Решение задач
Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ МФТИ
2006/2007 года

Физика

1. (*5 баллов*) Нормаль к каждой стенке направим внутрь камеры. Введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы нормали к стенкам 1, 2 и 3 имели координаты соответственно $\vec{n}_1(1,0,0)$, $\vec{n}_2(0,1,0)$ и $\vec{n}_3(0,0,1)$. Очевидно, что $\vec{n}_{i+3} = -\vec{n}_i$ для всех $i = \overline{1,3}$. Из условия следует, что

$$\frac{(\vec{V},\vec{n}_4)}{V} = -\frac{V_x}{V} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_x\right) = -\sin\alpha_x,\ \frac{(\vec{V},\vec{n}_5)}{V} = -\frac{V_y}{V} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_y\right) = -\sin\alpha_y,$$

$$\frac{(\vec{V},\vec{n}_6)}{V} = -\frac{V_z}{V} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_z\right) = -\sin\alpha_z$$

т.е. $V_x = V\sin\alpha_x$, $V_y = V\sin\alpha_y$, $V_z = V\sin\alpha_z$.

Разложим движение мяча на независимые движения вдоль осей. Задача сводится к «метаниям» мяча между двумя параллельными стенками, удаляющимися друг от друга с заданными скоростями. Из принципа относительности Галилея и закона сохранения импульса (стенки считаем достаточно массивными) очевидно, что скорость мяча после каждого удара об удаляющуюся от него стенку уменьшается на $2V_{стенки}$. Т.к. в нашей задаче стенки удаляются с разными скоростями, то удобнее перейти в такую инерциальную систему отсчета, в которой они будут двигаться с равными по модулю и противоположными по направлению скоростями – число ударов мяча от этого, очевидно, не изменится.

Если проекции скоростей на ось x стенок 1 и 4 равны соответственно V_1 и V_4, то, перейдя в систему отсчета, движущуюся вдоль оси x со скоростью $\frac{1}{2}(V_1+V_4)$, получим для скорости первой стенки $V_1' = V_1 - \frac{1}{2}(V_1+V_4) = \frac{1}{2}(V_1-V_4)$, а для четвертой: $V_4' = V_4 - \frac{1}{2}(V_1+V_4) = \frac{1}{2}(V_4-V_1) = -V_1'$, т.е. что и требовалось. Скорость мяча в этой системе равна $V_x' = V_x - \frac{1}{2}(V_1+V_4)$. При каждом ударе о любую из стенок от модуля скорости мяча будет отниматься одна и та же величина – удвоенный модуль скоростей стенок (V_1-V_4) до тех пор, пока мяч уже не сможет догнать одну из них. Таким образом, число произошедших ударов будет равно $k_x = \left[\left|\frac{V_x-(V_1+V_4)/2}{V_1-V_4}\right|\right]$. Рассуждая аналогично, для остальных стенок получим

$$k = \left[\left|\frac{V\sin\alpha_x-(V_1+V_4)/2}{V_1-V_4}\right|\right] + \left[\left|\frac{V\sin\alpha_y-(V_2+V_5)/2}{V_2-V_5}\right|\right] + \left[\left|\frac{V\sin\alpha_z-(V_3+V_6)/2}{V_3-V_6}\right|\right].$$

Из числовых данных задачи $\alpha_x = \alpha_z = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_y = \frac{\pi}{4}$, $V_1 = 1\ \ км/ч$, $V_2 = 2\ \ км/ч$, $V_3 = 3\ \ км/ч$, $V_4 = -4\ \ км/ч$, $V_5 = -5\ \ км/ч$, $V_6 = -6\ \ км/ч$ следует ответ $k = 24$.

Ответ: $k = 24$.

2. (*7 баллов*) Последовательное включение в действующую цепь левого и правого контуров назовем периодом, отдельное их включение – полупериодом. Пренебрегая э.д.с., которое создает собственно вертушка, считаем моменты переключения контактов *C* и *D* совпадающими, что исключает размыкание цепи, содержащей катушку и, следовательно, возникновения э.д.с., достаточных для пробоя. Считаем, что в момент переключения контактов ток через катушку сохраняется.

