Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет Молекулярной и Биологической Физики

Решение задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ
2010-2011 года

Москва – 2011

Задачи по физике

1. Считаем, что в тот момент, когда монета выпала, она имеет такой же вектор скорости, что и мальчик. Поскольку карусель большая, размерами мальчика можно пренебречь.

На мальчика действуют центробежная сила, сила тяжести и сила натяжения веревки, сумма которых в равновесии равна 0.

$$tg\beta = \frac{\frac{mv^2}{R}}{mg} = \frac{v^2}{Rg},$$

где R – расстояние от мальчика до оси вращения карусели: $R = b + l\sin\beta$. Отсюда находим скорость движения мальчика по окружности:

$$v^2 = Rg\mathrm{tg}\beta = \left(b + L\sin\beta\right)g\mathrm{tg}\beta$$

Монета имеет вектор начальной скорости, перпендикулярный радиусу вращения мальчика R и параллельный поверхности земли. Время падения тела с высоты h:

$$h = \frac{gt^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2\left(a - L\cos\beta\right)}{g}}$$

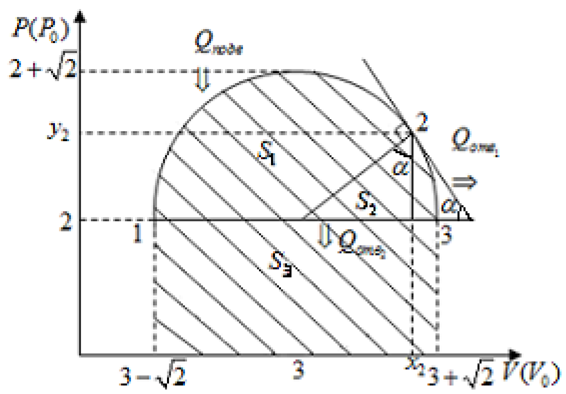
Расстояние по горизонтали, которое пролетела монета:

$$l = vt = \sqrt{\left(b + L\sin\beta\right)g\mathrm{tg}\beta}\sqrt{\frac{2\left(a - L\cos\beta\right)}{g}} = \sqrt{2\left(b + L\sin\beta\right)\left(a - L\cos\beta\right)\mathrm{tg}\beta}$$

Расстояние от оси:

$$x = \sqrt{l^2 + R^2} = \sqrt{\left(b + L\sin\beta\right)^2 + 2\left(b + L\sin\beta\right)\left(a - L\cos\beta\right)\mathrm{tg}\beta}$$

2. $\eta = \dfrac{A_{пол}}{Q_{подв}}$; Работу можно вычислить как площадь под графиком всего цикла (ограниченная им). Чтобы найти подведенное тепло, необходимо выяснить на каком участке оно подводится.



На участке (1-2) тепло подводится, на участках (2-3) и (3-1) отводится. Необходимо найти координаты x_2 и y_2 точки (2) $\Delta Q = 0$.

Уравнение окружности $(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{2})^2 \;\Rightarrow\; (x_2-3)^2 + (y_2-2)^2 = 2$, радиус окружности равен $\sqrt{2}$.

$PV = RT$, возьмем малые приращения.

$\Delta PV + P\Delta V = R\Delta T$

$\Delta Q = P\Delta V + \Delta U = P\Delta V + \dfrac{i}{2}R\Delta T$; $i = 6$

$\Delta Q = P\Delta V + 3(\Delta PV + P\Delta V) = 0$

$P\Delta V + 3P\Delta V = -3V\Delta P$

$\dfrac{\Delta P(P_0)}{\Delta V(P_0)} = -tg\alpha$, α - угол наклона касательной

$tg\alpha = \dfrac{x_2 - 3}{y_2 - 2}$, для точки (2)

$\dfrac{4P}{V} = -3\dfrac{\Delta P}{\Delta V}$

$\dfrac{4y_2}{x_2} = 3\dfrac{x_2 - 3}{y_2 - 2}$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (x_2 - 3)^2 + (y_2 - 2)^2 = 2 \\ \dfrac{4y_2}{3x_2} = \dfrac{x_2 - 3}{y_2 - 2} \end{cases}$$

Выразив одну переменную через другую и подставив, получаем:

$49y_2^4 - 280y_2^3 + 565y_2^2 - 564y_2 + 198 = 0$

Попробуем найти корень, проверяя делители свободного члена:

$y_2 = 3$ подходит, следовательно $x_2 = 4$

Данная точка удовлетворяет системе и лежит на необходимой части окружности. Оказывается, что данная точка делит четверть окружности пополам.

