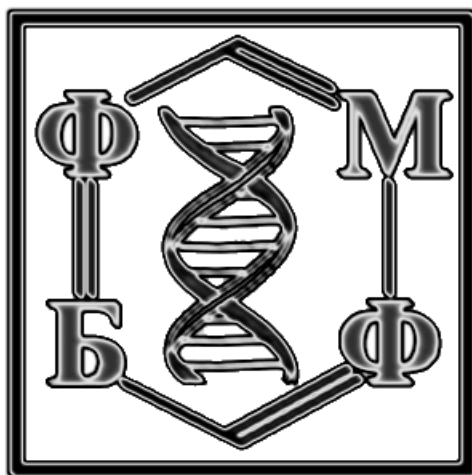


**Московский физико-технический институт  
(государственный университет)  
Факультет Молекулярной и Биологической Физики**

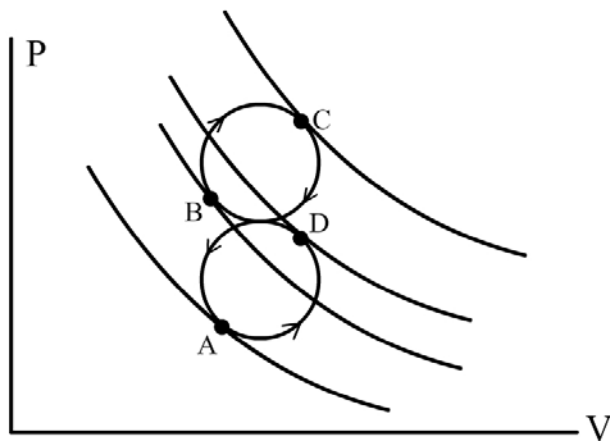


**Решение задач  
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ  
2009-2010 года**

Москва – 2010

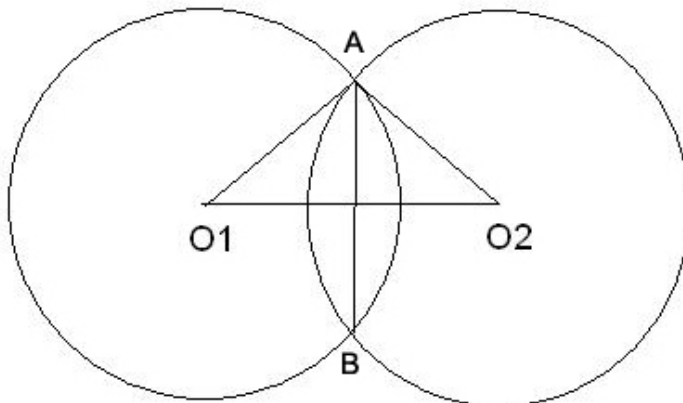
## Физика

1. На графике  $p(V)$  проведем 4 изотермы, которые касаются кругов «восьмерки» с разных сторон (в первой и третьей четвертях окружности):  $p = \nu R \frac{T}{V}$



Из уравнения Менделеева-Клайперона следует, что чем больше температура, тем выше на графике лежит изотерма. Если направление движения по «восьмерке» идет от точки касания с изотермой с меньшей температурой к изотерме с большей температурой, то на данном участке температура увеличивается (участки  $BC$ ,  $AD$ ). Если наоборот – то температура уменьшается (участки  $CA$ ,  $DB$ ).

2. Т.к. исходные пузыри одинаковые, при слипании получим симметричную систему, состоящую из двух шаровых сегментов:



Силы поверхностного натяжения в любой точке поверхности соприкосновения пузырей уравновешивают друг друга и равны между собой. Это значит, что граница стенки между пузырями плоская, а в точках соприкосновения 3 поверхностей углы между касательными равны  $120^\circ$ .

Найдем высоту «отрезанного» шарового сегмента. Рассмотрим поперечное сечение плоскостью, проходящее через центры шаров  $O_1$  и  $O_2$ . Пусть  $A$  и  $B$  – точки пересечения окружностей и вертикальной перегородки. Т.к. угол между перегородкой  $AB$  и касательной к окружности равен  $120^\circ$ , а радиус  $O_1A$  перпендикулярен касательной в точке  $A$ , то угол между радиусом  $O_1A$  и перегородкой  $AB$  равен  $30^\circ$ . Если  $R$  – новый радиус пузыря вне области соприкосновения, то высота шарового сегмента:

$$H = R - R \sin 30^\circ = R/2$$

$$\text{Объем шарового сегмента равен } V_c = \pi H^2 \left( R - \frac{H}{3} \right) = \frac{5\pi}{24} R^3.$$

Из равенства объемов пузыря до и после слипания получаем:

$$\frac{4\pi}{3} R_0^3 = \frac{4\pi}{3} R^3 - V_c = \frac{4\pi}{3} R^3 - \frac{5\pi}{24} R^3 = \frac{9\pi}{8} R^3 \Rightarrow \frac{R}{R_0} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$$

3. Для оценки максимальной мощности примем, что сила, с которой велосипедист давит на педаль, постоянна и равна весу велосипедиста  $mg$ . Тогда, пренебрегая числовыми коэффициентами, развиваемую велосипедистом мощность можно оценить как

$$N = mglv,$$

где  $l$  – длина рычага педали,  $v$  – частота вращения.

