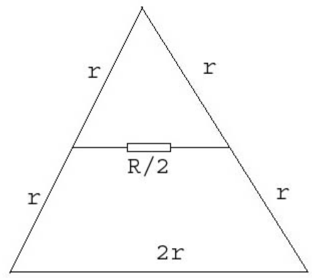
Решение задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ МФТИ
2005/2006 года

Физика

1. (*4 балла*) Из соображений подобия мы можем заменить схему на эквивалентную (см. рис.). Здесь R – искомое сопротивление между точками A и B. Из правил сложения сопротивлений для последовательного и параллельного соединения резисторов получаем:



$$\frac{1}{R}=\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r+\left(\frac{1}{2r}+\frac{1}{R/2}\right)}$$

$$3R^2+4rR-8r^2=0$$

$$R=2r\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

Ответ. $R=2r\frac{\sqrt{7}-1}{3}$

2. (*5 баллов*) На конструкцию действует выталкивающая сила, равная для груза $\rho_в g\frac{m_{гр}}{\rho_м}$, а для жгутов $-\rho_в g(l_0+x)S_0$, сила тяжести $mg\approx m_{гр}g$, и сила упругости $E\frac{x}{l_0}S_0$. Следовательно,

$$m_{гр}a=m_{гр}g-\rho_в g\frac{m_{гр}}{\rho_м}-E\frac{x}{l_0}S_0-\rho_в gl_0S_0-\rho_в gxS_0;$$

$$m_{гр}x''=\left(m_{гр}g-\rho_в g\frac{m_{гр}}{\rho_м}-\rho_в gl_0S_0\right)-x\left(\frac{E}{l_0}S_0+\rho_в gS_0\right).$$

Заменим $x-\dfrac{m_{гр}g-\rho_в g\frac{m_{гр}}{\rho_м}-\rho_в gl_0S_0}{\frac{E}{l_0}S_0+\rho_в gS_0}$ на x_1, получим

$$x_1''=-x_1\cdot\left(\frac{ES_0+\rho_в gl_0S_0}{m_{гр}l_0}\right).$$

Отсюда круговая частота колебаний равна $\omega=\sqrt{\frac{(E+\rho_в gl_0)S_0}{m_{гр}l_0}}$, а период $T=2\pi\sqrt{\frac{m_{гр}l_0}{(E+\rho_в gl_0)S_0}}$.

Ответ: $T=2\pi\sqrt{\frac{m_{гр}l_0}{(E+\rho_в gl_0)S_0}}$.

3. (*5 баллов*)

1) Ток через катушку максимален тогда, когда ЭДС индукции равна нулю, в этот момент C_2 разряжен, а C_1 заряжен до U_0. Запишем закон сохранения энергии с учетом работы батарейки:

$$\frac{LI_{\max}^2}{2}+\frac{C_1U_0^2}{2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{U_0^2}{2}+A_1$$

заряд, протекший через батарейку: q. И он равен изменению заряда конденсатора C_1, тогда

$$A_1 = qU_0 = (C_1U_0 - \frac{C_1C_2U_0}{C_1+C_2})U_0$$

Тогда получаем искомый ток:

$$I_{\max} = \frac{C_1U_0}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$$

2) Сумма напряжений на конденсаторах постоянна и равна U_0. Поэтому, когда напряжение на C_1 равно U_1 и максимально, а на C_2 напряжение U_2 и минимально, ток через катушку в этом момент не течет. Опять запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{C_2(U_0-U_1)^2}{2} + \frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\frac{U_0^2}{2} + A_2,$$

где работа батарейки A_2:

$$A_1 = (C_1U_1 - \frac{C_1C_2U_0}{C_1+C_2})U_0$$

Отсюда получаем:

$$U_{1\max} = (1+\frac{C_1}{C_1+C_2})U_0$$

<u>Ответ:</u> $I_{\max} = \frac{C_1U_0}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}$, $U_{1\max} = (1+\frac{C_1}{C_1+C_2})U_0$

4. (*5 баллов*) При переходе луча из воздуха в вещество пластинки можно записать

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{n_1}.$$

Когда луч проходит малое расстояние dh

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{n_1}{n_2}, \text{ затем } \frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_3};$$

………

$$\frac{\sin\alpha_n}{\sin\alpha_{n-1}} = \frac{n_{n-1}}{n_n}.$$

Перемножив все эти выражения, получим $\frac{\sin\alpha_n}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{n_n}$, т.е. для любой точки траектории можно записать: $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \frac{1}{n}$.

