Решение задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ МФТИ
2007/2008 года

Физика

1. *(3 балла)* Для оценки примем, что при ходьбе туловище человека движется по вертикали периодически с амплитудой A и частотой ω, а по горизонтали – с постоянной скоростью V. Если нога длины l при этом отклоняется на максимальный угол $\alpha_{\max}$, то

$$2A = l\left(1-\cos\alpha_{\max}\right),\ V\frac{2\pi}{\omega} = 4l\sin\alpha_{\max}.$$

Максимальное ускорение туловища, а значит и рюкзака при этом равно

$$a_{\max} = A\omega^2 = \frac{\pi^2}{16\cos^2\frac{\alpha_{\max}}{2}}\frac{V^2}{l}.$$

Чтобы при нагрузке m не порвались лямки, рассчитанные на M, максимальное ускорение должно быть ограниченно:

$$m\left(g + a_{\max}\right) \le Mg,$$

т.е.

$$V \le V_{\max} \sim \frac{\pi}{4\cos\frac{\alpha_{\max}}{2}}\sqrt{\frac{M-m}{m}gl}.$$

Оценочно получим $V_{\max} \sim 1\,м/с$.

<u>Ответ:</u> $V_{\max} \sim 1\,м/с$.

2. *(4 балла)* Пусть скорость вытекающей струи и скорость движения свободной поверхности жидкости в сосуде равны соответственно V_1 и V_2. Из сохранения массы следует равенство потоков:

$$V_1 S = kV_2 S,$$

где S - площадь отверстия. Подстановкой в уравнение Бернулли

$$p_0 + \frac{\rho V_1^2}{2} = p_0 + \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho gh$$

получим

$$V_1 = k\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{k^2-1}}.$$

В момент времени t уровень воды в сосуде h, и вылетевшая вода упадёт на пол на расстоянии $k\frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{k^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$ от стола. За время Δt уровень жидкости уменьшится на $\Delta h = V_2\Delta t$, и вылетевшая вода упадёт на пол на расстоянии $k\frac{\sqrt{2g(h-\Delta h)}}{\sqrt{k^2-1}}\cdot\sqrt{\frac{2H}{g}}$ от стола. Точка P приблизится к столу на

$$\Delta s = 2k\sqrt{\frac{H}{(k^2-1)}}\left(\sqrt{h}-\sqrt{h-\Delta h}\right) = 2k\sqrt{\frac{Hh}{(k^2-1)}}\left(1-\sqrt{1-\frac{\Delta h}{h}}\right)$$

$$= 2k\sqrt{\frac{Hh}{(k^2-1)}}\cdot\frac{\Delta h}{2h} = k\sqrt{\frac{H}{(k^2-1)h}}\cdot V_2\Delta t$$

Тогда

$$V = \frac{\Delta s}{\Delta t} = k\sqrt{\frac{H}{(k^2-1)h}}\cdot\frac{V_1}{k} = \frac{k}{k^2-1}\cdot\sqrt{2gH}.$$

Заметим, что точка P движется по полу с постоянной скоростью и за время τ перемещается от $s = k\dfrac{\sqrt{2gh_0}}{\sqrt{k^2-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$ до $s=0$, т.е. $\tau = \dfrac{2\sqrt{Hh_0}}{V\sqrt{k^2-1}} = \dfrac{\sqrt{2h_0}}{\sqrt{g}}\cdot\sqrt{k^2-1}$.

Ответ: $V = \dfrac{k}{k^2-1}\sqrt{2gH}$; $\tau = \sqrt{k^2-1}\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$.

3. *(4 балла)* 1) Банка начнёт опрокидываться при:

$$\left(M + m_{песка}\right)ah_0 = \left(M + m_{песка}\right)gr.$$

Следовательно, $h_0 a = const$, где a – допустимое ускорение, h_0 - высота центра масс банки с песком. Таким образом, банка наиболее устойчива при минимальном значении h_0.

