Уважаемые абитуриенты!

Перед Вами решения задач олимпиады 2000 года Факультета молекулярной и биологической физики (ФМБФ). Большинство задач было придумано участниками подобных олимпиад прошлых лет, которые в настоящее время являются студентами факультета. Участие в олимпиаде значительно облегчит Вам прохождение собеседования на ФМБФ (если Вы об этом упомяните). Мы ждем Вас!!!

Физика

1. Скорость звука в снегу *v* намного меньше скорости звука в воздухе *c*, поэтому снег можно рассматривать как среду с показателем преломления для звуковых волн: $n=c/v$. По аналогии со световыми волнами при переходе из среды с $n>1$ в среду с $n=1$ возможно полное отражение волн на границе. Выходит лишь звук, испущенный иод углом $\varphi<\arcsin(1/n)$ к вертикали. При $v=30$ м/с, $n=10$: $\varphi \approx 6^0$, т.е. из воздуха в снег проникает вся энергия падающих на границу звуковых волн, а из снега в воздух - лишь малая ее часть.

2. Струя не будет сужаться до бесконечности, так как при этом начинают сказываться вибрации трубопровода, неравномерность подачи воды, приводящие к разрыву струи и образованию капель.

Оценим радиус шейки струи *r*, которая еще может удерживать каплю: $2\pi r\cdot\sigma = mg = \frac{4}{3}\pi R^3\rho g$, где σ=730 Н/м – коэффициент поверхностного натяжения воды, ρ=1000 кг/м^3 - плотность воды, R=2 мм - радиус капли. Отсюда $r=\frac{2R^3\rho g}{3\sigma}$ = 0.7 мм.

В силу теоремы непрерывности: $S_0v_0=Sv=\text{const}$, где *S* - сечение струи, *v* - скорость струи, S_0 и v_0 - сечение и скорость струи на выходе из крана.

Расход: $Q=\frac{dV}{dt}=\frac{Sv\cdot dt}{dt} = Sv = const$, Q=200 л/сут

Для сечения в месте отрыва капель: $\pi r^2 v_r = Q \Rightarrow v_r = Q/\pi r^2$

Где v_r - скорость струи в месте отрыва.

Кроме того: $\begin{cases}\dfrac{v_r^2-v_0^2}{2g}=H\\ v_0\cdot\pi R^2 = v_r\cdot\pi r^2\end{cases} \Rightarrow v_r^2\left(1-\left(\frac{r}{R_0}\right)^4\right)=2gH$

Здесь R_0 - радиус выходного отверстия крана.

Так как $r<<R_0$, $v_r\approx\sqrt{2gH}$. => $H=\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{\pi r^2}\right)^2\approx 0.12$ м

3. Для человека, который стоит вертикально:

	Ноги	Туловище (без ног)
Координата центра масс в процентах от роста	34%	71%
Масса в процентах от общей массы	35%	65%
Координата тазобедренного сустава в процентах от роста: 52%		

Если бы Джордон свел ноги вместе, центр масс бы опустился, вертикальная координата туловища поднялясь. Пусть m_1 - масса одной ноги, *m* - масса туловища без ног, *h* - расстояние от центра масс туловища до тазобедренного сустава, *l* - расстояние от тазобедренного сустава до центра масс ноги.

Случай 1 (угол между ногами 120): $y_{ц.м.}=\frac{my_1+2m(y_1-h-l\cos 60^0)}{2m_1+m}$

Случай 2 (угол между ногами 0°): $y_{ц.м.}=\frac{my_2+2m(y_1-h-l)}{2m_1+m}$

Поскольку вертикальная коордрната центра масс не меняется,

$(m+2m_1)y_1-2m_1h-2m_1l\cdot 1/2=(m+2m_1)y_2-2m_1h-2m_1l$

$y_2=y_1+ml/(m+2m_1)$, $m_1=(0.35/2)M$, $m=0.65M$, $l=0.18H$

где *M* и *H* - масса и рост Джордона. $\Delta y = y_2-y_1\approx 0.03H$

То есть Джордон мог бы подпрыгнуть выше на 3% величины своего роста.