Заметим, что α – угол между касательной к траектории и вертикалью. Если рассмотреть траекторию луча как функцию смещения по глубине, то $f'(x) = tg\alpha$.

Поэтому

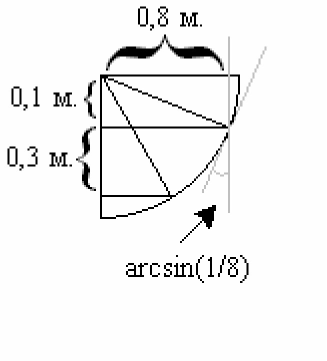
$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha_0};$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{n^2}{\sin^2\alpha_0};$$

$$\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{n^2}{\sin^2\alpha_0}-1;$$

$$f'(x)=\pm\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_0}}$$

$$f'(x)=\pm\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{\dfrac{16}{\left(1+\dfrac{x}{x_0}\right)^2}-\sin^2\alpha_0}}$$



Подставив числовые данные, получим

$$f(x)=\pm\int\frac{(10x+1)\cdot dx}{\sqrt{64-(1+10x)^2}}=\pm\frac{1}{10}\int\frac{(10x+1)\cdot d(10x+1)}{\sqrt{64-(1+10x)^2}}=\pm\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2}\times$$

$$\times\int\frac{d(10x+1)^2}{\sqrt{64-(1+10x)^2}}=\pm\left(\frac{1}{20}\cdot(-2)\sqrt{64-(1+10x)^2}\right)+C=\pm\sqrt{0{,}64-(x+0{,}1)^2}+C$$

Следовательно, траектория луча – окружность радиуса 0,8 м., при этом $f(x)=-\sqrt{0{,}64-(x+0{,}1)^2}+C$ (очевидно, траектория должна становиться с глубиной более пологой, т.к. показатель преломления падает).

Поэтому путь, пройденный до остановки ($\mathrm{tg}\alpha=0$, полное внутреннее отражение), как видно из рисунка, равен

$$\Delta h=r-r\cdot\sin\alpha_1,$$

$$\alpha_1=\arcsin\frac{\sin\alpha}{n_0}$$

(α_1 – начальный угол преломления). Следовательно, Δh=0,7 м., но d=0,4 м., поэтому луч пройдет всю пластинку. Его отклонение за это время, как видно из рисунка, будет равно

$$\Delta x=\sqrt{(0{,}8)^2-(0{,}1)^2}-\sqrt{(0{,}8)^2-(0{,}4)^2}=0{,}1\cdot(\sqrt{63}-\sqrt{48})\approx 0{,}1009 \text{ м.}$$

<u>Ответ:</u> Δh=0,3 м., Δx=0,1 м.

5. (*4 балла*) Рассмотрим равновесие кусочка веревки, непосредственно прилегающей к блоку. Рассмотрим приращение угла поворота $d\alpha$. К кусочку, лежащему внутри угла $d\alpha$, с одной стороны приложена сила натяжения веревки $T(\alpha)$, а с другой $T(\alpha+d\alpha)=T(\alpha)+dT$. Этим силам противодействует сила реакции опоры со стороны поверхности блока $dN=T\cdot d\alpha$. Кроме того, существует сила трения, удерживающая равновесии: $dF_{тр}=\mu\cdot dN$, причем $T(\alpha)-T(\alpha+d\alpha)=dF_{тр}\ \Rightarrow\ T(\alpha)=T_0\cdot\exp(-\mu\cdot\alpha)$.

Найдем суммарную силу реакции опоры. Для этого ось OX направим горизонтально, а ось OY – вертикально. Тогда

$$dN_x=dN\cdot\cos\alpha=T_0\cdot\cos\alpha\cdot\exp(-\mu\alpha)d\alpha\ \Rightarrow\ N_x=\frac{T_0}{\mu^2+1}\left(e^{-\mu\beta}(\sin\beta-\mu\cos\beta)+\mu\right);$$

$$dN_y=dN\cdot\sin\alpha=T_0\cdot\sin\alpha\cdot\exp(-\mu\alpha)d\alpha\ \Rightarrow\ N_y=\frac{T_0}{\mu^2+1}\left(-e^{-\mu\beta}(\mu\sin\beta+\cos\beta)+1\right).$$

Здесь β – угол между вертикалью и правой частью веревки, α – угол между вертикалью и левой частью веревки.

