Уважаемый старшеклассник!

*Вашему вниманию предлагается Заочная физико-математическая олимпиада, которая проводится **Ф**акультетом **М**олекулярной и **Б**иологической **Ф**изики **МФТИ**. Задачи, приведенные ниже, представляют собой удивительный сплав необычности повседневных жизненных ситуаций и необходимости творческого подхода к ним. Если Вы решаете такие задачи, Вы приобщаетесь к тому прекрасному и благородному, что движет физтехами уже многие годы. Если Вы можете решить такие задачи, Ваше место среди нас.*

Еще одной целью олимпиады является предоставление возможности попробовать свои силы в самостоятельном осмысленном использовании дополнительных источников знаний. Такие навыки необходимы настоящему исследователю, независимо от того, в какой области он применяет свой интеллект.

Всем участникам олимпиады будут высланы подробные решения задач, информация о факультете, дипломы участника олимпиады.

Если Вы не смогли решить какую-либо задачу, не огорчайтесь – ведь правильное решение даже части столь нетривиальных задач дает повод гордиться своими знаниями, а так же шанс получить почетный диплом Победителя олимпиады, что будет учитываться при поступлении на наш факультет.

Решения задач просьба присылать в тонкой тетради простой бандеролью по адресу (последнюю строку напишите на конверте буквами побольше):

141700, Московская обл., г. Долгопрудный,
Институтский пер., 9, МФТИ,
Деканат ФМБФ, Олимпиада ФМБФ-2007

Последний срок отправки решения – 15 февраля 2007 года. На титульном листе и на отдельном листочке печатными буквами укажите свою фамилию, имя, отчество, почтовый адрес, место учебы, класс, номер в ЗФТШ, нарисуйте табличку для проставления баллов за задачи. Так же просим прислать большой конверт формата А4 с обратным адресом и вложенными в конверт марками.

Решения задач можно присылать в электронном виде в архивах rar или zip на адрес bioeditor@mail.ru (*тема письма – «Олимпиада ФМБФ-2007», объем не более 1 Мб, в письме и на первом листе документа – полная информация об участнике).*

Вопросы по условиям задач можно задать на сайте ФМБФ http://bio.fizteh.ru

Желаем успеха!

Оргкомитет олимпиады

Задачи предлагали: *Бут Алексей, Голентус Илья, Горшков Иван, Денисенко Елизавета, Литвинов Игорь, Петрущенко Дмитрий, Садофьев Андрей, Сквирский Михаил, Труханов Никита, Шава Александр, Филиппов Сергей, Яворский Владислав*. Часть задач взята из сборников и олимпиадного фольклора Физтеха (понравились очень).

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Факультет Молекулярной и Биологической Физики

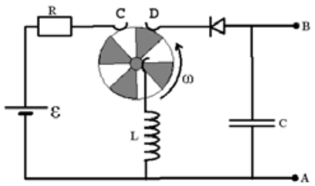
9-я

ЗАОЧНАЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ФМБФ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ

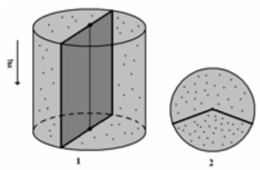
Москва – 2006

Физика

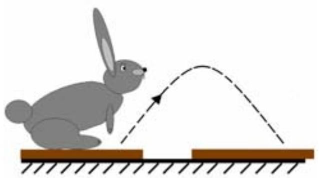
1. (*5 баллов*) Из точки, которая является геометрическим центром камеры кубической формы, вылетает мяч со скоростью v = 100 км/ч. Скорость мяча направлена под углом 45° к стенке V_5 и под углом 30° к стенкам V_4, V_6 (эти три грани имеют общую вершину, грань V_i находится напротив грани V_{i+3}). Стенки камеры V_1-V_6 разъезжаются в разные стороны со скоростями v_1 = 1 км/ч, v_2 = 2 км/ч, v_3 = 3 км/ч, v_4 = 4км/ч, v_5 = 5 км/ч, v_6 = 6 км/ч соответственно. Гравитационные поля в камере не влияют на полет мяча. Сколько ударов о стенки сделает мяч? Считать, что размеры мяча малы, масса мяча много меньше массы стенки, удары мяча являются абсолютно упругими, стенки являются бесконечными плоскостями (дырок между ними не образуется).
2. (*7 баллов*) В электрической цепи, представленной на рисунке, ротор представляет собой цилиндр с 8 чередующимися равными проводящими и диэлектрическими секторами, на оси расположен проводящий контакт. Контакты C и D никогда не замыкаются. Диод идеальный. Параметры схемы: ε=1 В, R=50 Ом, L=0,5 Гн, C=100 мкФ. Ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω=50 рад/с. Найдите приближенно зависимость напряжения U_{AB} от времени. Каково максимальное напряжение U_{AB}, если к клеммам A и B подключена нагрузка с сопротивлением R_H=10 кОм?



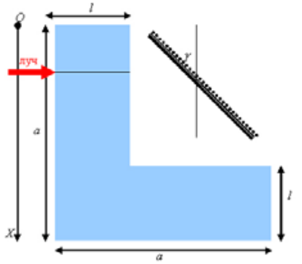
3. (*4 балла*) Закрытый, теплоизолированный сосуд имеет форму цилиндра, на оси которого закреплены две теплонепроницаемые створки массы m каждая. В обеих частях сосуда находится идеальный одноатомный газ. Начальный угол между створками 180⁰. Сосуд кладут набок, в результате чего створки из горизонтального положения поворачиваются на некоторый угол. К газу в нижней части сосуда подводят некоторое количество теплоты Q_1, и створки возвращаются в горизонтальное положение. Потом сосуд также ставят на дно, створки поворачиваются. В одну из частей подводят количество теплоты Q_2 > 0, так что створки возвращаются в первоначальное положение. Определите Q_2 и Q_1. Радиус цилиндра R. Изменение положения сосуда и движения створок происходят очень медленно.