$A_{пол} = \dfrac{P_0V_0\pi(\sqrt{2})^2}{2} = P_0V_0\pi$; A_{12} - площадь под графиком.

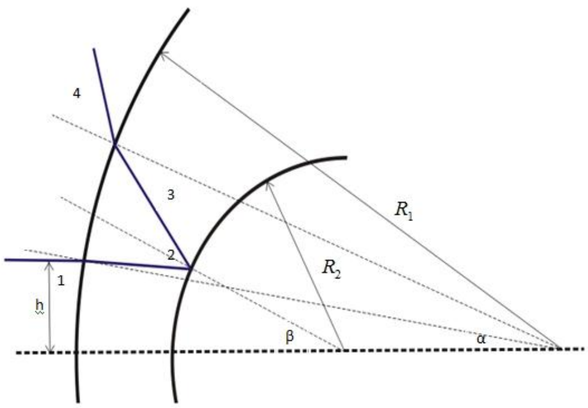
$Q_{подв} = A_{12} + \Delta U_{12} = P_0V_0((S_1 + S_2 + S_3) + 3x_2y_2 - 3(x_1y_1))$

$S_1 = 3\dfrac{\pi(\sqrt{2})^2}{8}$; $S_2 = \dfrac{(x_2 - 3)(y_2 - 2)}{2}$; $S_3 = y_1(x_2 - (3 - \sqrt{2})) = 2 + 2\sqrt{2}$

$$\eta = \frac{\pi}{\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{1}{2} + 2 + 2\sqrt{2} + 3\cdot 12 - 3\cdot 2(3 - \sqrt{2})} \approx 0,09$$

Ответ: $\eta \approx 0,09$.

3. Очки считаем тонкой линзой. Лампа – сильно удаленный источник света. Одно изображение формируется при отражении от передней поверхности линзы, второе – от задней.



I. Очки повернуты к профессору внешней стороной. Первое изображение в фокусе выпуклого зеркала. Расстояние до него от линзы:

$$f_1 = \frac{R_1}{2}$$

Второе изображение.
Решение понятно из рисунка. В таблице указаны углы наклона к горизонту пронумерованных лучей. Здесь $\alpha = \frac{h}{R_1}$, $\beta = \frac{h}{R_2}$.

Луч	Угол наклона к горизонту
1	0
2	$\alpha - \alpha / n$
3	$2\beta - (\alpha - \alpha / n)$
4	$\theta = 2n(\beta - \alpha) + 2\alpha$

Расстояние до второго изображения: $f_2 = \frac{h}{\theta} = \frac{1}{2n(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) + \frac{2}{R_1}}$.

Отношение размеров $x = \frac{f_1}{f_2} = n(\frac{R_1}{R_2} - 1) + 1 = 2,5$

$n = 1,5$, отсюда $\frac{R_1}{R_2} = 2$

II. Очки повернуты к профессору внутренней стороной. Заменяем R_1 на $-R_2$, R_2 на $-R_1$.

Тогда новое отношение размеров равно 4 .
Ответ: 4 раза.

4. Искомая система зарядов: равномерно заряженный шар с центром в т. О и электрон на некотором расстоянии от этой точки.

Напряженность электрического поля, как и сила, в этом случае пропорциональна расстоянию до центра. То есть уравнение движения электрона: $m\ddot{x} + ekx = 0$, где k – постоянный коэффициент.