Рассмотрим случай бесконечной нагрузки. Тогда ток в левой полуцепи в первом полупериоде первого периода будет меняться по закону:

$$I=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right).$$

В момент $t=\frac{\pi}{4\omega}$ цепь переключится, и ток $I_0=\frac{\varepsilon}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}\frac{\pi}{4\omega}\right)\right)$ будет теперь течь в нулевой момент времени в правой полуцепи. Конденсатор изначально не заряжен. Процессы, протекающие в правой полуцепи, в общем случае описываются уравнением

$$q=A\sin\Omega t+B\cos\Omega t$$

$$I=A\Omega\cos\Omega t-B\Omega\sin\Omega t$$

где $\Omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$. Т.к. $q(0)=0$ и $I(0)=I_0$, получим

$$q=\frac{I_0}{\Omega}\sin\Omega t$$

$$I=I_0\cos\Omega t$$

Для того чтобы диод сработал, необходимо, чтобы ток обнулился раньше, чем вертушка разомкнет контур, т.е. чтобы выполнялось $t_0<\frac{\pi}{4\omega}$, где $t_0=\frac{\pi}{2}\sqrt{LC}$ – момент обнуления тока. Как видим из числовых данных задачи, это соотношение выполняется. Таким образом, диод оборвет гармонические колебания в правой цепи до того, как вертушка ее разомкнет. На конденсаторе останется заряд, который можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI_0^2}{2}=\frac{q_1^2}{2C}\ \Rightarrow\ q_1=\frac{I_0}{\Omega}.$$

Пусть диод сработал во время *n*-го периода. Покажем, что он сработает и в $(n+1)$-й период. Подставляя в закон процесса, происходящего в правой полуцепи, начальные условия $q(0)=q_n$ и $I(0)=I_0$, получим:

$$q=\frac{I_0}{\Omega}\sin\Omega t+q_n\cos\Omega t$$

$$I=I_0\cos\Omega t-q_n\Omega\sin\Omega t$$

Ток обнулится в момент t_0 такой, что $\mathrm{tg}\Omega t_0=\frac{I_0}{q_n\Omega}$. Чтобы диод сработал необходимо, чтобы

$$t_0<\frac{\pi}{4\omega}\ \text{или}\ \mathrm{tg}\Omega t_0=\frac{I_0}{q_n\Omega}<\mathrm{tg}\frac{\pi\Omega}{4\omega}.$$

Поскольку в предыдущие n периодов конденсатор только заряжался, т.е. его заряд рос, то

$$q_n\ge q_1\ \Rightarrow\ \frac{I_0}{q_n\Omega}\le\frac{I_0}{q_1\Omega}=1.$$

Но, как мы видели, $\Omega>\omega\ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\frac{\pi\Omega}{4\omega}>1=\frac{I_0}{q_1\Omega}\ge\frac{I_0}{q_n\Omega}$, т.е. неравенство $t_0<\frac{\pi}{4\omega}$ выполняется и диод, если он сработал в предыдущий период, сработает и в следующий. Т.к. он сработал в первый полупериод, то он всегда будет обрывать колебания в правой полуцепи (пока накопившийся на конденсаторе заряд не разорвет его).

Таким образом, в начале любого второго полупериода через катушку будет течь ток I_0 и, соответственно, конденсатору будет передаваться одна и та же величина энергии катушки. Если к моменту запуска $(n+1)-$го периода на конденсаторе уже содержался заряд q_n, то

$$\frac{q_n^2}{2C}+\frac{LI_0^2}{2}=\frac{q_{n+1}^2}{2C}\ \Rightarrow\ q_{n+1}^2=q_n^2+\left(\frac{I_0}{\Omega}\right)^2,$$

т.е. квадраты зарядов в конце полупериодов являются членами арифметической прогрессии. Таким образом, $q_n = \frac{I_0}{\Omega}\sqrt{n}$, а напряжение между клеммами в конце периодов в случае бесконечной нагрузки равно:

$$U_{AB} = U_0\sqrt{\omega t}\text{, где } U_0 = \varepsilon\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}\frac{\pi}{4\omega}\right)\right)\sqrt{\frac{2L}{\pi R^2 C}}.$$

Т.е. квадрат напряжения растет пропорционально времени, т.к. $t_n = \frac{\pi}{2\omega}n$ - длительность периода.