Эта мощность равна мощности потерь, которые вызываются силами трения. Предполагая, что основные потери мощности приходятся на сопротивление воздуха, можно записать

$$N = F_{\text{сопр}} V = kV^3.$$

Тут  $k$  – искомый коэффициент,  $V$  – максимальная скорость движения велосипеда. Эта скорость может быть оценена как

$$V = v \cdot \left(\frac{R}{r}\right) \cdot L,$$

где  $R$  – радиус передней звёздочки,  $r$  – радиус задней звёздочки,  $L$  – длина окружности колеса.

Положив  $m = 70 \text{ кг}$ ,  $l = 0,2 \text{ м}$ ,  $v = 3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\frac{R}{r} = 2$ ,  $L = 2 \text{ м}$ , получим:

$$V = 12 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad N = 420 \text{ Вт}, \quad k = 0,24 \frac{\text{Нс}^2}{\text{м}^2}.$$

4. Продифференцировав уравнение процесса  $\frac{UT}{V} = \text{const}$ , получим

$$UVdT + VTdU - UTdV = 0$$

Отсюда можно выразить

$$dV = \frac{UVdT + VTdU}{UT} = \frac{V}{T}dT + \frac{V}{U}dU$$

Запишем первый закон термодинамики

$$dQ = dU + pdV$$

и, подставляя полученное выражение для  $dV$ , а также известные для идеального газа выражения  $U = \nu C_V T$ ,  $dU = \nu C_V dT$ ,  $pV = \nu RT$ , получим в итоге

$$dQ = dU + \frac{\nu RT}{V} \left( \frac{V}{T} dT + \frac{V}{U} dU \right) = dU + \nu R dT + \frac{\nu RT}{U} dU = \left( 1 + \frac{\nu RT}{U} \right) dU + \nu R dT$$

$$dQ = \left( 1 + \frac{R}{C_V} \right) \nu C_V dT + \nu R dT$$

Находим молярную теплоёмкость газа по определению

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{dQ}{dT} = (C_V + R) + R = C_V + 2R$$

Для двухатомного газа получаем

$$C_V = \frac{5}{2} R \text{ и } C = \frac{5}{2} R + 2R = \frac{9}{2} R.$$

5. Воспользуемся законом сохранения энергии с учетом работы батареи, изменением энергии конденсатора и энергии, расходуемой электромотором:

$$A_b = \Delta W + Q.$$

До переключения ключей батарея не совершает работу, поэтому мотор потребляет энергию

$$Q_1 = -\Delta W = -\left( \frac{CU_\tau^2}{2} - \frac{CU_0^2}{2} \right) = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{CU_\tau^2}{2}$$

После переключения ключей ток будет течь до тех пор, пока конденсатор не зарядится до ЭДС батареи. При этом батарея совершит работу по перемещению заряда

$$A_b = \varepsilon \Delta q = (C\varepsilon + CU_\tau) \varepsilon,$$

а мотор получит энергию

$$Q_2 = (C\varepsilon + CU_\tau)\varepsilon - \left( \frac{C\varepsilon^2}{2} - \frac{CU_\tau^2}{2} \right) = \frac{C\varepsilon^2}{2} + CU_\tau\varepsilon + \frac{CU_\tau^2}{2}.$$

В сумме за два этапа мотор израсходует энергию

$$Q_1 + Q_2 = \frac{C}{2}(\varepsilon^2 + U_0^2 + 2U_\tau\varepsilon).$$

Зная КПД мотора и энергию, необходимую для подъема груза на один метр, можно вычислить итоговую высоту подъема:

$$H = \frac{\eta(Q_1 + Q_2)}{Q_0} = \frac{\eta C}{2Q_0}(\varepsilon^2 + U_0^2 + 2U_\tau\varepsilon) \approx 4 \text{ м}$$

6. Клинок будет гарантированно отбит только в том случае, если за время прохождения им пути, равного своей длине (примем ее 20 см), меч совершит полный оборот (предполагаем, что точная траектория полета клинка неизвестна и надо охватить всю область). Задача свелась к оценке скорости движения клинка. За исходные данные можно взять школьные нормативы по физкультуре метания мяча или собственный опыт бросания камней. Максимальный полет камня составляет порядка 30 м до удара о землю (угол бросания – 45 градусов). Это соответствует скорости порядка 17 м/с. Получаем, что время прохождения собственной длины клинком составляет 12 мс. Частота вращения меча – порядка 85 оборотов в секунду, что совершенно нереально для человеческой руки. Стоит добавить, что древние мастера наверняка бросали клинки с большей скоростью.

Чтобы клинок был отбит с вероятностью 50%, необходимо, чтобы за время прохождения клинком своей длины меч сделал половину оборота. Это соответствует частоте 40 оборотов в секунду.

Последний вопрос в задаче сводится к оценке максимально возможной частоты вращения меча. Необходимо учесть два фактора – скорость реакции воина и силовую подготовку.