Если x - уровень песка, насыпанного в банку, то

$$m_{песка} = \rho\pi r^2 x.$$

Высоту центра масс банки с песком найдём по формуле:

$$h_0 = \frac{Mh + \rho\pi r^2 x^2/2}{M + \rho\pi r^2 x}$$

Минимум h_0 найдется из условия

$$\frac{d}{dx}h_0 = \frac{\rho\pi r^2 x\left(M + \rho\pi r^2 x\right) - \rho\pi r^2\left(Mh + \rho\pi r^2 x^2/2\right)}{\left(M + \rho\pi r^2 x\right)^2} = 0,$$

$$x^2 + \frac{2M}{\rho\pi r^2}x - \frac{2Mh}{\rho\pi r^2} = 0, \quad x = \frac{M}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2\rho\pi r^2 h}{M}} - 1\right).$$

Именно при таком уровне песка высота центра масс банки минимальна и, значит, она максимально устойчива.

2) Начало опрокидывания:

$$hF = \left(M + m_{песка}\right)gr,$$

следовательно, максимальная устойчивость соответствует максимальному значению полной массы системы, т.е. при $x = H$.

Ответ: 1) $x = \dfrac{M}{\rho\pi r^2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2\rho\pi r^2 h}{M}} - 1\right)$; 2) $x = H$.

4. *(5 баллов)* Найдём для начала положение центра масс полудиска. Для этого поставим полудиск на жёсткую гладкую горизонтальную поверхность и отклоним его от положения равновесия на малый угол α. Изменение потенциальной энергии полудиска можно рассматривать как:

а) перенос сектора OBC на место OB_1C_1

б) подъём центра масс на высоту *h* (точка A перешла в точку A_1).

$$h = l\left(1 - \cos\alpha\right) = 2l\sin^2\frac{\alpha}{4} \approx l\frac{\alpha^2}{2},$$

где l – расстояние от точки *O* до центра масс полудиска *A*.

В первом случае при малых углах α можно считать, что центр масс сектора OBC лежит в точке O_1 пересечения медиан треугольника OBC. Это значит, что перенос сектора OBC на место OB_1C_1 эквивалентен подъёму его центра масс на высоту

$$h_0 = \frac{2}{3}R\sin\alpha \approx \frac{2}{3}R\alpha.$$

Пусть масса полудиска равна *m*, тогда масса рассматриваемого сектора равна

$$m_0 = \frac{\alpha}{\pi} m .$$

Изменение потенциальной энергии в первом случае:

$$\Delta E \approx m\frac{\alpha}{\pi} g \frac{2}{3} R\alpha = \frac{2\alpha^2}{3\pi} mgR ,$$

а во втором:

$$\Delta E = mgh \approx \frac{\alpha^2}{2} mgl .$$

Приравнивая правые части, получим:

$$l = \frac{4R}{3\pi} .$$

В пределах малых колебаний движение маятника можно рассматривать как колебания физического маятника. Поскольку момент инерции относительно точки подвеса равен

$$J = \frac{1}{2} mR^2 + mL^2 ,$$

то искомый период равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\left(L + l\right)}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + L^2}{g\left(L + \frac{4R}{3\pi}\right)}} .$$

Ответ: $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}R^2 + L^2}{g\left(L + \frac{4R}{3\pi}\right)}}$.

5. *(6 баллов)* Концентрация молекул $n = \dfrac{N}{S}$, где S – площадь ячейки. Найдем аналог уравнения Менделеева-Клапейрона для двумерного газа. За время Δt до стенки долетит $\Delta N = n \cdot L \cdot \upsilon_x \Delta t / 2$ (половина молекул летит от стенки). Импульс, передаваемый стенке $\Delta p = 2m\upsilon_x \cdot \Delta N$. Сила, действующая на стенку $F = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = nm\upsilon_x^2 L$, а «давление» $P = \dfrac{F}{L} = nm\upsilon_x^2$. Т.к. в плоском случае $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2$, $\left\langle \upsilon_x^2 \right\rangle = \left\langle \upsilon_y^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \upsilon^2 \right\rangle$, то $P = \dfrac{F}{L} = \dfrac{1}{2} nm \left\langle \upsilon^2 \right\rangle = N \cdot \left\langle E_{кин} \right\rangle$. Поскольку на одну степень свободы (движение вдоль одной координаты) приходится $\frac{1}{2}kT$, то $\left\langle E_{кин} \right\rangle = 2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT$, $P = nkT$ и $PS = NkT$. Отсюда сразу легко вычислить первоначальное значение силы $F_{нач} = PL = \dfrac{NkT}{L} \approx 0{,}85\ H$.