Решение: $x = A\sin\omega t + B\cos\omega t$.

Изначально электрон покоится => A = 0. Отсюда $x = x_0 \cos\omega t$, где x_0 – начальное расстояние от электрона до О. Электрон попадет в т. О через $t = \frac{\pi}{2\omega}$, что не зависит от исходного расстояния.

5. При прохождении светового луча через границу воздух-стекло-вода угол падения α и угол преломления β оказываются связанными соотношением $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$.

Действительно, если n' - коэффициент преломления стекла, а γ - угол преломления на границе воздух-стекло, то $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n'$ и $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{n}{n'}$ (рис. 1), откуда следует $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$.

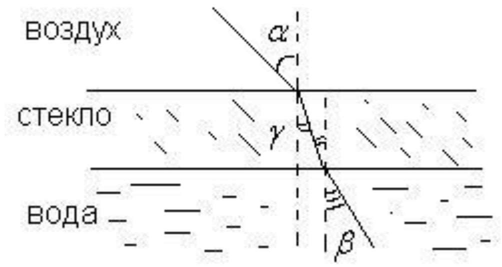


Рис. 1

Значит границу воздух-стекло-вода можно рассматривать как границу воздух-вода (при малой толщине стекла). Найдем область аквариума, которую кот видит через правую стенку:

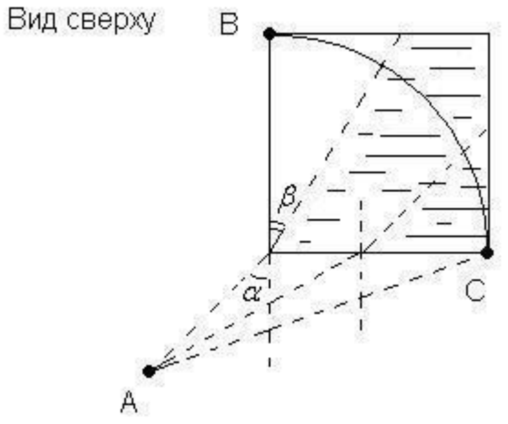


Рис. 2

Для $\alpha = 45°$ получаем $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8} \approx 0,53$. Заметим, что чем больше угол падения, тем больше угол преломления. Значит, через правую стенку аквариума кот видит всю заштрихованную область (рис. 2). Аналогичные рассуждения можно провести для левой стенки аквариума. Изобразим (штриховкой) область аквариума, которую кот видит как через правую, так и через левую стенки (рис. 3):

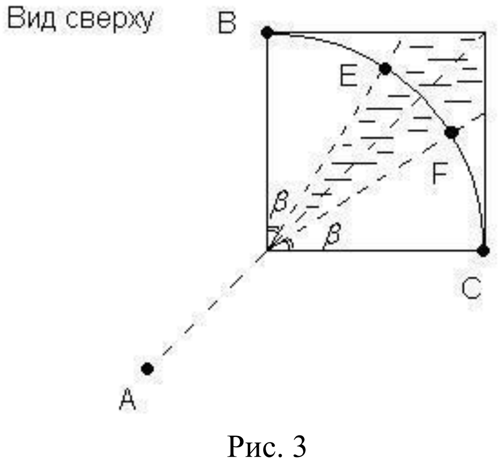
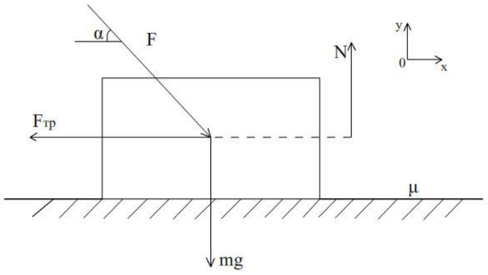


Рис. 3

Два изображения рыбки кот будет наблюдать, когда та находится на дуге EF. Длина дуги EF равна $\frac{\pi}{2} - 2\beta \approx 1,57 - 2\arcsin 0,53 \approx 0,45$ м. и рыбка ее проплывет за время $t \approx \dfrac{0,45\text{м}}{0,10\frac{\text{м}}{c}} = 4,5c$