4. Табличные значения, используемые в задаче: $\rho_л=900$ кг/м – плотность льда; λ=335*10^3 Дж/кг – теплота плавления льда; C_p=29 Дж/мольК - теплоемкость воздуха; θ= 0.034 Вт/мК -коэффициент теплопроводности воздуха.

Лавина гонит перед собой область повышенного давления, в результате чего температура воздуха у ее переднего фронта повышается. Найдем ее из уравнения Бернулли для сжимаемой жидкости (в системе отсчета, связанной с лавиной, на нее набегает воздух со скоростью v=100 м/с):

$$\frac{C_VT_0}{\mu}+\frac{p_0}{\rho_0}+\frac{v^2}{2}=\frac{C_VT_2}{\mu}+\frac{p_2}{\rho_2}$$

Здесь P_0, T_0 – давление и температура набегающего воздуха, P_2 и T_2 - давление и температура воздуха у фронта лавины.

$\frac{p}{\rho}=\frac{RT}{\mu} \Rightarrow \frac{C_VT_0}{\mu}+\frac{RT_0}{\mu}+\frac{v^2}{2}=\frac{C_VT_2}{\mu}+\frac{RT_2}{\mu}$; $C_P=C_V+R \Rightarrow \frac{C_PT_0}{\mu}+\frac{v^2}{2}=\frac{C_PT_2}{\mu}$

где *Cp* - мольная теплоемкость воздуха. $\Delta T=\frac{\mu v^2}{2C_P}\approx 5K$, т.е. T_2=275K

В силу вихревого движения снежного облака, время пребывания в нем кристалика льда можно оценить так: $\tau = H/v$, где H=10 м – характерный размер облака. => τ=0.1 с.

Для простоты считаем шарик сферическим. Теплота, которая передается шарику за время τ: $Q = \theta \frac{\Delta T}{\Delta l} S\tau$, где ΔT=2 К, Δl – толщина воздушной оболочки, S - площадь поверхности кристаллика, θ – коэффициент теплопроводности воздуха.

$S = 4\pi r^2$ => $Q = \theta \frac{\Delta T}{\Delta l} \cdot 4\pi r^2 \tau = m\lambda = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho\lambda$ (теплота идет на плавление)

$$r = \frac{3\theta \cdot \Delta T \cdot \tau}{\rho\lambda \cdot \Delta l} = 6.8 \cdot 10^{-8} \text{ м}$$

Поэтому пылеобразные лавины остаются сухими на протяжении всего пути.

5. Воздух с заженного конца сигареты имеет высокую температуру, поэтому он подымается вверх в виде конвекционных потоков, увлекая за собой дым (очень мелкие твердые частички). Когда воздух проходит через всю длину сигареты (особенно через фильтр, если он есть), он остывает вплоть до температуры окружающей среды, и дым из мундштука медленно опускается вниз.

6. Воспользуемся третим законом Кеплера: квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит, по которым они движутся вокруг Солнца. Орбита, по которой в настоящее время движется Земля, близка к круговой с некоторым радиусом R и периодом обращения T=1 год. Траекторию падения Земли на Солнце можно представить как вырожденную эллиптическую орбиту с длиной большой полуоси $R/2$. Период обращения по такой орбите:

$\left(\frac{T}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{R/2}{R}\right)^3$ => $\tau = \frac{T}{2} = \frac{T_0}{4\sqrt{2}}$, то есть около 65 дней.

7. $F = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha$ – сила, с которой цилиндр действует на стержень.

Плечо этой силы: $l = R \cdot \mathrm{ctg}\left(\frac{90^0 - \alpha}{2}\right)$

Момент силы: $M_{kp} = Fl = Rmg \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}(45^0 - \alpha/2)$

Отсюда $R = M_{KP} / \left(mg \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}(45^0 - \alpha/2)\right)$

8. Выберем бесконечно малый участок траектории электрона ΔS. Тогда можно считать на нем радиус траектории постоянным: r=const => $\Delta S = r\Delta\alpha$. Но $\Delta S = v\Delta t$, $r = -mv/eB$, тогда

$$\Delta\alpha = \frac{v\Delta t}{r} = \frac{eB}{m}\Delta t$$

перейдем к бесконечно малым величинам:

$$d\alpha = \frac{eB(t)}{m}dt \Rightarrow \int_0^{3\pi/2} d\alpha = \int_0^{\pi} \frac{eB(t)}{m}dt = \frac{eB_0}{m}\int_0^{\pi} \sin\omega t dt = \frac{2eB_0}{\omega m}$$

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{2eB_0}{\omega m} \Rightarrow \omega = \frac{4eB_0}{3\pi m}$$

Траектория имеет вид, изображенный на рисунке.