По первому началу термодинамики в адиабатическом процессе $\delta Q = 0 = dU + PdS = NkdT + PdS$. Подставляя сюда полученное выражение для P, получим $\dfrac{dT}{T} = -\dfrac{dS}{S}$. Простое интегрирование дает $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{S_1}{S_2}$, откуда $\dfrac{S_2}{S_1} = \dfrac{T_1}{T_2} = 1{,}5$. Поршень передвинут на $\Delta l = \dfrac{S_2 - S_1}{L} = 0{,}5L \approx 2{,}5\ см$.

Ответ: $\Delta l = 0{,}5L \approx 2{,}5\ см$, $F_{нач} = \dfrac{NkT}{L} \approx 0{,}85\ H$.

6. *(6 баллов)* Если температура плиты достаточно велика, то между каплей воды и поверхностью плиты может возникнуть паровая прослойка, ухудшающая теплообмен между плитой и собственно каплей. Явление называется "плёночное кипение". Быстро испаряющийся поверхностный слой капли снизу отрывает каплю от поверхности пластины, тем самым сильно уменьшая теплопередачу. При этом капля начинает двигаться по пластине и принимает сферическую форму. Этим и объясняется резкое увеличение времени испарения капли с повышением температуры.

Для расчета количества тепла, которое передается от медной пластины к капле, применяем формулу Ньютона:

$$Q = Sh\Delta T$$

Здесь S – площадь соприкосновения капли с пластиной, ΔT – разность температур, h – эффективный коэффициент теплоотдачи:

$$h = \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_{медь}} + \dfrac{1}{\alpha_{вода}}} = \frac{1}{\dfrac{1}{250} + \dfrac{1}{500}} = 116,7\,\frac{Вт}{м^2 К}$$

Здесь $\alpha_{медь}$, $\alpha_{вода}$ – коэффициенты теплоотдачи для меди и воды, которые берутся из справочника. Температуру пластины из-за высокой теплопроводности меди можно считать постоянной.

Примем форму капли в виде цилиндра радиуса R и высотой l. Тепло, которое за 1 сек передается путем теплопроводности от пластины к верхней поверхности капли, можно оценить как

$$Q_1 = \lambda_{вода} l \Delta T_1,$$

где $\lambda_{вода}$ – коэффициент теплопроводности воды, ΔT_1 – разность температур между основанием капли и ее верхней поверхностью (оценим как разность между температурой кипения и комнатной температурой, т.е. 80 К). Вообще говоря, коэффициент теплопроводности зависит от температуры, но в первом приближении возьмем значение при температуре кипения:

$$\lambda_{вода} = 0,683\,\frac{Вт}{м \cdot К}$$

Паровая прослойка будет образовываться, если количество тепла, передаваемое капле от пластины, меньше количества, передающегося к верхнему слою. Примем, что в некоторый момент нижняя поверхность капли нагрета до температуры кипения.

$$\lambda_{воды} l \Delta T_1 = \pi R^2 h \left(T_x - 373\right)$$

$$T_x = 373 + \frac{\lambda_{воды} l \Delta T_1}{\pi R^2 h}$$

Для оценочных значений l = 1 мм и R = 1,5 мм получим 437 К. Согласно справочнику Куталадзе С.С., Накоряков В.Е. "Тепломассообмен и волны в газожидкостных системах" - Наука, 1984 г., плёночное кипение воды при нормальных условиях начинается при T_1=440 К. Время испарения принимает максимальное значение при T_2=500К.

7. *(5 баллов)* Пренебрежем взаимодействием вылетающих ионов с пластиной и между собой. В таком случае движение каждого из ионов будет происходить в центральном кулоновском поле заряда Q, т.е. по плоским траекториям, перпендикулярным плоскости пластины. Как и во всяком центральном поле, здесь имеет место сохранение момента количества движения; в силу свойств движения в центральном поле скорость $\vec{V}_2$ подлета к пластине будет ей перпендикулярна, поэтому

$$mV_1 d = mV_2 x,$$

где V_1 - величина скорости вылетающих ионов, x - расстояние между зарядом Q и ионом в момент удара последнего о пластину.