Рассмотрим теперь случай конечной нагрузки. В общем случае решение довольно громоздко и не выражается через элементарные функции, поэтому нагрузку мы будем полагать достаточно значительной. Поэтому, когда вертушка замыкает правую полуцепь, можно считать, что практически весь ток течет через конденсатор (поскольку добавочное омическое сопротивление много больше импеданса конденсатора). Таким образом, процесс зарядки конденсатора остается практически неизменным и диод также всегда будет обрывать его при нулевой энергии в катушке:

$$q_{нов}^2 = q^2 + LCI_0^2,$$

где q – заряд конденсатора в начале данного второго полупериода, $q_{нов}$ - заряд конденсатора после единичного акта зарядки. После этого диод обрывает течение тока в левой части правой полуцепи и конденсатор начинает разряжаться вплоть до следующего замыкания вертушкой второй полуцепи. Условие предельно возможного заряда состоит в том, что конденсатор успеет разрядится ровно на столько, на сколько успел зарядиться от катушки, т.е.

$$q_{нов}\exp\left(-\frac{\pi/4\omega+\left(\pi/4\omega - t_0\right)}{R_н C}\right) = q,$$

где t_0 - момент обнуления тока и находится, аналогично предыдущему случаю, из условия

$$\mathrm{tg}\Omega t_0 = \frac{I_0}{q\Omega}.$$

Ясно, что поскольку нагрузка велика, то и предельно возможный заряд на конденсаторе велик и время t_0 его зарядки мало и им можно пренебречь по сравнению с периодом обращения вертушки. Тогда получим:

$$q^2\exp\left(\frac{\pi}{\omega R_н C}\right) = q^2 + LCI_0^2 \Rightarrow U_{ABпредельное} \approx \varepsilon\sqrt{\frac{\omega L}{\pi R}}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}\frac{\pi}{4\omega}\right)\right)\sqrt{\frac{R_н}{R}}.$$

Ответ: $U_{AB} = U_0\sqrt{\omega t}$, $U_0 \approx 0{,}9$ В; $U_{ABпредельное} \approx 4{,}5$ В.

3. (*4 балла*) Рассмотрим медленный (квазистатический) процесс опрокидывания цилиндра набок. В результате створки повернутся на некоторый угол α, определяемый равенством

$$\left(p_2 - p_1\right)HR = mg\cos\alpha,$$

где p_1 и p_2 - соответственно давления в верхней и нижней части цилиндра, которые найдутся из уравнения адиабатического процесса:

$$p_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2 H\right)^\gamma = p_1\left(\left(\frac{1}{2}\pi R^2 + \alpha R^2\right)H\right)^\gamma$$

$$p_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2 H\right)^\gamma = p_2\left(\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - \alpha R^2\right)H\right)^\gamma$$

где H - высота цилиндра. Таким образом,

$$\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{-\gamma} - \left(1+\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{-\gamma} = \frac{mg\cos\alpha}{p_0 HR}.$$

Поскольку корень этого уравнения не выражается через элементарные функции, сделаем предположение о легкости створок и, соответственно, малости углов. Тогда

$$\alpha \approx \frac{\pi}{4\gamma}\frac{mg}{p_0 HR}$$

Пусть теперь к нижней части цилиндра подводят тепло. Процессы, протекающие с газом, описываются первым началом термодинамики:

$$dU = \delta Q - \delta A,$$

где $dU = C_V \nu dT$, $\delta A = pdV$, $dV = -R^2 H d\varphi$ и в любой момент $\left(p(\varphi) - p_1(\varphi)\right) HR\cos\varphi = mg$. Т.к. процесс, протекающий с газом в верхней части цилиндра, адиабатичен, то

$$p(\varphi) = p_0\left(1 + \frac{2\varphi}{\pi}\right)^{-\gamma} + \frac{mg\cos\varphi}{HR}.$$