6. Представим ступню лягушки в виде бруска, на который под некоторым углом действует сила F.



$$\begin{cases} oy: N - mg - F\sin\alpha = 0 \\ ox: F\cos\alpha = \mu N \end{cases}$$

$$F\cos\alpha = \mu mg + \mu F\sin\alpha$$

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

Как известно, при отсутствии проскальзывания максимальная дальность прыжка достигается при 45^0. Если $\mu \geq \frac{1}{tg 45^0} = 1$, то при любом значении силы лапка лягушки проскальзывать не будет, и максимальная длина прыжка будет при 45^0.

При $\mu < 1$ возникает ограничение на возможную силу при прыжке под 45^0:

$$F_c \leq \frac{\mu mg}{\cos 45^0 - \mu\sin 45^0} = \frac{\mu mg\sqrt{2}}{1-\mu}$$

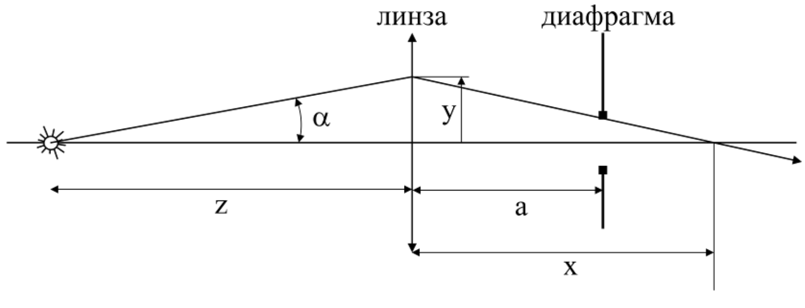
Если максимальная сила, с которой отталкиваются лапки лягушки, меньше F_c, то оптимальный угол равен 45^0. Если максимальная сила больше F_c (при малых μ), а начальная скорость прыжка пропорциональна силе, необходимо прыгать под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{\mu}$, при котором не будет проскальзывания:

$$L = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g} \sim \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{y(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)},$$

где y – некоторая монотонно возрастающая зависимость скорости от силы.

Легко проверить, что данная функция является возрастающей в области $\left(0; \mathrm{arctg}\frac{1}{\mu}\right)$.

7. Световой поток, проходящий через систему, пропорционален телесному углу, в пределах которого лучи проходят через диафрагму.



Следовательно, максимальный угол α, под которым лучи могут пройти через систему, должен быть постоянен. Это условие эквивалентно постоянству отношения z/y, которое и будем анализировать. Формула линзы даёт:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f},$$

откуда

$$x = \frac{fz}{z-f}.$$

Наиболее высокий луч, который может пройти через систему, определяется соотношением подобия:

$$\frac{r}{x-a}=\frac{y}{x}.$$

Отсюда

$$\frac{z}{y}=\frac{(x-a)z}{xr}=\frac{(f-a)z+fa}{fr}.$$

При $a=f$

$$\frac{z}{y}=\frac{f}{r}$$

не зависит от z, что и является условием постоянства светового потока. Такая схема с диафрагмой в фокальной плоскости называется телецентрической и используется в фотометрии. Максимальное удаление $z_{\max}$, в пределах которого световой поток за диафрагмой остаётся постоянным, определяется очевидным условием, чтобы наиболее высокий луч, проходящий через диафрагму, попадал в пределы входного отверстия линзы:

$$\frac{z_{\max}}{R}=\frac{f}{r},$$

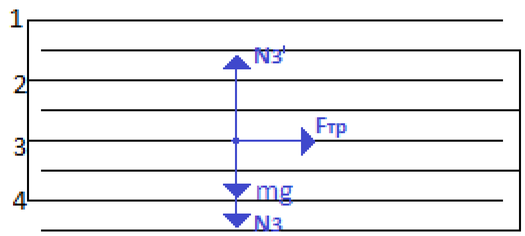
откуда

$$z_{\max}=R\frac{f}{r}.$$

8. $N_i=2(i-1)mg$

$N_i'=(2i-1)mg$

где m – масса той части станицы, которая лежит в двойном слое.