Из закона сохранения энергии

$$E + \frac{kqQ}{d} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{kqQ}{d} = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{kqQ}{x}.$$

Решая совместно полученные уравнения, получим

$$1 + \frac{d}{x} = -\frac{kqQ}{Ed}.$$

Условием попадания иона на пластину является неравенство

$$x \le l,$$

откуда

$$-\frac{kqQ}{Ed} \ge 1 + \frac{d}{l}.$$

Поскольку имеет место притяжение, то $kqQ < 0$ и, следовательно,

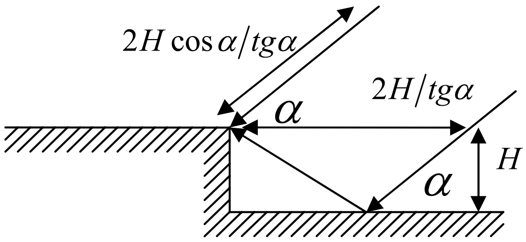
$$E \le -\frac{l}{l+d}\frac{kqQ}{d} = E_0.$$

Таким образом, получим ширину экрана равной

$$l = -\frac{E_0 d^2}{kqQ + E_0 d}.$$

Ответ: $l = -\dfrac{E_0 d^2}{kqQ + E_0 d}$.

8. *(5 баллов)*



Периодические изменения интенсивности принимаемого сигнала возникают из-за интерференции прямого и отраженного от поверхности воды лучей. Как видно из рисунка, разность хода этих лучей равна

$$\Delta = \frac{2H}{\sin\alpha} - \frac{2H\cos\alpha}{tg\alpha} = 2H\sin\alpha,$$

где α - высота спутника над горизонтом. При отражении от более плотной среды набегает дополнительная разность хода в полдлины волны, поэтому условие максимума интерференционной картины запишется в виде:

$$2H\sin\alpha = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{\nu},$$

где ν - искомая частота радиосигналов спутника. Таким образом, если $\sin\alpha \approx \alpha$,

$$\nu \approx \frac{c}{2H(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Ответ: $\nu \approx 0{,}95$ ГГц.

9. *(5 баллов)* Будем считать капилляр достаточно тонким. Жидкость поднимается в капилляре под действием сил поверхностного натяжения. Если краевой угол между жидкостью и материалом стенок капилляра равен θ, то в первом случае

$$\sigma \cdot 2\pi \cdot 2R\cos\theta = \rho\pi(2R)^2 Hg,$$

откуда

$$H = \frac{\sigma}{\rho g R}\cos\theta.$$

Во втором случае

$$\sigma(2\pi \cdot R + 2\pi \cdot 2R)\cos\theta = \rho\left(\pi(2R)^2 - \pi R^2\right)hg,$$

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}\cos\theta = 2H.$$

Ответ: $h = 2H$.

10. *(7 баллов)* Химическая реакция сгорания бензойной кислоты до воды и углекислого газа:

$$C_6H_5COOH + 7{,}5O_2 \to 7CO_2 + 3H_2O$$

Молярная масса бензойной кислоты равна 122 г/моль, следовательно, в 0,5 граммах содержится $4{,}1\cdot 10^{-3}$ моль этого вещества, при сгорании выделяется 13259 Дж.

При комнатной температуре (298К) внутри бомбы в объеме 1 л при давлении 15 атм содержится кислорода:

$$c = \frac{pv}{RT} = 0{,}61 \text{ моль}.$$

Для сгорания бензойной кислоты необходимо $4{,}1\cdot 10^{-3}\cdot 7{,}5 \approx 0{,}03$ моль кислорода, остается 0,58 моль. При этом образуется $2{,}87\cdot 10^{-2}$ моль углекислого газа и $1{,}23\cdot 10^{-2}$ моль жидкой воды.

Видно, что кислорода потенциально хватает, чтобы сжечь в 20 раз больше топлива, т.е. порядка 10 грамм бензойной кислоты.

Подсчитаем теплоемкость веществ внутри бомбы в момент, когда реакция полностью прошла. Предполагая, что температуры будут недостаточными для возбуждения колебательных степеней свободы, получаем для мольной теплоемкости C_v (для постоянного объема):

Вещество	**298К**	**с (моль)**	**$C_{v(298)}$, Дж/К**
O_2 (г)	2,5R	0,58	12,05
CO_2 (г)	2,5R	$2{,}87*10^{-2}$	0,60
H_2O (г)	3R	$1{,}23*10^{-2}$	0,31

Заметим, что образующаяся в реакции жидкая вода (0,22 г) нагревается и испаряется. Для этого необходимо 0,22*(4,2*75+2255)=565 Дж.