а) Известно, что время реакции человека порядка 0,1 сек (от момента внешнего раздражения до сокращения мышц). Эту величину можно получить, пытаясь как можно быстрее стучать пальцами по столу. Следовательно, максимальная частота вращения не может превышать 10 оборотов в секунду.

б) Пусть масса меча  $m = 1,5 \text{ кг}$ . Пусть центр масс меча отстоит от рукоятки на расстояние  $h = 20 \text{ см}$ . Предположим, что воин может держать за счет мышц запястья, которым он крутит меч, груз массой  $M = 15 \text{ кг}$ . Найдем, при какой скорости вращения  $\omega$  меча центробежная сила вырвет меч из запястья. Имеем

$$m\omega^2 h = Mg.$$

Подставляя численные значения, получаем, что  $\omega = 22 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ . Это соответствует скорости 3,5 оборота в секунду.

Принимаем скорость 3,5 оборота в секунду (практика показывает, что эта скорость близка к истине). Вероятность выживания при одном бросании составит  $3,5/85 = 0,04$  (4%). При 10 бросаниях –  $10^{-14}$  ( $10^{-12}\%$ ).

7. Изображение будет состоять из 3 частей (см. рис.):

1) Изображение, сформированное лучами, прошедшими через линзу 1. Луч  $A_1C_1$  – изображение  $AB$  в линзе 1 (по горизонтали от точки  $2F$  до бесконечности).

2) изображение, сформированное лучами, прошедшими через линзу 1 и линзу 2. Изображение луча  $A_1C_1$  в линзе 2 будет лежать на прямой  $B_2C_2$ . На линзу 2 попадают только те лучи, которые создают изображение за точкой  $C_1$  справа.

$C_2$  – изображение точки  $C_1$ . Расстояние  $d$  от  $C_2$  до линзы 2:

$$\frac{1}{-0,25F} + \frac{1}{d} = \frac{1}{F}, \quad d = F/5,$$

где  $-0,25F$  – расстояние от  $C_1$  до линзы 2, с учетом того, что точка  $C_1$  – мнимая.

Лучи, вышедшие из точки  $B$ , после преломления в линзе 1 пойдут параллельно прямой  $BO_1$ , т.к.  $B$  находится в фокальной плоскости. После преломления в линзе 2 они соберутся в точке  $B_2$ .

Любая точка отрезка  $BC$  будет создавать в системе линз изображение, лежащее на отрезке  $B_2C_2$ .

Точки отрезка  $AC$  не будут видны в системе линз. Расстояние от точки  $C$  до линзы 1

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{4,5F} = \frac{1}{F}$$

$d_0 = 9F/7$ , откуда можем посчитать, что  $BC$  составляет  $2/7 AB$ .

3) изображение, сформированное лучами, прошедшими только через линзу 2.

В линзе 2 будет видна только часть предмета  $AD$  ( $D$  – середина отрезка  $AB$ ). Расстояние от  $D$  до линзы 2 равно  $2,5F$ .

