Уважаемый старшеклассник!

*Вашему вниманию предлагается Заочная физико-математическая олимпиада, которая традиционно проводится **Ф**акультетом **М**олекулярной и **Б**иологической **Ф**изики **МФТИ**. Задачи, приведенные ниже, представляют собой удивительный сплав необычности повседневных жизненных ситуаций и необходимости творческого подхода к ним. Если Вы решаете такие задачи, Вы приобщаетесь к тому прекрасному и благородному, что движет физтехами уже многие годы. Если Вы можете решить такие задачи, Ваше место среди нас.*

Еще одной целью олимпиады является предоставление возможности попробовать свои силы в самостоятельном осмысленном использовании дополнительных источников знаний. Такие навыки необходимы настоящему исследователю, независимо от того, в какой области он применяет свой интеллект.

Всем участникам олимпиады будут высланы подробные решения задач, проспекты факультета и института, дипломы участника олимпиады.

Если Вы не смогли решить какую-либо задачу, не огорчайтесь – ведь правильное решение даже половины столь нетривиальных задач дает повод гордиться своими знаниями, а так же шанс получить почетный диплом Победителя олимпиады, что будет учитываться при поступлении на наш факультет.

Решения задач следует присылать в тонкой тетради простой бандеролью по адресу:

141700, Московская обл., г. Долгопрудный,
Институтский пер., 9, МФТИ,
Деканат ФМБФ, Олимпиада ФМБФ-2004

*Последний срок отправки решения – 15 февраля 2004 года. На титульном листе и на отдельном листочке разборчиво укажите свою фамилию, имя, отчество, почтовый адрес, место учебы, класс, номер в ЗФТШ, нарисуйте табличку для проставления баллов за задачи. Так же просим прислать большой конверт формата А4 с обратным адресом и вложенными в конверт маркам*и.

В электронном виде олимпиада доступна на сайте ФМБФ http://bio.fizteh.ru

Если Вы желаете, чтобы в олимпиадах следующих лет участвовали Ваши авторские задачи, присылайте их почтой или в архивах на bio@pop3.mipt.ru

Желаем успеха!

Оргкомитет олимпиады

***Задачи предлагали**: Дорофеенко Александр, Лавриненко Екатерина, Лазаревич Алексей, Лоскутников Михаил, Михеева Анна, Попов Петр, Сиденко Сергей, Яворский Владислав. Часть задач взята из сборников и олимпиадного фольклора Физтеха (понравились очень).*

***Дизайн и организация олимпиады** – Яворский Владислав*

Московский физико-технический институт

Факультет Молекулярной и Биологической Физики

ТРАДИЦИОННАЯ ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

Долгопрудный – 2003

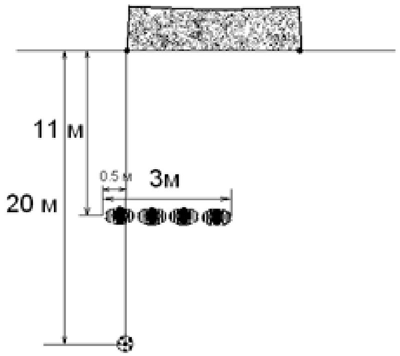
Физика

1. На дне герметически закрытого бака высотой 4 м, полностью заполненного водой, оказались три одинаковых пузырька воздуха. При этом давление на дно емкости составляет 0,2 МПа. Как изменится это давление, если всплывет один пузырек? А если два?

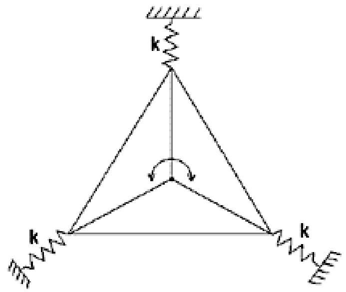
2. Тонкий цилиндрический стержень длины L и плотности $\rho < \rho_{\text{воды}}$ падает вертикально торцом вниз на поверхность воды, налитой в глубокий сосуд. В момент касания скорость стержня v_0. Через какое время после касания скорость стержня обратится в нуль? При каком ρ произойдет полное погружение?