Отсюда находим угол наклона силы $\vec{N}$ к вертикали и абсолютную величину $\left|\vec{N}\right|$:

$$tg\alpha=\frac{N_x}{N_y}=\frac{(\sin\beta-\mu\cos\beta)+\mu\exp(\mu\beta)}{\exp(\mu\beta)-(\mu\sin\beta+\cos\beta)};$$

$$N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}=T_0\sqrt{\frac{1-2\cos\beta\cdot\exp(-\mu\beta)+\exp(-2\mu\beta)}{\mu^2+1}}\,.$$

Поскольку блок находится в равновесии, то угол наклона α равен $(\alpha_0-\beta)$, где α_0 – угол между нитями; и $N=T(\beta)$ в силу нерастяжимости нити. Отсюда рассматривая уравнение $\exp(2\mu\beta)-2\cos\beta\exp(\mu\beta)-\mu^2=0$ как квадратное относительно $\exp(\mu\beta)$, получим:

$$\exp(\mu\beta)=\cos\beta+\sqrt{\cos^2\beta+\mu^2}$$

Подставив это выражение в $tg\alpha$, получим:

$$tg(\alpha_0-\beta)=\frac{\sin\beta+\mu\sqrt{\cos^2\beta+\mu^2}}{\sqrt{\cos^2\beta+\mu^2}-\mu\sin\beta}\;\Rightarrow\;\alpha_0=arctg\frac{\sin\beta+\mu\sqrt{\cos^2\beta+\mu^2}}{\sqrt{\cos^2\beta+\mu^2}-\mu\sin\beta}+\beta\,, \qquad (1)$$

где β определяется уравнением $\exp(2\mu\beta)-2\cos\beta\exp(\mu\beta)-\mu^2=0$ (2)

Рассмотрим решение уравнения, когда коэффициент трения μ мал. Тогда можем положить $\beta=\beta(\mu=0)+\Delta$, $\Delta<<1$. Из (2) получим: $\beta\approx\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\mu$. Преобразовав (1), получим:

$$\alpha_0\approx arctg\frac{\sin\beta+\mu\cos\beta}{\cos\beta-\mu\sin\beta}=arctg\frac{\sin\left(\beta+\arcsin\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right)}{\cos\left(\beta+\arcsin\frac{\mu}{\sqrt{\mu^2+1}}\right)}+\beta\approx2\beta+\mu\,.$$

Объединив, получим: $\alpha_0\approx\frac{2\pi}{3}+\frac{9-2\sqrt{3}}{9}\mu$, т.е. $\alpha_0\in\left[\frac{2\pi}{3}-0{,}61\mu;\frac{2\pi}{3}+0{,}61\mu\right]$ для малых μ.

6. (*6 баллов*) Для корректного учета элементарных сил трения мысленно рассечём диск на бесконечно тонкие кольца и рассмотрим одно из них. Затем данное кольцо также мысленно рассечем на бесконечно малые дуги и рассмотрим одну из них Δl_i. Тормозящая сила F_i, действующая на этот элемент кольца, равна:

$$F_i=\mu m_i g$$

Работа тормозящей силы F_i при повороте кольца на малый угол $d\varphi$ равна

$$A_i=-\mu m_i g r_k d\varphi$$

Для всего кольца:

$$A_k=\sum_{i=1}A_i=-\mu g r_k d\varphi\sum_{i=1}m_i=-\mu g m_k r_k d\varphi$$

Работа тормозящих сил при повороте всего диска на угол $d\varphi$:

$$A_{торм}=\sum_k A_k=-\mu g\cdot d\varphi\sum_k m_k r_k=-\mu g2\pi\rho\cdot d\varphi\sum_k r_k^2=$$

$$=-\mu g2\pi\rho\cdot d\varphi\frac{R^3}{3}=-\frac{2}{3}\mu mgR\cdot d\varphi=-\frac{2}{3}\mu mg\omega R\cdot dt$$

(в силу малости $d\varphi$ коэффициент трения μ можно считать постоянным).