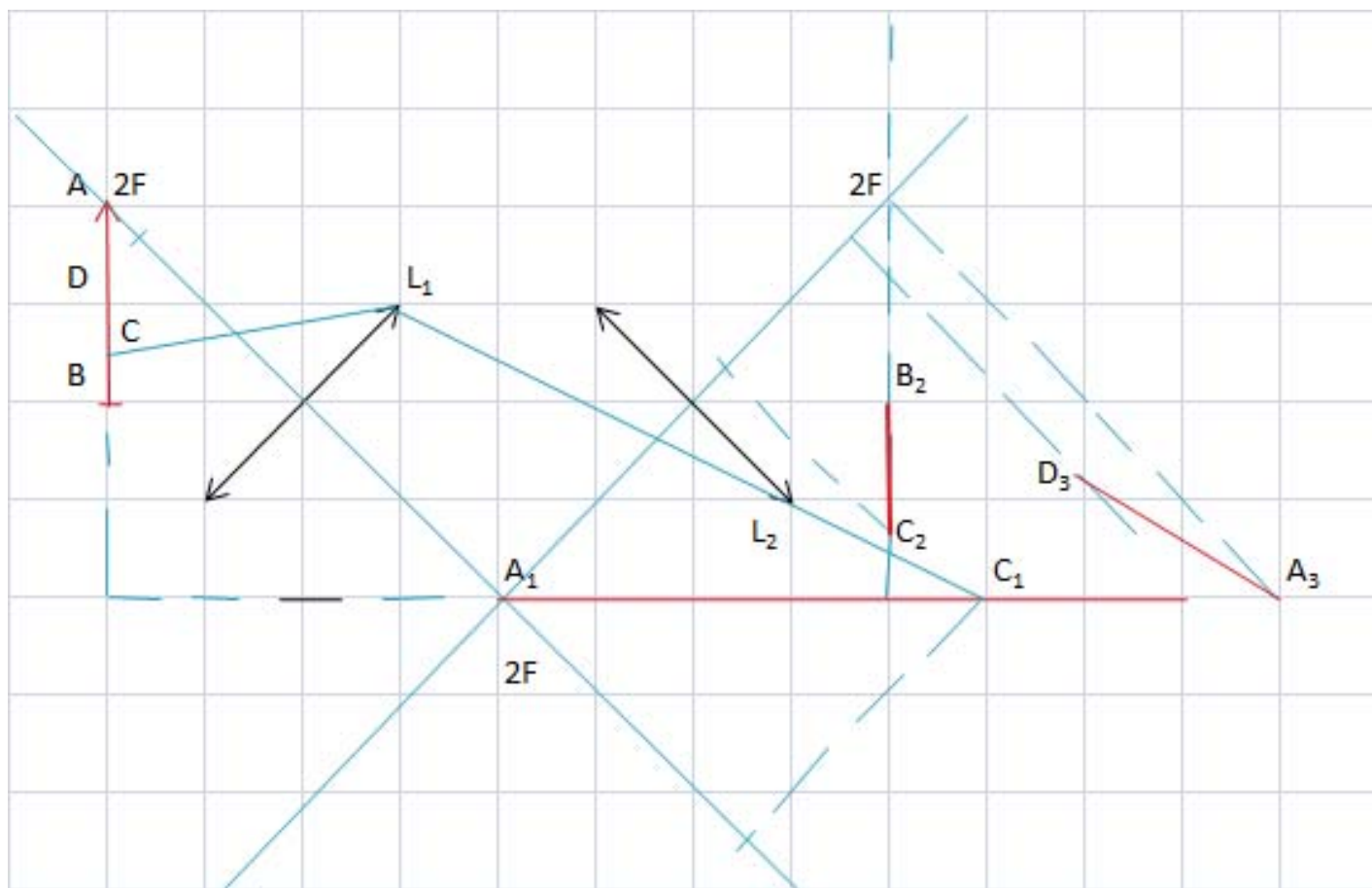
Расстояние от  $D_3$  до линзы 2

$$\frac{1}{d_3} + \frac{1}{2,5F} = \frac{1}{F}$$

$d_3 = 5F/3$ .

Расстояние от главной оси линзы 2 до  $D_3$  равно  $\frac{7}{2} \cdot \frac{5}{3} / \frac{5}{2} = \frac{7}{3}$ .

Расстояние от  $A$  до линзы 2 равно  $2F$ . Значит, точка  $A_3$  находится также на расстоянии  $2F$  от линзы.



Ответ: изображение получается из отрезков  $B_2C_2$ ,  $A_3D_3$  и луча  $A_1C_1$ .

8. Для модуля скорости  $v$  справедливо равенство  $\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v$ . Действительно, мощность потерь энергии при движении равна  $N = -\vec{F}\vec{v} = -\alpha v^2$ . С другой стороны, эта мощность равна уменьшению кинетической энергии тела, т.е.  $N = -\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -mv\frac{dv}{dt}$ . Сравнивая эти два равенства, получаем упомянутое выше дифференциальное уравнение для скорости. Решая его с начальным условием  $v(0) = v_0$ , получим  $v = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)$ . Далее можно записать

$$-\frac{\alpha}{m}v = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v,$$

где  $x$  – пройденное телом расстояние. Разрешая данное уравнение с начальным условием  $v = v_0$  при  $x = 0$ , получим  $v = v_0 - \frac{\alpha}{m}x$ .

Теперь наша задача состоит в нахождении полного расстояния  $S$ , пройденного телом до остановки. Это расстояние равно

$$S = L\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{N}\right) + \sum_{i=0}^{N-1} x_i \theta,$$

где  $\theta = \frac{2\pi}{N}$ ,  $x_i = L - \frac{L}{N}i$  – радиус, по которому движется груз на ниточке после  $i$ -го перегиба.

Суммируя, получаем  $S = L\pi\left(\frac{N-2}{2N}\right) + \frac{2\pi}{N}\left(LN - \frac{L}{N} \frac{N(N-1)}{2}\right) = \frac{3}{2}L\pi$  и не зависит от  $N$ .

Теперь, зная пройденное расстояние, можно найти скорость при соударении, а зная скорость, можно найти и искомое время:

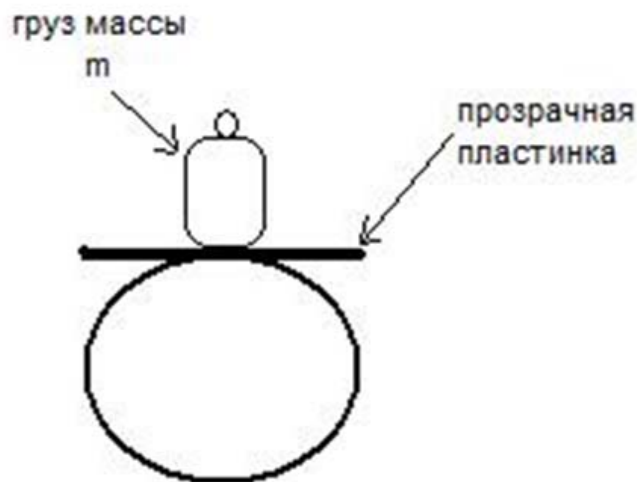
$$v_1 = v_0 - \frac{3L\pi\alpha}{2m} \Rightarrow v_0 - \frac{3L\pi\alpha}{2m} = v_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{m}\tau\right) \Rightarrow \tau = -\frac{m}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{3L\pi\alpha}{2mv_0}\right)$$

(стоит знак « $\rightarrow$ », т.к. значение логарифма отрицательное).