$$F_{mpi}=(N_i+N_i')\mu$$

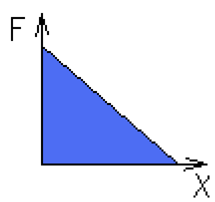
$$F=\sum_{i=1}^{n}F_{\text{тр}i}=\sum_{i=1}^{n}(4i-3)mg\mu=mg\mu\left(4\frac{n(n+1)}{2}-3n\right)=M(x)g\mu(2n-1)$$

где $M(x)$ - масса той части книги, которая лежит в двойном слое страниц, x - длинна этого двойного слоя.

$$M(x)=Mx/l$$

$$F=Mxg\mu(2n-1)/l$$

как видно $F\sim x$



Работа равна площади под графиком $F(x)$:

$$A=Mg\mu l(n-0{,}5)$$

$$A=11{,}7\ \text{Дж}$$

9. Теплый воздух прогревает материал на небольшую глубину, так что вокруг ступни образуется теплая среда, поэтому не происходит сжатия кровеносных сосудов и нога продолжает отдавать тепло, постепенно прогревая весь ботинок. Напротив, при соприкосновении с холодной поверхностью происходит резкое сжатие сосудов, и нога начинает замерзать. Таким образом, даже малое воздействие приходит к качественно различным конечным состояниям (т.н. триггерный эффект).

10. Собираем батарейку из лимона (можно использовать другие фрукты или овощи). Для этого втыкаем в лимон две пластинки – медную и цинковую. Из провода сворачиваем катушку и подсоединяем ее к гальваническому элементу. В катушку вставляем железный гвоздь.

В гальваническом элементе протекает реакция:

$$Zn + 2H^+ \rightarrow 2Zn^{2+} + H_2$$

Таким образом, во внешней цепи (т.е. через катушку) ток течет от медной пластинки к цинковой. Далее по правилу левой руки определяем полюсы нашего электромагнита. И можем пользоваться собранным устройством как компасом.

Чем больше площадь пластин, тем больше сила тока, если подключить последовательно несколько элементарных батареек (медь-лимон-цинк), то мы сможем увеличить общее ЭДС. Гвоздь исполняет роль сердечника и увеличивает силу электромагнита в несколько тысяч раз.

Всю конструкцию (или только намагниченный гвоздь) кладем на деревянный брусок и опускаем собранную «лодочку» в воду.

Рис. Готовая установка по определению магнитного полюса Земли.
Фотография из работы Василисы Смирновой, г. Москва

Задачи по математике

1. $x(17x–35)=(y–1)(y+1)$
Если x – простое число, то или $y–1$ делится на x, или $y+1$ делится на x. Рассмотрим эти 2 случая.
1) Пусть $y – 1 = kx$, тогда $y + 1 = kx + 2$.
$17x-35=k\left(kx+2\right)=k^2x+2k$

$x=\dfrac{2k+35}{17-k^2}$

Поскольку x – простое, т.е. положительное целое число, то $17-k^2\geq 1$. Отсюда $k\leq 4$.
Перебирая целые значения k от 1 до 4, находим две пары решений $\left(x;y\right)$ в простых числах: (3; 7) и (43; 173).
2) Пусть $y + 1 = kx$, тогда $y – 1 = kx – 2$.
$17x-35=k\left(kx-2\right)=k^2x-2k$

$x=\dfrac{2k-35}{k^2-17}$

Поскольку x – простое, т.е. положительное целое число, то $x\geq 1$.