9. Из-за высокого давления коньков на лед он тает, образуя прослойку воды между лезвием коньков и поверхностью льда. На экой гидростатической подушке и скользят коньки. В случае слегка шероховатой поверхности площадь соприкосновения лезвия и льда меньше, чем в случае ровной поверхности, давление выше и коньки скользят лучше.

10. Пусть точка C – центр масс кубика, A – центр плавучести (центр масс жидкости, вытесненной кубиком) в положении равновесия, A_1 – смещенный центр плавучести для кубика в наклоненном состоянии, O – точка пересечения вертикальной оси симметрии кубика и линией поверхности вода (неподвижна при небольших углах наклона), $\vec{Q}$ – сила тяжести, $\vec{F}$ – архимедова сила.

При наклоне кубика, плавающего в воде, на малый угол φ центр плавучести смещается из точки A в точку A_1, оставаясь практически на той же высоте. Выталкивающая сила проходит через центр плавучести и направлена вертикально вверх, пересекая вертикальную ось симметрии кубика (в состоянии равновесия) в точке M, называемой *метацентром.* Если метацентр лежит выше центра масс, то момент сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$ возвращает кубик в прежнее положение (оно устойчиво), если лежит ниже центра масс, кубик опрокидывается (положение неустойчиво).

Пусть расстояние CM равно h. Если $h>0$ - состояние устойчиво, $h<0$ - неустойчиво. Рассмотрим случай, когда плотность кубика меньше половины плотности воды (центр масс над водой), противоположный случай полностью симметричен этому.

Момент сил $\vec{Q}$ и $\vec{F}$**,** возвращающий кубик в исходное состояние из наклоненного под малым углом φ положения, равен $M = Qh\sin\varphi$. Момент выталкивающей силы, проходящей через точку A_1, относительно точки А равен $N = Q \cdot AM \cdot \sin\varphi \approx Q(h+a)\varphi$ для малых углов φ, где a – расстояние между центром масс кубика и его центром плавучести в положении равновесия.

Если кубик наклонен вправо на угол φ, выталкивающие силы давления справа увеличатся, а слева уменьшатся, как и их составляющие вдоль оси АМ. Пусть x - расстояние (координата произвольной точки плоскости НН от оси **Y,** проходящей через точку О перпендикулярно к плоскости рисунка). Тогда увеличение давления в соответствующей точке кубика будет $\rho g x\varphi$, а момент N представится выражением $N = \rho g\varphi\int x^2 dx$, где I - *момент инерции поперечного сечения* кубика вдоль оси, проходящей через точку О перпендикулярно плоскости рисунка (подробнее смотрите в пособиях по физике).

$h = \dfrac{I}{V} - a$, где $V = \dfrac{Q}{\rho g}$ – объем жидкости, вытесненной кубиком.

Пусть длина ребра куба равна *h,* тогда $I = \dfrac{b^4}{12} + b^2 x^2$, где x - расстояние CO. Объем воды, вытесненный кубиком: $V = \left(\dfrac{b}{2} - x\right) b^2$. Расстояние от центра масс до центра плавучести в состоянии равновесия: $a = x + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{2} - x\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{2} + x\right)$

$$h = \frac{I}{V} - a = \frac{\left(3x^2/2\right) - \left(b^2/24\right)}{(b/2) - x}$$

Состояние устойчиво, если $h>0$ => $x > b/4\sqrt{3}$ (естественно, к тому же $x < b/2$).

$$\frac{\rho_K}{\rho_B} = \frac{(b/2) - x}{b} = \frac{1}{2} - \frac{x}{b} < \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{3}} \approx 0.36 \Rightarrow \rho_K < 0.36\rho_B$$

Аналогичный результат справедлив и для $\rho_K > 0.64\rho_B$, то есть кубик плавает в первом положении в случае легких (пенопласт) или утяжеленных материалов.