Обращаем внимание, что решение справедливо при достаточно высоких скоростях, т.е. когда  $v_0 > \frac{3L\pi\alpha}{2m}$ .

### 9. Алгоритм проведения эксперимента:

1. Загружаем смесь в воздушный шарик. Плотнo его завязываем. Измеряем начальный объем  $V_0$  (определяем радиус).
2. Шарик раздувается. Примерно через 1-2 часа объем перестает увеличиваться. Измеряем длину окружности обхвата шарика (в нескольких местах, т.к. шар не идеальный, и мы должны определить средний радиус). Рассчитываем  $V$ .
3. Чтобы определить избыточное давление, соберем установку.

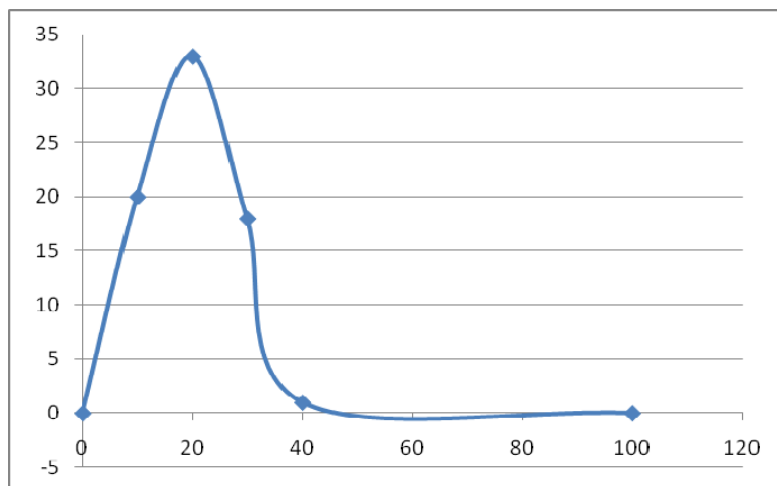


Обводим маркером на прозрачной пластине ту часть, которой она соприкасается с шариком, тогда  $P = mg/S$ , где  $S$  – обведенная площадь.

Давление получается порядка  $10^3$  Па. Таким образом, можно пренебречь  $P$  по сравнению с  $P_{\text{атм}}$ .

4. Рассчитываем  $v = P_{\text{атм}}(V - V_0)/RT$ , где  $P_{\text{атм}}$  – атмосферное давление,  $T$  – температура воздуха.
5. Проводим серию опытов для различных соотношений сахара и воды, рассчитываем  $v$ .
6. Строим график зависимости  $v$  от соотношения масс воды и сахара.
7. Находим, при каком соотношении  $v$  максимально.

шарик		красный	зеленый	фиолетовый	синий	
$m$ сахара, г	0	2	4	6	8	20
$m$ воды, г	20	18	16	14	12	0
% сахара в смеси вода+сахар	0	10	20	30	40	100
$l_0$		19	19	19	19	
$l_{\max}$		32	38	30	20	
$V, 10^6 \text{ м}^3$	0	492	812	438	19	0
$\nu, 10^{-3} \text{ моль}$	0	20	33	18	1	0



Т.е количество выделившегося газа максимально при  $(20 \pm 5)\%$  сахара в смеси сахар-вода.

**10.** Примем, что мощность источника тепла достаточна для поддержки постоянной температуры окружающей среды (вода в кастрюле), вода перемешивается для однородности температуры по объему и т.д. Пусть  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $c$  – удельная теплоемкость,  $\rho$  – плотность,  $R$  – характерный размер яйца,  $T_1$  – температура внешней среды (кипящая вода),  $T_0$  – исходная температура яйца,  $T_c$  – температура, при которой сворачивается белок в яйце.

Количество энергии, которое необходимо затратить для нагрева всего яйца до температуры  $T_c$ :

$$U = \rho V C \Delta T = \rho \frac{4\pi R^3}{3} C (T_c - T_0)$$

Найдем поток энергии, которая передается через поверхность яйца в единицу времени через единицу площади:

$$J = k(T_1 - T_0) / R$$

Через всю площадь:

$$P = 4\pi R^2 J = 4\pi R^2 k (T_1 - T_0) / R$$

Время, через которое сварится яйцо:

$$\tau = \frac{U}{P} = \frac{\rho C R^2}{3k} \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0}$$

Видно, что время варки пропорционально квадрату радиуса.

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{2/3} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{2/3} = \left(\frac{2000}{65}\right)^{2/3} \approx 9,8$$

## Математика

1. Рассмотрим многочлен  $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x$ . Очевидно, что  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Исследуем поведение функции  $f(x)$ . Найдем ее экстремумы из уравнения  $f'(x) = 0$ . Отсюда получим

$$4x^3 + 3x^2 + 4x + 3 = (4x + 3)(x^2 + 1) = 0.$$

Отсюда видно, что у функции есть всего один экстремум (ясно, что это минимум) при  $x = -\frac{3}{4}$ .