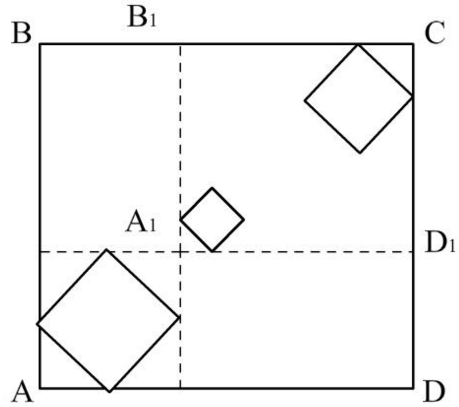
$\dfrac{2k-35}{k^2-17}\geq 1$

$\dfrac{k^2-2k+18}{k^2-17}\leq 0$

Числитель всегда положителен, знаменатель: $k^2-17\leq 0$. Отсюда $k\leq 4$.
Перебирая целые значения k от 1 до 4, находим, что решений $\left(x;y\right)$ в простых числах нет.
Ответ: (3; 7), (43; 173)

2. Расположим все отрезки в порядке возрастания длины $a_1<a_2<...<a_n$.
Пусть $\left\{a_{l_1},a_{l_2},a_{l_3},a_{l_4},a_{l_5}\right\}$ $(l_i<l_{i+1})$ - единственная пятерка, из которой нельзя составить 5-угольник, тогда $a_n\geq a_{l_5}>a_{l_1}+a_{l_2}+a_{l_3}+a_{l_4}\geq a_1+a_2+a_3+a_4$.
Откуда заключаем, что это должна быть пятерка $\left\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_n\right\}$. Покажем, что $n_{\max}=6$.
Если $n=6$, то условию задачи удовлетворяет следующий набор: $\left\{1,2,4,7,12,15\right\}$.
Пусть $n\geq 7$, тогда, по условию, $a_1+a_2+a_3+a_5>a_n>a_1+a_2+a_3+a_4>a_6$. (*)
Заметим, что $a_4>a_1+a_2$ (иначе, в силу $a_1+a_2\geq a_4>a_3$, найдется два треугольника). Аналогично $a_6>a_3+a_5$. Но тогда, складывая эти неравенства и используя (*), имеем $a_6+a_4>a_1+a_2+a_3+a_5>a_n$, откуда снова получаем два треугольника: $a_6+a_4>a_n$, $a_6+a_5>a_n$.
Это означает, что $n\leq 6$.

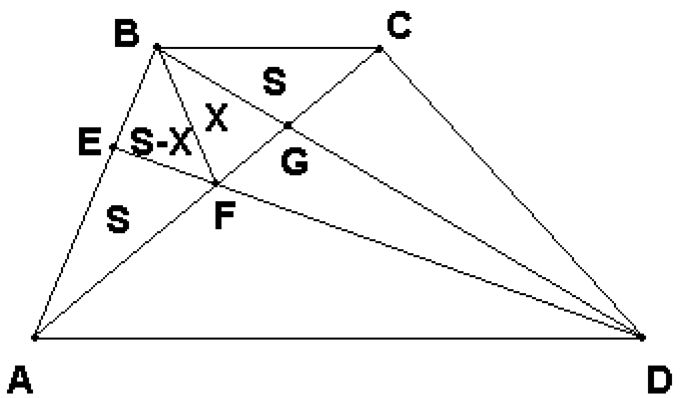
3. Пусть квадраты расположены таким образом, что условие задачи выполнено. Предположим, что стороны внутреннего квадрата не параллельны диагоналям внешнего. Тогда, если внутренний квадрат развернуть в указанное положение, то условие задачи будет по-прежнему выполнено, но теперь можно уменьшить его размер. Следовательно, при условии, что их суммарная площадь минимальна, в таком расположении должны находиться все внутренние квадраты. Из условия следует, что меньшие квадраты должны касаться сторон большего, но тогда хотя бы один квадрат должен касаться одновременно двух сторон и пусть, для



определенности, это AB и AD. Внутри квадрата $A_1B_1CD_1$ каждый меньший квадрат касается одновременно двух сторон. Из симметрии можно положить, что один касается сторон A_1B_1 и A_1D_1, а другой CB_1 и CD_1. Пусть диагонали квадратов равны x, y, z, тогда их суммарная площадь $S=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq\frac{1}{6}(x+y+z)^2=\frac{1}{6}$. (минимум достигается, когда все квадраты одинаковы).