Математика.

1. При решении необходимо учитывать, что обезьяне приходится возвращаться за бананами, Пусть L – длина пути, v_0 – скорость обезьяны без бананов, $N=20$ – всего бананов, n – количество бананов, которое обезьяна переносит за один раз. Общее время переноски бананов: $t = \dfrac{N}{n}\dfrac{L}{v_0}\dfrac{n^2 - 2n + 17}{8} + \left(\dfrac{N}{n} - 1\right)\dfrac{L}{v_0}$, где второе слагаемое соответствует возврату обезьяны за бананами.

$$t = \frac{L}{v_0}\left(\frac{N}{n}\frac{n^2 - 2n + 25}{8} - 1\right);\quad t'(n) = \frac{L}{v_0}\frac{N}{8}\frac{n^2 - 25}{n^2} = 0$$ => n=5 бананов.

2. Раскрасим маленькие кусочки сыра черным и белым цветом так, чтобы кубики с общими гранями имели разные цвета. Поскольку количество кубиков нечетное, у нас будет 14 кубиков одного цвета (допустим, черного) и 13 кубиков другого цвета (белого), причем центральный кубик имеет белый цвет. Чтобы съесть центральный кубик последним, мышка должна до того съесть 14 черных кубиков и 13 или 14 белых, а это невозможно, поскольку белых кубиков без центрального всего 12. Следовательно, мышка не сможет съесть последним центральный кубик.

3. Выигрывает тот, кто ходит первый. Он ставит первую монету в центр стола, а последующие монеты – симметрично монетам соперника. Очевидно, что первый игрок при такой стратегии всегда может сделать ход, а его соперник – нет.

4. При решении надо было сообразить, что эта точка является центром масс.

Один из вариантов решения следующий. Проводим в шестиугольнике диагонали и находим их середины. Точка пересечения медиан полученного треугольника и будет искомой точкой (докажите самостоятельно).

5. Заметим, что 4444=7*635-1. Раскладывая $(7*635-1)^{4444}$ по биному Ньютона, мы получаем, что все слагаемые, кроме последнего (…+1), делятся на 7. Следовательно, остаток равен 1.

6. ΔABC - равнобедренный, $AB=BC$, BN – медиана, биссектриса, высота.
$\angle ABC=\alpha$ => $\angle NBC=\alpha/2$. $\angle UOV=\varphi$ – надо найти.
Пусть $ON=OH=r$; $AN=NC=x$ => $CH=x$

$$BC = NC/\sin\angle NBC = x/\sin(\alpha/2)$$

$$BH = BC - HC = (x/\sin(\alpha/2)) - x$$

$$\mathrm{tg}\angle OBH = OH/BH \Rightarrow \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x/\sin(\alpha/2) - x};\quad r = x \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{\sin(\alpha/2)} - 1\right) = x\frac{1 - \sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}$$

$$OM = MN - ON = \frac{1}{2}BN - ON = \frac{1}{2}x \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - r = x\left(\frac{\cos(\alpha/2)}{2\sin(\alpha/2)} - \frac{1 - \sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)}\right) = x\frac{(1 - \sin(\alpha/2))^2}{\sin\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2} = \mathrm{ctg}\angle MOV = \frac{MO}{MV} = 2\frac{MO}{NC} = 2\frac{(1 - \sin(\alpha/2))^2}{\sin\alpha}$$

$$\varphi = 2\mathrm{arcctg}\left(2\frac{(1 - \sin(\alpha/2))^2}{\sin\alpha}\right)$$

7. Пусть S_n= 1 +11 +... +11.. 11 (n слагаемых)

Заметим, что число из k единиц можно представить как $\alpha_k = (10^k - 1)/9$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = \frac{1}{9}\left(\sum_{k=1}^{n}10^k - \sum_{k=1}^{n}1\right) = \frac{1}{9}\left(10\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n\right) = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}$$

Для n=2000: $S_{2000} = \dfrac{10^{2001} - 18010}{81}$

8. $ABCD$ – трапеция, $AD//BC$, $AD>BC$

O – центр описанной окружности, $OA=OD=OC$ – радиусы => трапеция равнобедренная: $AB=CD$

ΔACD, AM - медиана и высота => ΔACD – равнобедренный, $AC=AD$, AM - бисектрисса $\angle MAD$. Пусть $\angle MAD=\alpha$ => $\angle CAM=\alpha$; $AO=OD$ => $\angle ODA=\angle OAD=\alpha$.