Можно заметить, что  $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{315}{256}$ , то есть точка  $x = -\frac{3}{4}$  является корнем исходного уравнения.

Поскольку  $f(x) > f\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \forall x \neq -\frac{3}{4}$ , то других корней нет.

2. При правильной игре выигрывает второй игрок. Опишем его стратегию.

Случай 1. Перед ходом второго игрока на доске нет ни одной клетки с тремя фишками в вершинах. Тогда второй игрок должен ходить «симметрично» относительно центра доски предшествующему ходу первого.

После своего хода второй игрок не может оставить клетку с тремя фишками в вершинах (т. е. клетку, которая принесет победу первому игроку), так как все его предшествующие ходы делались «симметрично» относительно центра доски, а тогда должна существовать еще одна клетка с тремя фишками в вершинах.

Случай 2. Перед ходом второго игрока есть клетка с тремя фишками в вершине. В четвертую вершину второй игрок ставит свою фишку и побеждает

3. Рассмотрим касательную к параболе в точке с абсциссой  $\frac{A+B}{2}$  и прямую, проходящую через точки на параболе с абсциссами  $A, B$ . Докажем, что они параллельны. Действительно, угловой коэффициент касательной равен производной в этой точке, то есть  $K_{\text{кас}\frac{(A+B)}{2}} = 2a \frac{(A+B)}{2} + b = a(A+B) + b$ . Угловой коэффициент прямой равен  $K_{\text{пр.}AB} = \frac{y(A) - y(B)}{A - B} = \frac{a(A^2 - B^2) + b(A - B)}{A - B} = a(A+B) + b$ .

Так как  $P_i, P_{k-i}, P_j, P_{k-j}$  - четырехугольник, то никакая пара из четырех точек не совпадает. Рассмотрим пары  $P_i, P_{k-i}$  и  $P_j, P_{k-j}$ . Очевидно (вследствие разбиения отрезка  $AB$  на равные части), что середина отрезка  $AB$  будет также серединой отрезков с вершинами  $P_i, P_{k-i}$  и  $P_j, P_{k-j}$ .

Но тогда оба отрезка будут параллельны касательной к параболе в точке с абсциссой  $\frac{A+B}{2}$ , то есть параллельны друг другу. Таким образом, четырехугольник  $P_i, P_{k-i}, P_j, P_{k-j}$  - трапеция, что и требовалось доказать.

4. Разобьем весь круг на 200 частей длиной 5 м каждая так, что некоторая одна из них целиком входит в 5-метровую зону, что контролируется охотниками. Докажем, что страус в какой-то момент времени окажется в этой части. За 1 минуту между остановками страус пробегает  $180\sqrt{3}$  метров, а за 170 минут он окажется в точке примерно на 0,75 м (<5 м) дальше исходной (по направлению движения). Поскольку этот сдвиг постоянный, через какое-то время страус гарантированно побывает в каждой части.



5. Справа в уравнении стоит число, кратное трем. Следовательно, хотя бы одна из скобок слева делится на 3. Заметим, что число  $x^{2k-1} + y^{2k-1} + z^{2k-1}$ ,  $k \in N$ , делится на 3 только если остатки от деления на 3 чисел  $x, y, z$  одинаковы или попарно различны (т.е. равны 0,1,2). Как видим, свойство делимости на 3 чисел данного вида никак не зависит от  $k$ , значит, каждая скобка кратна 3, а потому вся левая часть уравнения делится, как минимум, на  $3^{1005}$ .

Осталось определить максимальную степень тройки (обозначим ее через  $N_{\max}$ ), делящую 2010! нацело. Для этого составим таблицу, в верхней строке которой будем писать степень тройки  $3^k$ , а в нижней – число, соответствующее тому, сколько среди  $1, 2, \dots, 2010$  имеется чисел, которые делятся на  $3^k$  и не делятся на  $3^{k+1}$ .

$3^k$	$3^6$	$3^5$	$3^4$	$3^3$	$3^2$	3
$N(k)$	2	6	16	50	149	447

Эта таблица строится следующим образом: если мы знаем  $N(k), \dots, N(6)$ , то

$$N(k-1) = \left\lfloor \frac{2010}{3^{k-1}} \right\rfloor - N(k) - \dots - N(6). \text{ Так, например, } N(5) = \left\lfloor \frac{2010}{3^5} \right\rfloor - 2 = 6$$

Следовательно,  $N_{\max} = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 16 + 3 \cdot 50 + 2 \cdot 149 + 1 \cdot 447 = 1001$ . Как видим,  $N_{\max} < 1005$  и поэтому данное уравнение не имеет целочисленных решений.