Таким образом,

$$C_V \nu dT = \delta Q + \left(p_0\left(1 + \frac{2\varphi}{\pi}\right)^{-\gamma} + \frac{mg\cos\varphi}{HR}\right) HR^2 d\varphi.$$

Интегрируя в пределах от α до нуля и помня, что $pV = \nu RT$, получим для Q_1 приближенно

$$Q_1 \approx \frac{i}{4} mgR.$$

Рассмотрим медленный (квазистатический) процесс поднятия цилиндра. Процессы, протекающие с газами в обоих его частях, адиабатичны:

$$p_0\left(\frac{1}{2}\pi R^2 H\right)^{\gamma} = p_1'\left(\left(\frac{1}{2}\pi R^2 - \beta R^2\right) H\right)^{\gamma}$$

$$\left(p_0 + \frac{mg}{HR}\right)\left(\frac{1}{2}\pi R^2 H\right)^{\gamma} = p_2'\left(\left(\frac{1}{2}\pi R^2 + \beta R^2\right) H\right)^{\gamma}$$

причем равновесный угол поворота створок β определится равенством $p_1' = p_2'$, т.е. $\beta \approx \alpha$.

Пусть теперь к другой части цилиндра подводят тепло. Аналогично получим

$$C_V \nu dT = \delta Q + \left(p_0 + \frac{mg}{HR}\right)\left(1 + \frac{2\psi}{\pi}\right)^{-\gamma} R^2 H d\psi \text{ и } Q_2 \approx \frac{i}{4} mgR.$$

Как видно, в общем случае $Q_1 \neq Q_2$, однако для легких створок выполняется $Q_1 \approx Q_2$ при $mgR << p_0 \pi R^2 H$.

<u>Ответ:</u> $Q_1 \approx Q_2 \approx \frac{3}{4} mgR$.

4. (*6 баллов*) Пучок света предполагаем узким. В параксиальном приближении закон Снелла запишется в виде

$$\sin\varphi_1 = n\sin\psi_1 \;\Rightarrow\; \varphi_1 \approx n\psi_1$$

Если через h обозначить полуширину пучка, то $\varphi_1 \approx \frac{h}{R}$, $\psi_1 \approx \frac{\varphi_1}{n} \approx \frac{h}{nR}$.

Если при проходе через полусферу полуширина пучка уменьшилась на величину Δh, то

$$\Delta h \approx (\varphi_1 - \psi_1) 2R \approx 2\frac{n-1}{n} h.$$

Разделив угол падения луча на внутреннюю поверхность сферы горизонталью, проходящей через точку преломления, на две части, из соображений элементарной геометрии получим:

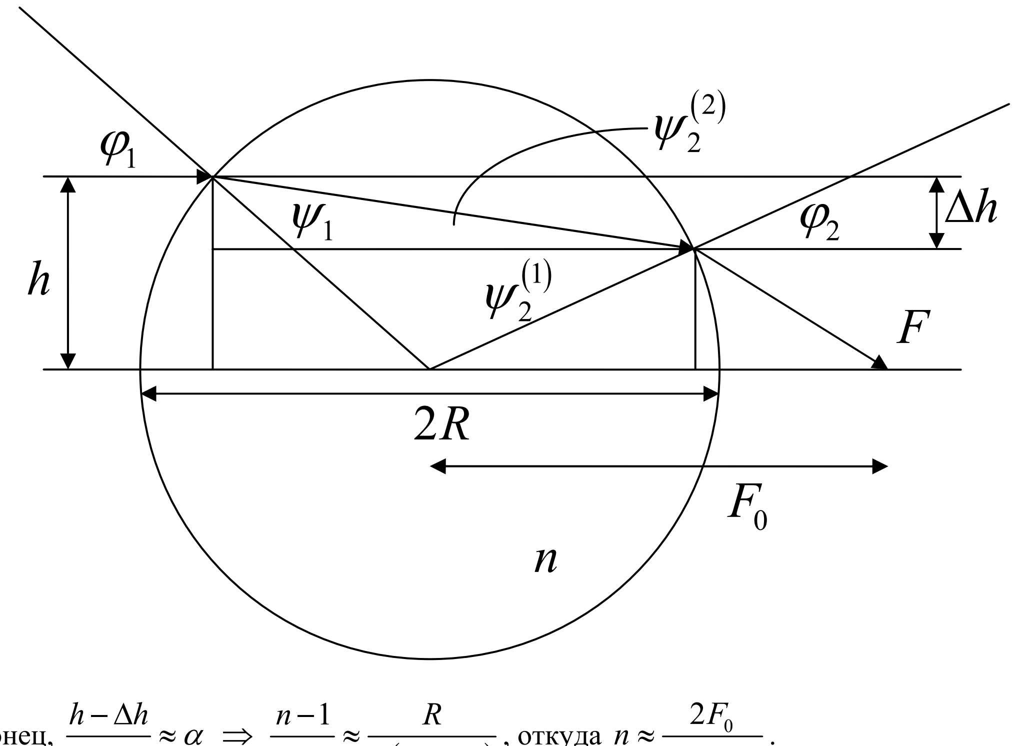
$$\psi_2^{(1)} \approx \frac{h - \Delta h}{R} \approx \frac{2-n}{n}\frac{h}{R},$$