3. В сосуд, имеющий форму параллелепипеда, налита вода до высоты H. Масса сосуда равна M, масса воды равна m. Сосуд может двигаться по столу без трения. Небольшим толчком его приводят в движение так, что он движется параллельно стороне основания с длиной l. Найти период колебаний, считая, что при отклонении от равновесия поверхность воды плоская. Вязкое трение в воде не учитывать.

4. В одном из матчей Серии «А» между «Миланом» и одним из его главных соперников – командой из Турина, Андрею Шевченко представилась возможность пробить штрафной удар. Ситуацию на поле можно увидеть из рисунка (масштаб не соблюден). Стартовая скорость мяча 90 км/ч и за время, оставшееся до празднования гола, существенно не изменилась. Оценить угловую скорость вращения мяча вокруг вертикальной оси, если Шевченко «обвел» «стенку» слева, и мяч влетел под самую штангу.



5. Правильный однородный тетраэдр, имеющий массу m и длину ребра a, может совершать крутильные колебания вокруг оси, проходящей через одну из вершин и центр масс. К трем другим вершинам прикреплены одинаковые пружины жесткостью k, которые лежат в плоскости, перпендикулярной оси, как показано на рисунке. Найти период малых колебаний тетраэдра вокруг этой оси.



6. Нетрезвый студент пытается дойти от клуба до общежития, которые находятся на одной улице на расстоянии L=500 м, пользуясь для поддержки равновесия столбами, расстояние между которыми l=25 м. Поскольку студент навеселе, направление его движения от каждого столба к соседним может с равной вероятностью как совпадать с направлением к общежитию, так и вести в противоположном направлении. Оценить наиболее вероятное время, за которое реализуется такая флуктуация, что студент может дойти до общежития, если скорость его передвижения между столбами v=5 км/ч.

7. Шарик массы m висит вертикально на пружине жесткостью k и имеет заряд Q. На расстоянии d от центра шарика горизонтально расположена тонкая металлическая незаряженная пластина большой площади. Найти период малых вертикальных колебаний шарика на пружине.

8. Из металлической проволоки изготовлена модель земного шара радиусом 1 м так, что проволоки изображают параллели (0, 20, 40, 60 и 80 градусов северной и южной широты) и меридианы (30, 60, 90, 120, … , 360 градусов). Найти сопротивление модели земного шара между полюсами, если π метров проволоки имеют сопротивление R.

9. Найти наименьшее расстояние между предметом и его изображением в собирающей линзе, если ее фокусное расстояние равно f.

10. Непрозрачная пластиковая канистра формы параллелепипеда и известной массы содержит некоторое количество воды, заметно меньшее вместимости канистры. Предложите и теоретически опишите способ как, имея только измерительную рулетку, карандаш, тонкую нитку и лист тонкой бумаги формата А4 (на какой вы смотрите), узнать массу воду в канистре, если открывать ее нельзя.

Математика

1. Докажите, что для любых неотрицательных чисел x, y, z выполняется неравенство: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$.

2. В треугольнике ABC с длинами сторон a, b, c из вершины A проведены медиана AM и биссектриса AL. На отрезке BC выбрали точку S так, что прямая AL является биссектрисой угла MAS. Найдите отношение отрезков BS и CS.

3. Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) описана окружность. На дуге AB, не содержащей точку C, выбирается произвольно точка X. Пусть Y — проекция точки A на прямую CX. Докажите, что $CY = YX + XB$.

4. Найдите 2004-ю цифру после запятой в десятичной записи числа $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2004}$.

5. Решите неравенство: $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

6. Могут ли числа 7, 8 и 9 быть членами одной геометрической прогрессии (необязательно последовательными)?

7. Прямая пересекает замкнутую ломаную в 2003 точках. Докажите, существует такая прямая, которая пересекает эту ломаную не менее, чем в 2004 точках.

8. Есть 2004 натуральных числа. Докажите, что из них можно сделать выборку чисел такую, что их сумма будет делиться на 2004.

9. Оказалось, что в последовательности $a_n = A + B \cdot 2^n + Cn \cdot 2^{n+2004}$, где A, B, C — целые числа, первые три числа нацело делятся на 13. Докажите, что любой член последовательности также нацело делится на 13.

10. Докажите, что если два многочлена третьей степени с целыми коэффициентами имеют общий иррациональный корень, то они имеют еще один общий корень.