Запишем уравнение изменения коэффициента трения:

$$d\mu\frac{A_0}{\mu_0}=A_{торм}(d\varphi)=-\frac{2}{3}\mu mg\omega R\cdot dt$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2\mu_0 mg\omega R}{3A_0}dt$$

$$\ln\frac{\mu}{\mu_0}=-\frac{2\mu_0 mg\omega R}{3A_0}t$$

Отсюда: $\mu(t) = \mu_0 \exp\left(-\frac{2\mu_0 mg\omega R}{3A_0}t\right)$

7. (*4 балла*) Найдем по графику зависимость $p(V)$:

$$p(V) = p_1 - a(V - V_1) \qquad (a \text{ – некоторая константа})$$

$$p_2 = p_1 - a(V_2 - V_1) \Rightarrow \qquad a = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}$$

$$p(V) = p_1 - \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}(V - V_1)$$

$$p(V) = p_1 \frac{3V_1 - V}{2V_1}$$

По первому началу термодинамики:

$$dQ = dU + dA$$

$$dQ = \frac{i}{2}\nu R dT + pdV$$

По определению теплоемкости $C = \frac{dQ}{dT}$.

$$C = \frac{i}{2}\nu R + p\frac{dV}{dT} \qquad (1)$$

По уравнению Менделеева – Клаперона:

$$p(V) \cdot V = \nu RT$$

$$p_1 \frac{3V_1 - V}{2V_1} V = \nu RT$$

$$T(V) = \frac{p_1}{2V_1 \nu R}(3V_1 - V)V$$

$$\frac{dT}{dV} = T'(V) = \frac{p_1}{2V_1 \nu R}(3V_1 - 2V)$$

$$\frac{dV}{dT} = \frac{2V_1 \nu R}{p_1(3V_1 - 2V)} \qquad (2)$$

Подставим выражение (2) в (1):

$$C = \frac{i}{2}\nu R + p_1 \frac{3V_1 - V}{2V_1} \cdot \frac{2V_1 \nu R}{p_1(3V_1 - 2V)}$$

$$C = \frac{3}{2}\nu R + \nu R \frac{3V_1 - V}{3V_1 - 2V}$$

Ответ: $C(V) = \frac{3}{2}\nu R + \nu R \frac{3V_1 - V}{3V_1 - 2V}$.

8. (*5 баллов*) Уравнение теплового баланса после первого погружения ложки:

$$c_л m_л (T_1 - T_В) = c_ч M_ч (T_0 - T_1)$$

откуда:

$$T_1 = \frac{c_ч M_ч}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_0 + \frac{c_л m_л}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_B \qquad (1)$$

После n погружений:

$$T_{n+1} = \frac{c_ч M_ч}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_n + \frac{c_л m_л}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_B \qquad (2)$$

Аналогично:

$$T_n = \frac{c_ч M_ч}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_{n-1} + \frac{c_л m_л}{c_ч M_ч + c_л m_л} T_B \qquad (3)$$

Пусть $dT_n = T_{n+1} - T_n$, $\alpha = \frac{c_ч M_ч}{c_ч M_ч + c_л m_л}$, тогда, вычитая из (2) уравнение (3), получаем:

$$dT_{n+1} = \alpha \cdot dT_n$$

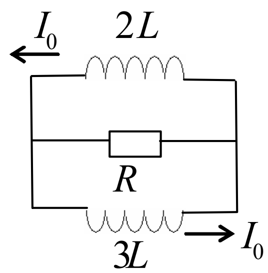
$$DT = \sum \alpha^k dT_1 = dT_1 \frac{1-a^n}{1-a}$$

заметив, что $\frac{dT_1}{1-a} = T_0 - T_B$, получаем:

$$n = \log_\alpha \left(1 - \frac{\Delta T}{T_0 - T_B}\right) \approx 814$$

Ответ: $n = 814$

9. (*5 баллов*) До вынимания сердечника ток через резистор не течет (т.к. сопротивление катушек равно нулю).