$\angle MOD=2\angle MAD=2\alpha$ (опираются на одну дугу).

$\angle OMD=\pi/2$ => $\angle ODM=\pi-(\pi/2)-2\alpha=(\pi/2)-2\alpha$;

$\angle MDA=\angle MDO+\angle ODA=(\pi/2)-2\alpha+\alpha=(\pi/2)-\alpha$;

Пусть $AD=\alpha$. Тогда: $MD=AD\cdot\sin\alpha=a\cdot\sin\alpha$; $CD=2MD=2a\cdot\sin\alpha$;

$$AH_2=AB\cdot\cos\angle BAD=CD\cdot\cos\angle CAD=2a\cdot\sin\alpha\cdot\cos\left(90^0-\alpha\right)=2a\cdot\sin^2\alpha$$

$BC=AD-2\cdot AH_2$ (поскольку трапеция равнобокая) => $BC=a-4a\cdot\sin^2\alpha$;

В трапецию можно вписать окружность => $AD+BC=AB+CD$

Радиус описанной окружности: $R=AO=\dfrac{AH_1}{\cos\alpha}=\dfrac{a}{2\cos\alpha}$

Радиус вписанной окружности: $r=BH_2/2=AB\sin\angle BAD/2=a\cdot\sin\alpha\cos\alpha$

Отношение площадей описанной и вписанной окружностей:

$$\frac{S_R}{S_r}=\left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{1}{4\sin^2\alpha\cos^4\alpha}=\frac{2}{3\left(2-\sqrt{3}\right)}\approx 2.488$$

9. Рассмотрим геометрическую прогрессию: $x, x^2, x^3, \ldots$

Очевидно, что $x+x^2+x^3+\ldots+x^n=x\dfrac{x^n-1}{x-1}=\dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$, где n=2000

Продифференцируем обе части равенства: $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n-1)x^n+1}{(x-1)^2}$

По условию $2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=(n-1)x^n$, n=2000 => $1+(n-1)x^n=\dfrac{nx^{n+1}-(n-1)x^n+1}{(x-1)^2}$

Так как x=1 не является решением, умножаем обе части уравнения на $(x-1)^2$, раскрываем скобки, и переносим в одну часть все слагаемые, в которых есть n: $x^n\left[(n-1)x^2-(3n-2)x+2n\right]=1-(x-1)^2$

Так как n=2000>>1, левая часть уравнения меняется очень резко, поэтому решение существует, когда обе части уравнения равны 0.

$x^n=0$ => x=0 является решением.

$(n-1)x^2-(3n-2)x-2n=0$ => x=2 или $x=n/(n-1)$

Легко видеть, что x=2 так же является решением.

10. Введем систему координат, как показано на рисунке. Точка $O(0,0)$ – центр шестиугольника и квадрата. Сторона правильного шестиугольника равна a.

Пусть вершины A и B отстоят от вершин шестиугольника на расстояние x и y соответственно (для определенности $x<a/2$, $y<a/2$). $A\left(x-\dfrac{a}{2};a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(a-\dfrac{y}{2};y\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ – координаты вершин квадрата.

Такие же координаты будут иметь и вектора $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$.

Диагонали квадрата равны => $OA=OB$ => $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^2}{4}=\left(a-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}$ => $x(a-x)=y(a-y)$. Так как $x<a$, то $x=y$ (при $x=a-y$ решений нет) – единственное решение.

Диагонали квадрата перпендикулярны => $\left(\vec{OA},\vec{OB}\right)=0$

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(a-\frac{x}{2}\right)+a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot x\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Rightarrow x^2-4ax+a^2=0 \Rightarrow x=a\left(2-\sqrt{3}\right)$$

$AD//E_1E_6$ => ΔAFE_1 - равносторонний => $AD=a+x=a\left(3-\sqrt{3}\right)$