и из теорем о внешнем угле треугольника и внутренних накрест лежащих:

$$\psi_2^{(2)} \approx \varphi_1 - \psi_1 \approx \frac{n-1}{n}\frac{h}{R}, \; \psi_2 = \psi_2^{(1)} + \psi_2^{(2)}.$$

Записав закон преломления Снелла вторично, получим угол α раствора луча после выхода из сферы:

$$n\sin\psi_2 = \sin\varphi_2 \;\Rightarrow\; \alpha = \varphi_2 - \psi_2^{(1)} \approx 2\frac{n-1}{n}\frac{h}{R}.$$



И, наконец, $\dfrac{h-\Delta h}{F_0 - R} \approx \alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{n-1}{n-2} \approx \dfrac{R}{2\left(R-F_0\right)}$, откуда $n \approx \dfrac{2F_0}{2F_0 - R}$.

<u>Ответ:</u> $n \approx \dfrac{2F_0}{2F_0 - R}$.

5. (*5 баллов*) Рассмотрим случай, когда заяц прыгает непрерывно (без отдыха), при этом после приземления столкновение с доской можно считать абсолютно неупругим. Пусть после n-го прыжка заяц имеет скорость w_n. Тогда после приземления зайца следующая доска имеет скорость

$$u_{n+1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} w_n$$

Закон сохранения импульса при следующем соскоке с доски:

$$\left(m_1 + m_2\right) u_{n+1} = m_2 w_{n+1} + m_1 u$$

$$w_{n+1} = v_0 + u$$

Здесь u – скорость доски после отскока зайца. При этом заяц будет иметь скорость:

$$w_{n+1} = u + v_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} w_n + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = a w_n + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

Здесь a – параметр прогрессии. Сделаем замену $w_n = y_n + c$ такую, что y_n представляет собой геометрическую прогрессию:

$$y_{n+1} + c = a y_n + ac + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

$$\left(a-1\right)c + v = 0 \Rightarrow c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \frac{1}{1-a} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_0$$

$$y_{n+1} = a y_n,\ \left|a\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = 0,\ \ w = \lim_{n\to\infty} w_n = v_0$$

С учетом того, что заяц отдыхает на (n+1)-ой доске то же время $t_n > 0$, что двигается в n-ом прыжке, средняя скорость за цикл «прыжок-отдых» равна:

$$\frac{w_n t_n + u_{n+1} t_n}{2 t_n} = \frac{w_n + u_{n+1}}{2} = \frac{w_n}{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{w_n}{2} \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2}$$

Начиная с некоторого прыжка можно приближенно считать, что для всех последующих прыжков скорость зайца в прыжке равна *w*, тогда средняя скорость за все время движения стремится к величине средней скорости за цикл «прыжок-отдых»:

$$\frac{m_1+2m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}w=\frac{m_1+2m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}v_0$$