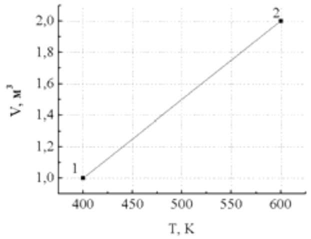
4. (*6 баллов*) На стеклянный шарик радиуса R падает узкий пучок света, который проходит через центр шара. Известно, что расстояние от центра шара до фокуса равно F_0, причем F_0>R. Найдите показатель преломления.
5. (*5 балла*) На гладкой горизонтальной поверхности расположены доски массы m_1. На первой доске сидит заяц массы m_2, который может прыгать с горизонтальной скоростью v_0 относительно доски. Вертикальную составляющую скорости он подбирает так, чтобы попасть на следующую доску. Заяц начинает перемещаться отдельными прыжками с первой доски на вторую, со второй на третью и т. д., при этом время отдыха на каждой доске равно времени предыдущего прыжка. Определите, какой максимальной средней скорости перемещения в горизонтальном направлении может достичь заяц, если число досок можно считать неограниченным. Трение между лапами зайца и досками очень велико.



6. (*7 баллов*) Уголок размером a х a и толщиной l=4см (a=4l) состоит из вещества, показатель преломления которого линейно меняется вдоль оси X: n=n_0+bx, b=0,025 см⁻¹ (см. рис.). Монохроматический тонкий луч перпендикулярно плоскости стекла попадает на него в точке x=0, где n=n_0=1. Под каким углом γ к вертикали нужно поставить плоское зеркало, чтобы луч, выйдя из левой части уголка, отразившись от зеркала и пройдя через нижнюю часть уголка, стал вертикальным?



7. (*8 баллов*) Найдите удельную теплоёмкость водяного пара при температуре 100 °C в процессе, в котором пар нагревается, всё время оставаясь насыщенным, но конденсации не происходит. Зависимость давления насыщенного пара от температуры определяется уравнением: $dP = \Lambda\rho dT/T$, где Λ=2,3*10⁶ Дж/кг – удельная теплота парообразования воды при 100 °C. Считать, что состояние пара описывается уравнением Менделеева-Клапейрона, число молей пара постоянно.
8. (*5 баллов*) Какую работу производят 180 г. водорода (H_2) при переходе из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.)? Водород считать идеальным газом.



9. (*5 баллов*) Какую работу должна совершить сила тяги двигателя самолета для движения по траектории, обеспечивающей невесомость внутри самолета? Начальная скорость V_0 направлена под углом α=30° к горизонту, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости с коэффициентом k. Начальная и конечная точки траектории находятся на одной высоте.
10. (*8 баллов*) Используя подручные средства, измерьте и представьте на графике зависимость силы, которую надо приложить к дверце домашнего холодильника, чтобы ее открыть, от промежутка времени с момента закрытия дверцы. Предполагается, что на холодильнике нет замков любого типа, дверца не является абсолютно герметичной. Исходя из этих данных, оцените зависимость перепада давления и температуры внутри камеры холодильника от времени. Объясните полученные результаты.

Математика

1. (*2 балла*) Докажите, что любую рациональную дробь можно представить в виде периодической десятичной дроби с конечным периодом.
2. (*4 балла*) Один любитель геометрии строит треугольники с площадью S = 669 такие, что радиус описанной окружности R связан с радиусом вписанной окружности r соотношением r = R^2/6. Оказалось, что у одного треугольника расстояние d между центрами вписанной и описанной окружностей максимально. Определите периметр этого треугольника.
3. (*4 балла*) Найдите количество точек с целочисленными координатами, лежащих на границе и внутри фигуры, граница которой задается уравнением: $|x-3|+|y-3|+|x-4|+|x-2|-2007=0$
4. (4 *балла*) α, β, γ – углы остроугольного треугольника. Докажите неравенство:
$$(\cos\alpha)^{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}\cdot(\cos\beta)^{2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot(\cos\gamma)^{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}\geq 1$$
5. (*4 балла*) Решите уравнение на отрезке [0;1] : {2005x} + {2006x} = {2007x}, где {a} – дробная часть числа a).
6. (*4 балла*) При каких a уравнение $y^2+2y\sqrt{a^2+3a+1}+a^2+1+\dfrac{(x-1)^2}{x^2}=0$ имеет единственное решение (x,y)? Решить его при всех таких a.
7. (*4 балла*) Найти все такие натуральные N, чтобы выполялось условие:
$$\sum_{n=0}^{N}\left[e+\frac{n}{N}\right]+2007=\sum_{n=0}^{N}\left[\pi+\frac{n}{N}\right]$$, где [x] – целая часть от x.
8. (4 *балла*) На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2…A_n$ с центром в точке O и произвольная точка пространства M. Доказать, что выполняется неравенство: $MA_1^4+MA_2^4+\ldots+MA_n^4\geq nOA_1^4$.
9. (*5 баллов*) Рассмотрим последовательность $a_n(x)$ = [$2^n x$], ([x] – целая часть числа x). Известно, что при некотором $x_0 \in R$ все $a_i(x_0)$, (i = k, k+1, …, k+m) простые, причем $a_k(x_0)=p$. Найти $a_{k+m}(x_0)$.
10. (*5 баллов*) Отрезки, которые соединяют основания высот остроугольного треугольника ABC, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника ABC.