4. Заметим, что $\frac{AG}{GC}=\frac{S_{ABG}}{S_{BCG}}=\frac{2S}{S}=2$. Из подобия треугольников BCG и DAG следует, что $\frac{GD}{BG}=\frac{AG}{GC}=2$. Поэтому $S_{GCD}=\frac{GD}{BG}S_{BCG}=2S$ и $S_{AGD}=\frac{GD}{BG}S_{ABG}=4S$.

Осталось найти S_{FGD} и S_{AFD}. Пусть $S_{BGF}=X$. Тогда $S_{EBF}=S-X$, $S_{FGD}=\frac{GD}{BG}S_{BGF}=2X$, $S_{AFD}=4S-2X$. Выразим отношение $\frac{EF}{FD}$ двумя способами. С одной стороны, $\frac{EF}{FD}=\frac{S_{EBF}}{S_{FBD}}=\frac{S-X}{3X}$, а с другой - $\frac{EF}{FD}=\frac{S_{AEF}}{S_{AFD}}=\frac{S}{4S-2X}$. Приравнивая, получим $(S-X)(4S-2X)=3SX$ или $2X^2-9SX+4S^2=0$. Корни этого квадратного уравнения равны $\frac{S}{2}$ и $4S$. Так как $X<S$, то $X=\frac{S}{2}$. Значит, $S_{FGD}=2X=S$ и $S_{AFD}=4S-2X=3S$.



5. Пусть $a\geq b\geq c$. Перепишем неравенство в виде $a^2-2(b+c)a+b^2+c^2-2bc\geq 0$.
Корнями квадратного уравнения $a^2-2(b+c)a+b^2+c^2-2bc=0$ являются числа $a_{1,2}=b+c\pm\sqrt{(b+c)^2-b^2-c^2+2bc}=b+c\pm 2\sqrt{bc}=\left(\sqrt{b}\pm\sqrt{c}\right)^2$. Следовательно, либо $a\leq\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2$, либо $a\geq\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2$. Поскольку $\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2<\left(\sqrt{b}\right)^2=b$, то $a\geq\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\geq\left(2\sqrt{c}\right)^2=4c$ и $x=\frac{a}{c}\geq 4$. Значение $x=4$ достигается, например, при $a=4$, $b=1$, $c=1$

6. Да, можно – если четырехугольник невыпуклый.

7. Докажем от противного. Допустим, что количество таких простых чисел ограничено, в частности, меньше 2011. Тогда любое значение многочлена представимо в виде произведения 2010 различных простых чисел в некоторых степенях:

$$f(x)=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_{2009}^{n_{2009}}\cdot p_{2010}^{n_{2010}},$$

где p_1, p_2, ..., p_{2010} – различные простые числа, не зависящие от x; n_1, n_2, ..., n_{2010} – целые неотрицательные числа (могут быть нулями).

Пусть $f(x) = a_{2011}\cdot x^{2011} + a_{2010}\cdot x^{2010} + \ldots + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + c$.

Возможны два случая.

1) $c = 0$. Тогда $f(x)=a_{2011}\cdot x^{2011}+a_{2010}\cdot x^{2010}+\ldots+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x=x(a_{2011}\cdot x^{2010}+a_{2010}\cdot x^{2009}+\ldots+a_2\cdot x+a_1)$.

Многочлен может делиться на любое простое число, достаточно взять число x, равное этому числу.

2) $c \neq 0$.

Будем рассматривать только те x, которые а) делятся на c б) больше максимального корня многочлена, так что $f(x)\neq 0$.