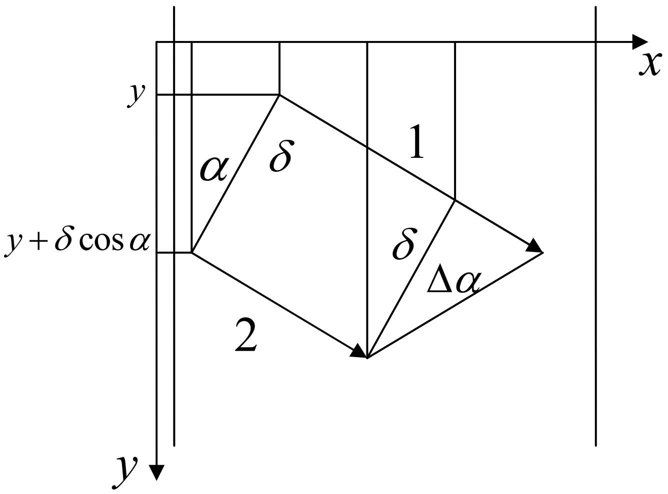
Исследуем частные случаи:

а) очень тяжелые доски, т.е. $m_1 >> m_2$ => доски остаются неподвижными, средняя скорость зайца равна $v_0/2$ (половину времени отдыхает).

б) массы досок и зайца равны: $m_1 = m_2$ => средняя скорость равна $\frac{3}{4}v_0$

<u>Ответ:</u> $\frac{m_1+2m_2}{2\left(m_1+m_2\right)}v_0$.

6. (*7 баллов*) Эффект изгиба луча при движении в толще стекла перпендикулярно градиенту показателя преломления связан с конечной шириной фронта луча, вследствие чего верхняя часть фронта и нижняя его часть за одно и то же время Δt проходят разные по длине пути 1 и 2, т.к. скорости их различаются из-за различия показателей преломления окружающей среды.



Введем прямоугольную декартову систему координат, направив ось ординат вдоль градиента показателя преломления, а ось абсцисс – вдоль первоначального направления распространения пучка. Таким образом, если к текущему моменту фронт волны наклонен под углом α к вертикали, а его поперечная ширина равна δ, то разница в пройденных путях составит

$$\Delta l \approx \frac{c\Delta t}{n\left(y\right)}-\frac{c\Delta t}{n\left(y+\delta\cos\alpha\right)}\approx\frac{c\Delta t\cdot\delta\cos\alpha}{n^2\left(y\right)}\frac{\Delta n}{\Delta y}.$$

Соответственно фронт дополнительно повернется на угол

$$\Delta\alpha\approx\frac{\Delta l}{\delta}=\frac{c\Delta t}{n^2\left(y\right)}\frac{\Delta n}{\Delta y}\cos\alpha .$$

С другой стороны, вдоль оси абсцисс луч преодолел расстояние

$$\Delta x\approx\frac{c\Delta t}{n\left(y\right)}\cos\alpha \text{, т.е. } \Delta\alpha\approx\frac{\Delta n}{n\Delta y}\Delta x .$$

Заметив, что если $y = y\left(x\right)$ - уравнение описываемой лучом траектории, то из геометрии

$$\text{tg}\alpha\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Вследствие слабого изменения показателя преломления с глубиной проникновения луча его изгиб будет слаб и $\text{tg}\alpha\approx\alpha$. Таким образом,

$$\Delta\alpha\approx\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\text{, т.е. }\frac{\Delta\left(\Delta y/\Delta x\right)}{\Delta x}\approx\frac{\Delta n}{n\Delta y}.$$

Подставляя теперь известную зависимость $n(y) = 1 + by$, в приближении малых изменений получим

$$\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \approx b\Delta x .$$

Просуммируем эти изменения:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx bx + const .$$

Поскольку $\mathrm{tg}\alpha \approx \Delta y/\Delta x$ и при $x = 0$ луч строго горизонтален, т.е. при таком x $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 0$, т.е. здесь $const = 0$. Соответственно,

$$\Delta y \approx bx\Delta x$$

Суммируя теперь эти изменения, получим $y(x) \approx \frac{1}{2}bx^2 + const_1$. Т.к. система координат введена таким образом, что луч проходит через начало отсчета, то $y(0) = 0$, т.е. $const_1 = 0$.