Суммарная теплоемкость газов при комнатной температуре – 13,0 Дж/К. Принимая в первом приближении независимость теплоемкости от температуры и температуры кипения воды от давления в бомбе, получаем температуру газов сразу после сжигания топлива:

$$T = T_{кип} + \frac{Q - Q_{вода}}{C_{v(ср)}} = 373 + \frac{13259 - 565}{13,0} \approx 1350K$$

Это тепло через стенки бомбы переходит в калориметр. Если он содержит M грамм воды, то суммарная теплоемкость системы складывается из теплоемкости воды в калориметре и теплоемкости стальной бомбы (очевидно, что теплоемкостью газов внутри бомбы в этих расчетах можно пренебречь):

$$4,2 \cdot M + 0,46 \cdot M_{сталь} = 13259 / 0,74$$

Отсюда получаем, что масса воды в калориметре около 4 кг (т.е. 4 литра).

Ответ: 1350 К; 4 кг; 10 гр.

Математика

1. Да, может. Если число $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то задача решена. Если же оно иррационально, тогда условиям задачи удовлетворяет число $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$.

2. Вокруг каждого пятиугольника можно описать равные окружности. Отсюда $\angle NEM = \angle MEL = \angle LEK = \angle PER = \angle RES = \angle SET$, т.к. они опираются на равные дуги. Т.е. $\angle NEK = 3\angle RES$. NE = PE = TE = KE и RE = SE = LE = ME. Значит, через (N, P, T, K) и через (R, S, L, M) проходит по окружности с центром E. $\angle NPK = \angle NEK/2 = 3\angle RES/2 = 3\angle RLS$ (все по свойству центрального угла). Отсюда очевидно следует, что $\angle NPK/\angle RLS = 3$.

Ответ. 3

3. Для начала заметим, что O_2 лежит вне окружности S_1. Иначе - очевидно, что касательная не пересечет отрезка O_1O_2. Пусть X - точка пересечения O_2A с S_1, отличная от A. Тогда $\angle XAB = 180°-\angle O_2AB=90°$ и опирается на диаметр. Отсюда - точки X, O_1 и B лежат на одной прямой, более того, O_1 - середина XB. Опустим на XA высоту O_1H. В силу подобия ΔACO_2 и ΔHO_1O_2 $CA=O_1H/2$, а в силу подобия ΔHO_1X и ΔABX $O_1H=BA/2$. Т.е. AB=4AC, откуда AC/CB=1/3.

4. $$[\sin^{2007} 2x] = [\sin 2x] = \left[\begin{array}{ll} -1, & -\frac{\pi}{2}+\pi m < x < \pi m, \\ 0, & \pi n \le x \le \frac{\pi}{2}+\pi n,\ x \ne \frac{\pi}{4}+\pi k, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}+\pi k, \end{array}\right. \quad m,n,k \in \mathbb{Z}$$

1) если $x < -2$, то $[x^2] \ge 4$, $[x+1]=[x]+1 \le -2$. Значит, $[x+1][x^2] \le 4[x]+4$. Сравним теперь выражения $4[x]+4$ и $[x]-1$:

$$4[x]+4 \ \ ? \ \ [x]-1$$
$$3[x] \ \ ? \ \ -5$$
$$3[x] < -6 < -5$$

поэтому $[x+1][x^2] \le 4[x]+4 < [x]-1 \le [x]+[\sin^{2007} 2x]$ и уравнение не имеет решений.

2) если $-2 \le x \le -\frac{\pi}{2}$, то уравнение принимает вид $-2+0=-1\cdot[x^2]$, откуда $$[x^2]=2 \Leftrightarrow 2 \le x^2 < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{3} < x \le -\sqrt{2}, \\ \sqrt{2} \le x < \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

С учетом условия, получаем $-\sqrt{3} < x \le -\frac{\pi}{2}$.

3) если $-\frac{\pi}{2} < x < -1$: $-2-1=-1\cdot[x^2]$, $[x^2]=3$, $x \in \left(-2;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3};2\right)$. С учетом условия: $x \in \varnothing$.

