpha\beta} - E^{(1)}\delta_{\alpha\beta}\| = 0.$$

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Вероятность перехода в единицу времени в непрерывный спектр под действием периодического возмущения $\hat{V}(t) = \hat{V}e^{-i\omega t} + \hat{V}^{+}e^{i\omega t}$ (правило Ферми):

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} \, |\langle f|\hat{V}|i\rangle|^2 \rho(E_f), \quad E_f = E_i + \hbar\omega,$$

где $\rho(E) = dN/dE$ — плотность состояний в непрерывном спектре.

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ

Симметрия ВФ относительно перестановок координат:

ферми-частицы: $\Psi(x_1, x_2, t) = -\Psi(x_2, x_1, t)$,

бозе-частицы: $\Psi(x_1, x_2, t) = +\Psi(x_2, x_1, t)$,

где $x \equiv (\vec{r}, \sigma)$.

Симметризованная ВФ (определитель Слетера) для ферми-частиц:

$$\Psi_{n_1,n_2,\dots n_N} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \begin{pmatrix} \psi_{n_1}(x_1) & \psi_{n_1}(x_2) & \dots & \psi_{n_1}(x_N) \\ \psi_{n_2}(x_1) & \psi_{n_2}(x_2) & \dots & \psi_{n_2}(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n_N}(x_1) & \psi_{n_N}(x_2) & \dots & \psi_{n_N}(x_N) \end{pmatrix}.$$

Симметризованная ВФ для бозе-частиц:

$$\Psi_{n_1,n_2,\dots n_N} = \left(\frac{N_1!N_2!\cdots N_N!}{N!}\right)^{1/2} \sum_{\{P\}} \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)\dots\psi_{n_N}(x_N).$$

Рассеяние для тождественных частиц:

$$\psi|_{r\to\infty} \simeq e^{i\vec{k}\vec{r}} \pm e^{-i\vec{k}\vec{r}} + \frac{f(\theta) \pm f(\pi-\theta)}{r}\, e^{ikr},$$

$$d\sigma = w_+|f(\theta) + f(\pi-\theta)|^2 d\Omega + w_-|f(\theta) - f(\pi-\theta)|^2 d\Omega.$$

УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \Delta\Psi + m^2 c^4 \Psi.$$

УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = c\vec{\alpha}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\Psi + \beta mc^2\Psi + e\Phi\Psi,$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

УРАВНЕНИЕ ПАУЛИ

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A})^2\Psi - \frac{e\hbar}{2mc}(\vec{H}\hat{\vec{\sigma}})\Psi + e\Phi\Psi.$$

$$\hat{\vec{A}}(\vec{r}\,) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \left(\hat{a}_{\lambda} \vec{e}_{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \hat{a}_{\lambda}^{+} \vec{e}_{\alpha}^{\,*} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right),$$

$$\hat{\vec{H}}(\vec{r}\,) = \sum_{\lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega}} \left(i[\vec{k} \times \vec{e}_{\alpha}] \hat{a}_{\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} - i[\vec{k} \times \vec{e}_{\alpha}^{\,*}] \hat{a}_{\lambda}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{r}} \right),$$

$$\hat{V} = -\frac{e}{mc} \sum_{i} \hat{\vec{A}}_i \hat{p}_i + \frac{e^2}{2mc^2} \sum_{i} \hat{\vec{A}}_i^{2} - \frac{e\hbar}{2mc} \sum_{i} \vec{\sigma}_i \hat{\vec{H}}_i.$$