6. Заметим, что прямая  $A_7P$  пересекает окружность  $\omega$  в точке  $P_1$  такой,

что  $\angle P_1A_7A_8 = \angle P_1A_{14}A_{15} = \alpha$  и  $P_1P = PQ$ , где  $\alpha = \angle PA_0A_1$ . Построим последовательность  $\{P_i\}, i = 1, \dots, 286$ , точек на окружности  $\omega$  такую, что  $P_{k+1}$  является точкой пересечения прямой  $A_{7k+7}P_k$  с данной окружностью, отличной от  $P_k$ , и, следовательно, удовлетворяет условиям:

$\angle P_{k+1}A_{7k+7}A_{7k+8} = \angle P_{k+1}A_{7k+14}A_{7k+15} = \alpha$ ,  $P_{k+1}P_k = PQ$ . Очевидно, мы получим  $P_{286} = Q$ . Это означает, что  $PQ$  является стороной правильного вписанного 287-угольника, поэтому

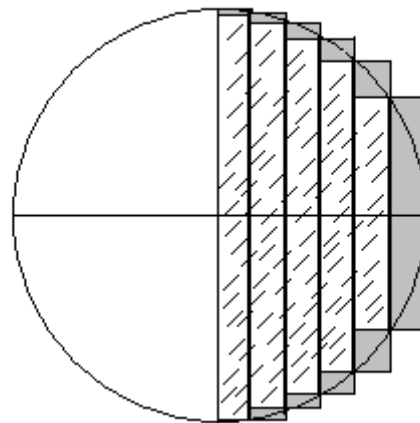
$$PQ = 2R \cdot \sin\left(\frac{\pi}{287}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{287}\right) / \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2009}\right).$$

7. Расположим отрезки пути муравья параллельно друг другу. Схема такого расположения приведена на рисунке (отрезки – жирные линии). Пусть длина пути муравья равна  $L$  метров. Тогда площадь заштрихованной части равна  $0,01L$  м<sup>2</sup>. Площадь части, выделенной серым цветом, как несложно видеть, равна  $2 \cdot 0,01L$  м<sup>2</sup>. В сумме эти площади больше

площади половины круга, равной  $\frac{\pi}{2}$  м<sup>2</sup>. Следовательно,

$$L + 2 > 100 \frac{\pi}{2} = 50\pi > 50 \cdot 3,14 = 157 > 155,$$

что и требовалось доказать.



8. Пусть  $h$  – высота пирамиды,  $O$  – проекция вершины на плоскость основания. Поскольку все двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны  $45^\circ$ , то длины перпендикуляров, опущенных из точки  $O$  на стороны основания, равны  $h$ . Следовательно, основание пирамиды – многоугольник, описанный вокруг окружности радиуса  $h$ . Его площадь  $S > \pi h^2$ . С другой стороны,

$S = \frac{1}{2}Ph$  и  $S = \frac{3V}{h}$ , откуда  $S^2 = \left(\frac{Ph}{2}\right)^3 \frac{h}{3V} = \frac{P^3 h^4}{24V} > \pi^2 h^4$ . Сокращая на  $h^4$ , получим  $P^3 > 24\pi^2 V$ ,

откуда  $P > \sqrt[3]{24\pi^2 V} > \sqrt[3]{24 \cdot 9V} = 6\sqrt[3]{V}$ , что и требовалось доказать.

$$9. f(x) = \sqrt{m}g_1(x) + \sqrt{n}g_2(x)$$

Периоды  $g_1$  и  $g_2$  равны  $T_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}$  и  $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{m}}$  (при  $n, m > 0$ ).  $f(x)$  периодична, если  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{l}{k}$

( $k, l \in \mathbb{N}$ ), т.е. если  $\sqrt{\frac{m}{n}} \frac{1}{2\pi} = \frac{l}{k} = q, q \in \mathbb{Q}_+$ . Также  $f(x)$  будет периодичной, если одно из чисел  $m$  или  $n$  равно 0.

Следовательно,  $f(x)$  периодична, если выполнено  $\begin{cases} (m; n) = (4\pi^2 q^2 n; n), & n > 0, \quad q \in \mathbb{Q}; \\ n = 0, & m \geq 0, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$

10. а) Если мы хотим, чтобы число коснувшихся игроков было не более 3, то каждый предмет могут тронуть 3, 2, 1 или 0 игроков. Возьмем  $n$  игроков, каждому из них присвоим номер от 1 до  $n$ . Если предмет тронули  $k$  человек, то ему соответствует  $k$  чисел – номера этих игроков. Чтобы смочь определить «штрафной» предмет, необходимо, чтобы ни у каких двух предметов не совпадали набор этих чисел. Тогда наибольшее кол-во предметов, которые можно проверить, равно сумме сочетаний из  $n$  по  $k$ , т.е.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq 1000$$

$$n(n^2 + 5) \geq 5994$$

$$n_{\min} = 19$$

б) Для разнообразия приведем метод решения, отличный от предыдущего пункта. Представим номер каждого предмета в двоичном исчислении. Назначим каждому игроку номер, соответствующий разряду двоичного числа. Если данный разряд у предмета равен 1, игрок касается предмета, если 0 – не касается. Номера игроков, которые коснулись «штрафного» предмета, соответствуют номеру предмета в двоичном исчислении. Для нумерации 1000 предметов необходимо минимум 11 двоичных разрядов, включая нулевой ( $1024 > 1000$ ), один из которых можно найти методом исключения. Таким образом, необходимо минимум 10 игроков.

# УВАЖАЕМЫЙ АБИТУРИЕНТ!

Вы поступаете на **ФИЗТЕХ**! И это прекрасно – здесь Вы получите превосходное базовое образование по физике и математике, станете специалистом высокого класса в выбранной Вами области знаний.