Поток через верхнюю катушку равен: $\Phi_1 = I_0 \cdot 2L$

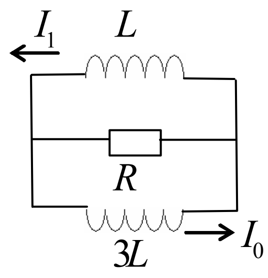
Докажем, что при мгновенном изменении индуктивности (вынимания сердечника) поток не меняется. Действительно, э.д.с. , возникающее в катушке равно:

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

$\Delta t \to 0$ (вынимают мгновенно), значит, если $\Delta\Phi$ не стремиться к нулю, то $\varepsilon_i \to \infty$, а значит и $I \to \infty$, т.к. сопротивление идеальных катушек равно нулю. Приходим к выводу, что поток в верхней катушке не изменится.

$$\Phi_1 = \Phi_1'$$

$$I_0 \cdot 2L = I_1 \cdot L \Rightarrow \qquad I_1 = 2I_0$$



После этого ток начнет выравниваться в обеих катушках и станет I_2. При этом суммарный поток через катушки сохраняется:

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 = 0 \ => \ \Delta\Phi_1 = -\Delta\Phi_2$$

$$L(I_1 - I_2) = -3L(I_0 - I_2)$$

$$2I_0 - I_2 = -3I_0 + 3I_2 \quad => \quad I_2 = \frac{5I_0}{4}$$

Сразу после вынимания сердечника энергия системы была равна:

$$W_1 = \frac{LI_1^2}{2} + \frac{3LI_0^2}{2} = \frac{4LI_0^2}{2} + \frac{3LI_0^2}{2} = \frac{7LI_0^2}{2}$$

В конце, после установления токов, энергия системы станет равной:

$$W_2 = \frac{LI_2^2}{2} + \frac{3LI_2^2}{2} = 2LI_2^2 = \frac{25LI_0^2}{8}$$

По закону сохранения энергии:

$$Q = W_1 - W_2 = \frac{7LI_0^{\ 2}}{2} - \frac{25LI_0^{\ 2}}{8} = \frac{3LI_0^{\ 2}}{8}.$$

Ответ: $Q = \dfrac{3LI_0^{\ 2}}{8}$.

10. (7 баллов) Палочку полагаем тонкой, под собственным весом не прогибающейся; гравитационное поле однородным; трением в системе можно пренебречь; ямку считаем массивной (или жестко закрепленной).

В положении равновесия потенциальная энергия палочки минимальна. Поскольку потенциальная энергия $U = mgH \sim H$ – высоте центра масс над нулевым уровнем $y = 0$, то H минимально также.

Пусть длина палочки L; координаты ее концов (x_1, kx_1^2) и (x_2, kx_2^2). Центр масс однородной палочки находится посередине, а значит имеет координаты $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{k}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)$. Длина палочки не меняется: $(x_1 - x_2)^2 + k^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) = L^2$ или

$$(x_1 - x_2)^2\left(1 + k^2(x_1 + x_2)^2\right) = L^2.$$

Сделаем замену: $\begin{cases} p = x_1 + x_2 \\ q = x_1 x_2 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q \\ (x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q \end{cases}$, соответственно

$$\left(p^2 - 4q\right)\left(1 + k^2 p^2\right) = L^2 \Rightarrow 4q = p^2 - \frac{L^2}{1 + k^2 p^2};$$

$$\frac{2H}{k} = x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{L^2}{1 + k^2 p^2}\right); \text{ значит } \frac{4H}{k} = f(p) = p^2 + \frac{L^2}{1 + k^2 p^2}.$$

$f(p)$ – минимальна: $f'(p) = 0$; $2p - \dfrac{2k^2 L^2 p}{1 + k^2 p^2} = 0$, откуда $p = 0$ или $p^2 = \dfrac{kL - 1}{k^2}$; $p = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow y_1 = kx_1^2 = kx_2^2 = y_2 \Rightarrow \varphi = 0$, что противоречит условию $\varphi > 0$. Поэтому $p^2 = \dfrac{kL - 1}{k^2} \Rightarrow \dfrac{4H}{k} = \dfrac{kL - 1}{k^2} + \dfrac{L^2}{kL} = \dfrac{2L}{k} - \dfrac{1}{k^2} \Rightarrow H = \dfrac{L}{2} - \dfrac{1}{4k}$.