4) если $-1 \le x < 0$: $-1-1=0[x^2]$, решений нет.

5) если $0 \le x < 1$, $x \ne \frac{\pi}{4}$: $0+0=1\cdot[x^2] \Leftrightarrow -1<x<1$. С учетом условия: $x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4};1\right)$.

6) если $x=\frac{\pi}{4}$: $0+1=1\cdot[x^2]$ - неверное равенство.

7) если $x \ge 1$, то $[x+1][x^2] \ge [x]+1 \ge [x]+[\sin^{2007} 2x]$. Второе неравенство становится равенством при $x=\frac{5\pi}{4}+\pi n$, $n=0,1,2,...$ Однако, при этих значениях x первое неравенство становится строгим. Решений нет.

Объединяя результаты, получим

Ответ: $\left(-\sqrt{3};-\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4};1\right)$

5. Решение следует из тождества:

$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$

Тогда, если среди чисел a, b, c есть пара различных, то

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+c-b)^2>a^2+b^2+c^2.$$

Поэтому указанная в задаче операция замены не меняет суммы квадратов всех чисел (и не меняет чисел, вообще), если она проводится над одинаковыми числами, и увеличивает её, если проводится над неодинаковыми. Чтобы выиграть, 1-му игроку необходимо и достаточно, чтобы среди чисел были два отличных. В таком случае сумма квадратов всех чисел в конце $\le N*MAX^2$, но $\ge$ суммы квадратов в начале, которая больше $N*MIN^2$. Отсюда следует MAX>MIN.

6. Случай n=1 – тривиален.

Пусть l_1 - количество корней, равных 1, l_2 - равных -1. По Теореме Виета коэффициент при x^{n-1}:

$a_{n-1}=-(l_1\cdot 1+l_2\cdot(-1))=l_2-l_1$

Т. е. $l_2=l_1\pm 1$ и в любом случае $n=l_1+l_2=2l_1\pm 1$ – нечетно.

При n=3 искомым многочленом является $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$

Пусть $a_{n-1}=1$, тогда многочлен должен приводиться к виду

$(x+1)^{l_1+1}(x-1)^{l_1}=(x^2-1)^{l_1}(x+1),\ l_1\ge 2$

Но тогда, как видно, коэффициент при x^3 по модулю равен $l_1\ge 2$. Случай $a_{n-1}=-1$ рассматривается аналогично.

Ответ: n=1, n=3.

7. Согласно теореме Чевы AD, BH и CM пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AH}{HC}\cdot\frac{DC}{BD}\cdot\frac{BM}{MA}=1$. По свойству биссектрисы $\frac{DC}{BD}=\frac{AC}{AB}$. Из прямоугольных треугольников ABH и CBH: $\frac{AH}{HC}=\frac{BH\cdot tg\beta}{BH\cdot tg\alpha}=\frac{tg\beta}{tg\alpha}$. Тогда $\frac{tg\,\beta}{tg\,\alpha}=\frac{AB}{AC}$. По теореме синусов $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Теперь находим уравнение, связывающее α и β:

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\ \Rightarrow\ \frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\ \Rightarrow\ \sin\alpha\cos\beta\frac{1}{\sin\beta}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

откуда $tg\alpha=tg\beta\frac{\sin\beta}{1-\sin\beta}$.

Отсюда легко находим $tg\angle A-tg\angle C=ctg\beta-ctg\alpha=ctg\beta-\frac{ctg\beta(1-\sin\beta)}{\sin\beta}=ctg\beta\left(2-\frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Исследуем это выражение на максимум при $0<\beta<\frac{\pi}{2}$. Для этого находим производную: $-\frac{1}{\sin^2\beta}\left(2-\frac{1}{\sin\beta}\right)+ctg\beta\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}=0.$.