Если $c>1$, возьмем $x = y\cdot c$.

$$a_{2011}\cdot c^{2011}\cdot y^{2011}+a_{2010}\cdot c^{2010}\cdot y^{2010}+\ldots+a_1\cdot c\cdot y+c=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_{2009}^{n_{2009}}\cdot p_{2010}^{n_{2010}}$$

Вынесем c за скобку:

$$c\left(a_{2011}\cdot c^{2010}\cdot y^{2011}+a_{2010}\cdot c^{2009}\cdot y^{2010}+\ldots+a_1\cdot c\cdot y+1\right)=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_{2009}^{n_{2009}}\cdot p_{2010}^{n_{2010}}$$

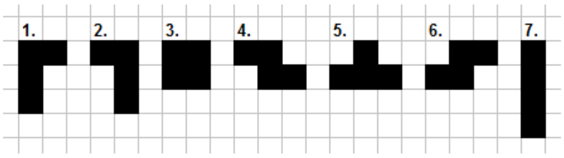
Так как значение выражения, стоящего в скобках, всегда целое число, правая часть равенства должна делиться на c.

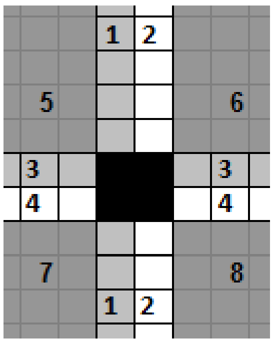
При делении на c справа останется такое же произведение простых чисел, только показатели степеней изменятся.

$$a_{2011}\cdot c^{2010}\cdot y^{2011}+a_{2010}\cdot c^{2009}\cdot y^{2010}+\ldots+a_1\cdot c\cdot y+1=p_1^{n'_1}\cdot p_2^{n'_2}\cdot\ldots\cdot p_{2009}^{n'_{2009}}\cdot p_{2010}^{n'_{2010}}$$

Возьмём $y = p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2009}\cdot p_{2010}$. Тогда левая часть равенства не будет делиться на все p_i. Так как правая часть делится на все p_i, получаем противоречие.

8. Напомним фигуры:





Первым ходом Петя ставит на доску фигуру №3. Рассмотрим линии №1 и №3. Предположим, что после хода Васи обе они содержат синие клетки. Тогда из связанности фигур 1-7 следует, что часть синей фигуры, которую поставил Вася, лежит в одной из областей 5-8, т.е. существует хотя бы одна синяя клетка, не принадлежащая линиям 1-4. А так как синих клеток в фигуре всего 4, то найдется линия, на которой не будет синих клеток, а будут только две красные. Вторым ходом Петя приставит к своим двум красным клеткам фигуру №7 так, что в линии окажется шесть красных клеток подряд и больше ничего. Вася одним ходом не сможет заблокировать оба конца этой линии, т.к. для этого необходима фигура не менее чем из 10 клеток, тогда Петя третьим ходом к свободному концу своей линии приставит фигуру №7 и выиграет.

9. Пусть A – исходная точка, AC – перпендикуляр к другой стороне угла, B – вершина угла величины α. Тогда $AB = r$, $AC = r \sin\alpha$, $BC = r \cos\alpha$. Пусть CD – перпендикуляр к другой стороне угла из точки C. Из подобия треугольников ABC и ACD:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{CD}{r\sin\alpha} = \frac{r\cos\alpha}{r} = \cos\alpha$$

$$CD = r\sin\alpha\cos\alpha$$

Получаем бесконечную геометрическую прогрессию, где первый член равен $AC = r\sin\alpha$, множитель прогрессии – $\cos\alpha$. Сумма прогрессии: $S = r \sin\alpha /(1 - \cos\alpha)$

10. Представим исходный многочлен в виде: $p(x) = 2010 + (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)q(x)$

Пусть в некоторой целочисленной точке a он обращается в ноль, тогда: $-2010 = (a - x_1)(a - x_2)...(a - x_n)q(a)$, скобки вида $(a - x_i)$ являются различными целыми числами для разных i. Но число 2010 имеет всего 10 различных делителей: ±1, ±2, ±3, ±5, ±67, а значит, не может иметь более 5 различных делителей, стоящих в правой части. Отсюда n >5.