Найдем теперь x_1 и x_2. Очевидно, что по теореме Виета они – корни квадратного уравнения $x^2 - px + q = 0$. Поскольку $4q = p^2 - \dfrac{L^2}{1 + k^2 p^2}$, то

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{L}{k} - \frac{1}{k^2}} \mp \sqrt{\frac{L}{k}}\right), \text{ т.к. } x_1 < x_2.$$

Найдем теперь φ – угол палочки с горизонтом. Очевидно, что

$$\sin\varphi = \frac{H - kx_1^2}{L/2} = \frac{1/2 \cdot \sqrt{L^2 - L/k}}{L/2} = \sqrt{1 - \frac{1}{kL}} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{kL}} \Rightarrow L = \frac{1}{k\cos^2\varphi}.$$

На палочку со стороны стенок ямки действуют силы реакции $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Поскольку трения нет, то они строго перпендикулярны стенкам в точке приложения. Пусть линии действия этих сил пересекаются в точке М. Найдем ее положение.

Рассмотрим точку (x_1, kx_1^2). Касательная к $y = kx^2$ в точке x_1 имеет угловой коэффициент, равный $y'(x_1) = 2kx_1$. Если y_1 перпендикулярна ей $\left(\overrightarrow{y_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{N_1}\right)$, то

$$y_1 = a_1 x + b_1,\ a_1 \cdot a = -1 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2kx_1};\ y_1(x_1) = y(x) \Rightarrow -\frac{x_1}{2kx_1} + b_1 = kx_1^2 \Rightarrow b_1 = kx_1^2 + \frac{1}{2k}.$$

Следовательно, $y_1 = -\frac{x}{2kx_1} + kx_1^2 + \frac{1}{2k}$ и $y_2 = -\frac{x}{2kx_2} + kx_2^2 + \frac{1}{2k}$ аналогично.

$M = y_1 \cap y_2$: $y_1(x_M) = y_2(x_M) \Rightarrow x_M = -2k^2 pq$ или $x_M = \sqrt{\frac{kL-1}{4k^2}}$, $y_M = L - \frac{1}{4k}$.

Пусть теперь палочка немного сместилась из положения равновесия в сторону. При этом M сместилась по сравнению со смещением концов незначительно, пренебрежем этим. Соответственно, пренебрежем и изменением MS, где S – положение центра масс. Запишем тогда уравнение вращательного движения для центра масс палочки относительно точки M; поскольку остается только сила тяжести – возвращающая, то

$$-mg \cdot MS \cdot \sin\alpha = I_M \ddot{\alpha} \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{mg \cdot MS}{I_M}\alpha = 0 \text{ (для малых смещений)}$$

– уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega^2 = \frac{mg \cdot MS}{I_M}$.

По теореме Штейнера $I_M = I_S + m \cdot MS^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m \cdot (y_M - y_S)^2$. Поскольку $y_M = L - \frac{1}{4k}$, а $y_S = H = \frac{L}{2} - \frac{1}{4k}$, то $\omega^2 = \frac{3g}{2L}$. Т.к. $L = \frac{1}{k\cos^2\varphi}$, то получим окончательный ответ:

$$\omega = \sqrt{\frac{3}{2}gk\cos^2\varphi}.$$

Размерность, очевидно совпадает: $[\omega] = \sqrt{\frac{м}{с^2} \cdot \frac{1}{м}} = \frac{1}{с}$. Т.к. $k = 2/3$, то $\omega = \sqrt{g\cos^2\varphi}$.

Ответ: $\omega = \sqrt{g\cos^2\varphi}$ при $k = 2/3$.

Математика

1. (*3 балла*) Допустим, что в секции n девушек и m парней. Пусть некая девушка знакома с k ребятами, тогда она мечтательно посмотрит k раз, а на нее посмотрят $m-k$ раз, т.е. с каждой девушкой связано m взглядов (не зависит от числа знакомых). В итоге имеем $m \cdot n$ взглядов. Уравнение $m \cdot n = 117$ в натуральных числах имеет решения (1; 117), (3; 39) и (9; 13) (порядок чисел неважен). Неравенству $n + m \le 40$ удовлетворяет только последняя пара чисел, следовательно, в секции занимается 22 человека.

Ответ: 22 человека

2. (*5 баллов*) Введем на систему отсчета так, чтобы центры окружностей лежали на оси абсцисс симметрично относительно начала координат (т.е. точка (0;0) – середина отрезка, соединяющего центры окружностей).