Но в наше время бурного научно-технического прогресса недостаточно знать только физику и математику. Основные открытия сейчас делаются на стыке естественных наук – физики, химии и биологии. Львиная доля финансирования науки в развитых странах выделяется в настоящее время на области естествознания, связанные с человеком – медицину, молекулярную химию и биологию, биохимию, биофизику, экологию.

Если Вам нравится математическое моделирование химических, биологических и социальных систем с применением современных суперкомпьютеров, если Вы хотите прикоснуться к живой клетке или постичь тайны управляемого термоядерного синтеза, если Вас привлекает участие в международной программе «Геном человека» или поиск лекарства против рака и СПИДа, Вас с нетерпением ждут на **Факультете Молекулярной и Биологической Физики**. Представляем наши базовые кафедры и их научные направления:

## БИОФИЗИКА И БИОТЕХНОЛОГИИ

- **ФИЗИКА ЖИВЫХ СИСТЕМ** – биомедицина, трансплантология, искусственные органы; биоинформатика и биоинженерия; биофизика, нейронауки; физическое и математическое моделирование живых систем от клеточной мембраны до социальных систем и биосферы в целом.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОФИЗИКА** – программа «Геном человека», протеомика; разработка быстрых методов определения нуклеотидных последовательностей ДНК и РНК; биологические микрочипы, молекулярная вирусология, изучение физики белка и нуклеиновых кислот.
- **ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКАЯ БИОЛОГИЯ И БИОТЕХНОЛОГИЯ** – геновая инженерия, молекулярная иммунология и онкология, биоинженерия белков и биологических мембран, биотехнология, создание трансгенных организмов.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ МЕДИЦИНА** – изучение физико-химических основ развития социально значимых болезней человека; разработка, методы медицинской диагностики.
- **БИОХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА** – изучение кинетики и механизмов реакций в биологических и химических системах, разработка ресурсо- и энергосберегающих безотходных технологий.

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И НАНОТЕХНОЛОГИИ

- **ФИЗИКА И ХИМИЯ ПЛАЗМЫ** – исследования по управляемому термоядерному синтезу, водородная и плазменная энергетика, участие в проекте ITER.
- **ФИЗИКА СУПРАМОЛЕКУЛЯРНЫХ СИСТЕМ** – молекулярная электроника, нанотехнологии, фотоинформационные технологии и фотоэнергетика.
- **ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА** – создание новых лазеров, разработка сверхбыстрых кинетических методик, фемтохимия.
- **МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА** – импульсные плазменные системы, молекулярные лазеры, высокотемпературная газодинамика, масс-спектрометрический анализ, физика высокочастотных разрядов, излучение неравновесной плазмы, промышленная экология.
- **ФИЗИКА ПОЛИМЕРОВ** – создание новых сверхпрочных полимеров, экологические проблемы использования полимерных материалов.
- **ФИЗИКА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ** – физика и химия высокотемпературной плазмы, теплофизика импульсных воздействий, проблемы термоядерной энергетике.
- **ФИЗИКА ОРГАНИЗОВАННЫХ СИСТЕМ И ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ** – изучение строения молекул и твердых тел, свойств вещества при высоких концентрациях энергии, элементарных процессов, кинетики и механизмов сложных химических реакций.
- **ФИЗИЧЕСКАЯ И ХИМИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА** – физика плазмы, газовых разрядов, лазеров; изучение воздействия излучения на вещество.
- **ФИЗИКА И ХИМИЯ НАНОСТРУКТУР** – синтез и получение новых углеродных материалов, в том числе алмазоподобных, создание приборов и методов исследования этих материалов.

## СУПЕРКОМПЬЮТЕРЫ

- **ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ** – развитие аппаратных и инструментальных программных средств, создание прикладного программного обеспечения, создание передовых технологий в области высокопроизводительных вычислений.

## Как добраться до МФТИ

- От ст. метро «Савеловская» или «Тимирязевская» электричкой Савеловского направления до платформ «Новодачная» или «Долгопрудная». Далее 5 минут пешком до МФТИ.
- От ст. метро «Алтуфьево» автобусом № 545 до остановки «МФТИ».
- От ст. метро «Речной вокзал» автобусом № 368 или маршрутным такси до станции «Долгопрудная».
- На автомобиле по Дмитровскому шоссе.



## Статистика приема в МФТИ в 2009 году

Факультет	Подано заявлений	Зачислено	Конкурс по заявлениям	Ср. балл
ФРТК	176	89	1,98	263,34
ФОПФ	127	87	1,46	276,62
ФАКИ	156	79	1,97	250,91
ФМБФ	165	86	1,92	254,42
ФФКЭ	169	72	2,35	247,64
ФАЛТ	143	52	2,75	237,58
ФУПМ	210	103	2,04	272,14
ФПФЭ	169	93	1,82	258,61
ФИВТ	177	64	2,77	267,75
НБИК	52	27	1,93	258,11
<b>Итого</b>	<b>1544</b>	<b>752</b>	<b>2,05</b>	<b>260,07</b>