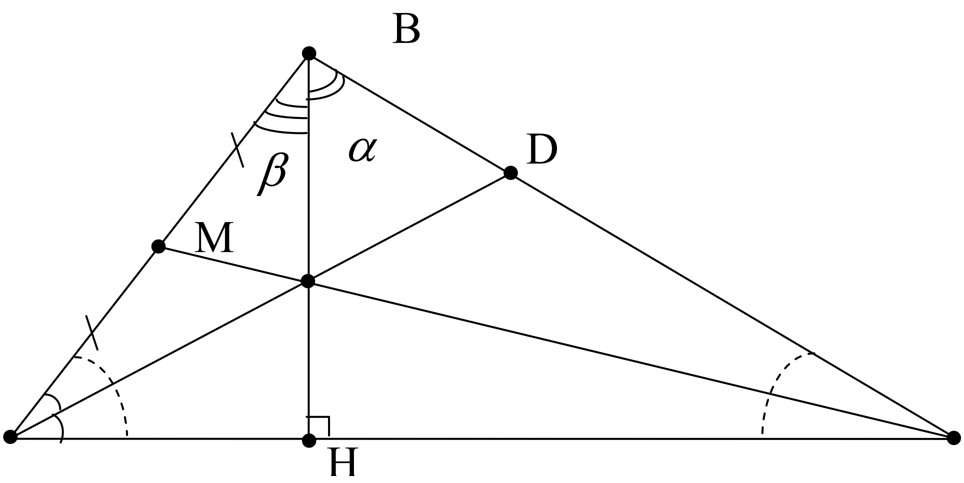
Уравнение сводится к

$\sin^2\beta+2\sin\beta-2=0,$

откуда

$\sin\beta=\sqrt{3}-1,\ ctg\beta=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}-1}$.

Итак, искомая разность $tg\angle A-tg\angle C=ctg\beta\left(2-\frac{1}{\sin\beta}\right)=\frac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}$.



Ответ: $\dfrac{\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}$.

8. Для n=1: $\sin^2 x+\cos^2 x=1=\sin^2 2x+\cos^2 2x$.

Для n=2: $\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\dfrac{\sin^2 2x}{2}=\cos^2 2x+\dfrac{\sin^2 2x}{2}$.

Для n=3: $\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=$

$=1-\dfrac{3\sin^2 2x}{4}=\cos^2 2x+\dfrac{\sin^2 2x}{2^2}$.

Для n≥4 пусть x=π/6. Тогда должно быть верно:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{4}+\frac{3}{2^{n+1}}.$$

При n=4 получаем, что 82/256=11/32. Противоречие. При n≥5:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\le\left(\frac{3}{4}\right)^5+\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{244}{1024}<\frac{1}{4}<\frac{1}{4}+\frac{3}{2^{n+1}}.$$

<u>Ответ</u>: 1, 2, 3.

9. Сделаем последовательно следующие замены

$x\to\dfrac{x-1}{x}$; $x\to\dfrac{1}{1-x}$.

Получим систему относительно неизвестных $f(x)$, $\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$ и $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$:

$$\begin{cases}3f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+5x\cdot f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+x+2008=0,\\[2ex] 3f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)+5\dfrac{x-1}{x}\cdot f(x)+\dfrac{x-1}{x}+2008=0,\\[2ex] 3f(x)+\dfrac{5}{1-x}\cdot f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)+\dfrac{1}{1-x}+2008=0.\end{cases}$$

Заменив $f(x)=a_1$, $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right)=a_2$, $f\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=a_3$, получим

$$\begin{cases} 3a_2 + 5xa_3 + x + 2008 = 0, \\ 3a_3 + 5\dfrac{x-1}{x}a_1 + \dfrac{x-1}{x} + 2008 = 0, \\ 3a_1 + \dfrac{5}{1-x}a_2 + \dfrac{1}{1-x} + 2008 = 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим

$$a_1 = f(x) = \frac{(16 \cdot 2008 + 10)x - 16 - 6 \cdot 2008}{98(1-x)}.$$

Подставив данную функцию в исходное функциональное уравнение, убеждаемся, что она удовлетворяет условию задачи.

10. Так как в уравнении (*) все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят равноправно, можно положить $x_n > x_{n-1} > \ldots > x_1$. Но тогда $x_i \geq i$ (принцип Дирихле) и следовательно

$$k = \left(1 + \frac{1}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{x_n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1 \Rightarrow a_n = n+1$$

при этом $\vec{x} = (1, 2, \ldots, n)$ - решение.

Так как k>1, при $x_i = n + i - 1$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ имеем

$$k = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n+n}{n+n-1} = \frac{n+n}{n} + 2,$$

то $b_n = 2$

Ответ. $a_n = n+1$, $b_n = 2$