Запишем параметрические уравнения окружностей через параметр f: $x_1 = -5 + \cos(f_1)$, $y_1 = \sin(f_1)$ и $x_2 = 5 + 3\cos(f_2)$, $y_2 = \sin f_2$ соответственно. Для точки $A(x,y)$, являющейся серединой отрезка, соединяющего точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2), имеем: $(x,y) = ½*(\cos f_1 + 3\cos f_2, \sin f_1 + 3\sin f_2)$. Если зафиксировать f_2, то с изменением f_1 от 0 до 2π точка $A(x;y)$ будет описывать окружность радиуса 1/2. При изменении f_2 от 0 до 2π точка $(3/2\cos f_2;\ 3/2\sin f_2)$ в свою очередь будет двигаться по окружности радиуса 3/2 с центром в начале координат; окружность радиуса 1/2 будет при этом «заметать» кольцо с внутренним радиусом 3/2 – 1/2 = 1 и внешним радиусом 3/2 + 1/2 = 2.

Ответ: Геометрическое место точек представляет собой кольцо, центр которого есть середина отрезка, соединяющего центры окружностей, а внутренний и внешний радиусы равны соответственно 1 и 2.

3. (*6 баллов*) Если x и y – взаимно простые числа, то из делимости следует, что уравнение не имеет решения в натуральных числах. Предположим, что простое число p входит в разложение x на простые множители в степени m, а в разложение y – в степени n. Тогда $m*(x+y)=n*(y-x)$ и $n \geq m$. Следовательно, y делится на x.

Пусть $y = k*x$. Тогда $x^{(k+1)x} = k^{(k-1)x}x^{(k-1)x}$.

Перепишем уравнение в следующем виде: $x^{2x} = (k^{(k-1)})^x$, откуда $x^2 = k^{k-1}$. Далее возможны два случая: число k либо нечетно, либо является точным квадратом. В первом случае положим $k = 2s+1$, тогда $x = (2s+1)^s$, $y = (2s+1)^{s+1}$. Во втором случае $k = 4*t^2$, $x = (2t)^{4t^2-1}$, $y = (2t)^{4t^2+1}$.

4. (*5 баллов*) Отобразим ΔAKC симметрично АС, получив $\Delta AK'C$. Замечая, что $\angle ABC + \angle AK'C = 180^0$, опишем вокруг $ABCK'$ окружность, тогда $\angle ACB = \angle AK'B = \angle AKD$.

Тогда:

$\angle KAD + \angle KCD = 180 - 130 = 50^0$

$\angle KAD + \angle AKD = 180 - 70 = 110^0$

Исходя из полученных равенств, получаем:

$\angle ACB - \angle KCD = 60^0 = \angle KCB$

5. (*5 баллов*) Для заданных значений m и n обозначим $a = [n\sqrt{m}]$. Так как $a \neq n\sqrt{m}$ (так как m не полный квадрат), то

$a < n\sqrt{m}$ и $a^2 < n^2 m$.

Поэтому $1 \leq mn^2 - a^2 = (n\sqrt{m} - a)(n\sqrt{m} + a) = \{n\sqrt{m}\}(n\sqrt{m} + a) < \{n\sqrt{m}\}2n\sqrt{m}$

Или: $\{n\sqrt{m}\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{m}}$

6. (*3 балла*) Чтобы найти количество цифр в некотором натуральном числе, надо вычислить его десятичный логарифм, взять целую часть и прибавить 1: $\left[\lg\left[\pi^{2005}\right]\right] + 1 = \left[2005 \cdot \lg \pi\right] + 1 = 997$

7. (*6 баллов*) Пусть $M = \dfrac{2}{3}N$ (если N делится на 3) или $M = \left[\dfrac{2}{3}N\right] + 1$ (если не делится) – количество членов оргкомитета олимпиады, минимально необходимое для доступа к сейфу. По условию, любые $M-1$ человек сейф открыть не могут. Значит, у них нет ключа от некоторого замка. При этом любой другой член комиссии должен этот ключ иметь. Поэтому нужно поставить C_N^{M-1} замков. Соответственно количество ключей к каждому замку должно быть таковым, чтобы любая совокупность из M и более человек имела доступ к сейфу, а меньше M – не имела. Это возможно тогда, когда количество ключей равно $N - M + 1$. Эти ключи от каждого замка отдаются некоторой группе из $N - M + 1$ членов комиссии, причем разные ключи раздаются разным группам.

8. (*6 баллов*) Покажем, что через время, равное t минут, где $t = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_m}$, $k_1 > k_2 > \ldots > k_m > 0$, после взаимоуничтожения в пространстве останется 6^m бактерий.

Рассмотрим для простоты одномерную задачу. Докажем методом математической индукции, что через время 2^n, где n – натуральное число, в системе существует 2 бактерии на расстроянии 2^n от начала координат. Случай $n=1$ проверяется просто. Пусть закономерность выполняется для всех $n = 1, \ldots, k$. Рассмотрим случай $n = k+1$. От каждого из 2-х бактерий, которые в момент времени 2^k находились в координате $\pm 2^k$, еще через время 2^k по проверяемой закономерности останется 2 бактерии с координатами $\pm\left(2^k+2^k\right)=\pm 2^{k+1}$ и $\pm\left(2^k-2^k\right)=0$. Бактерии в начале координат взаимоуничтожатся, и останется 2 бактерии. Утверждение доказано.

Аналогично можно показать, что в момент времени 2^n-1 в системе существует 2^n бактерий на расстоянии 2 от соседней. Отсюда следует, что $N\left(2^n-1\right)=2\cdot N\left(2^{n-1}-1\right)$.

Учитывая, что $2^n-1=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}$ (сумма геометрической прогрессии), можно переписать:

$$N\left(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-2}+2^{n-1}\right)=2\cdot N\left(2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-2}\right)$$

Аналогично, при $t=2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}$, $k_1>k_2>\ldots>k_m>0$:

$$N\left(2^{k_1}+2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}\right)=2\cdot N\left(2^{k_2}+\ldots+2^{k_m}\right)=2^2\cdot N\left(2^{k_3}+\ldots+2^{k_m}\right)=\ldots=2^m$$

В трехмерном пространстве мы можем выделить множество линий, параллельных осям координат, и рассматравать одномерное движение по ним, получив $N=6^m$.

Для 2000 минут получим: $2000=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4$, отсюда $m=6$ и $6^6=46656$ бактерий.

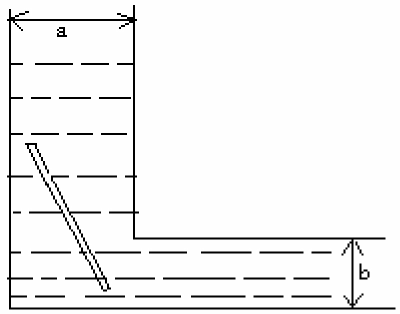
Ответ: N = 46656 бактерий

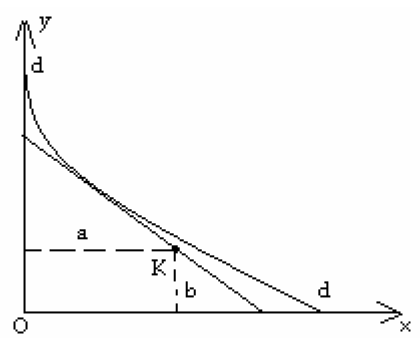
9. (*7 баллов*) Геометрический смысл равенства $(n+1)^2-n^2=2n+1$ можно интерпретировать так, что для того чтобы из квадрата со стороной *n* получить квадрат со стороной *n*+1, нужно пририсовать еще $a_{n+1,1}=2n+1$ единичных квадрата. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}=n^2$.

Рассмотрим трехмерный случай. Чтобы из куба со стороной *n* получить куб со стороной *n*+1, необходимо *n*+1 раз пририсовать $a_{n+1,1}=2n+1$ единичный кубический элемент, после чего заполнить пустоты в верхней грани, на что, как видно из прошлого случая, потребуется $\sum_{i=1}^{n}a_{i,1}$ элемент. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{n}a_{i,2}=n^3$.

Продолжая эти рассуждения для аналогов куба в *k*-мерных пространствах, получаем доказываемое равенство.

10. (4 *балла*) Примем стороны угла за оси координат. Отрезок длины *d* должен касаться *астроиды* (астроида является огибающей семейства отрезков постоянной длины, концы которых расположены на двух взаимно перпендикулярных прямых), острия которой удалены от центра на расстояние *d*. Уравнение такой астроиды: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=d^{\frac{2}{3}}$.





Если некоторая точка *K*, принадлежащая отрезку, находится внутри области, ограниченной астроидой и сторонами угла, то нужный отрезок существует (это отрезок касательной к астроиде, проведенной из точки *K*). Если *K* лежит вне области, то отрезок не существует.

Ответ: $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\geq d^{\frac{2}{3}}$