Таким образом, в приближении слабого изгиба луча он будет описывать параболу

$$y(x) = \frac{1}{2}bx^2 .$$

Найдем угол, под которым луч падает на внутреннюю поверхность стекла:

$$\beta \approx \mathrm{tg}\alpha\Big|_{x=l} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=l} \approx bl$$

По вертикали будет пройден путь $L = \frac{1}{2}bl^2$ и показатель преломления в точке выхода луча составит $n = 1 + \frac{1}{2}b^2l^2$. Из закона Снелла: $n\sin\beta = \sin\varphi$, в приближении малости углов луч выйдет из стекла под углом:

$$\varphi \approx n\beta \approx \left(1 + \frac{1}{2}b^2l^2\right)bl \approx bl$$

в принятых порядках малости.

Т.к. после отражения в зеркале и прохождения стекла луч должен выйти из него вертикальным, из принципа обратимости несложно видеть, что падать на поверхность стекла после отражения в зеркале он должен перпендикулярно. Таким образом, из геометрических соотношений получим связь между углом выхода из стекла φ после первого преломления и углом наклона γ зеркала к вертикали:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\gamma \text{, откуда } \gamma \approx \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{1}{bl},\ \gamma \approx 42{,}14^0 .$$

Примечание. Точное решение для траектории дает $1 + by = \mathrm{ch}(bx)$, а для искомого угла

$$\gamma = \frac{1}{2}\arccos\left(\mathrm{sh}(bl)\right),$$

что численно дает $\gamma \approx 42{,}13^0$. Здесь $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ и $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

Ответ: $\gamma \approx 42{,}14^0$.

7. (*8 баллов*) Из первого начала термодинамики

$$dU = \delta Q - \delta A$$

Т.к. $dU = C_V\nu dT$, $\delta Q = C\nu dT$, $\delta A = pdV$, то

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT} .$$

Поскольку из условия $dp = \lambda\rho\frac{dT}{T}$, а $\rho = \frac{\mu \cdot p}{RT}$, то $\frac{dp}{p} = \frac{\lambda\mu}{R}\frac{dT}{T^2}$ и, следовательно,

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right) \Rightarrow V = \frac{\nu RT}{p_0} \exp\left(\frac{\lambda\mu}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right).$$

Отсюда сразу находим, что

$$\frac{dV}{dT} = \frac{V}{T}\left(1 - \frac{\lambda\mu}{RT}\right).$$

Таким образом,

$$C = C_V + \frac{p}{\nu}\frac{dV}{dT} = C_V + \frac{pV}{\nu T}\left(1 - \frac{\lambda\mu}{RT}\right) = C_P - \frac{\lambda\mu}{T},$$

т.к. $C_P - C_V = R$. Численно получим $C \approx -77{,}7 \ \frac{Дж}{моль \cdot К}$.

Ответ: $C \approx -77{,}7 \ \frac{Дж}{моль \cdot К}$.

8. (*5 баллов*) Из графика находим зависимость объема газа от его температуры:

$$V = V_1 + (V_2 - V_1)\frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

Работу, совершаемую газом, найдем как интеграл

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \nu R \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{TdT}{\left[V_1 - (V_2 - V_1)\frac{T_1}{T_2 - T_1}\right] + \left[\frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1}\right]T}, \text{ т.е.}$$

$$A = \nu R(T_2 - T_1) + \nu R \frac{T_1 V_2 - T_2 V_1}{V_2 - V_1} \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Численно получим $A \approx 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

Ответ: $A \approx 2{,}5 \cdot 10^5$ Дж.

9. (*5 баллов*) Для того, чтобы в самолете достигалась невесомость, он должен двигаться с ускорением свободного падения, т.е. (в данном случае) двигаться по параболе

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$y = V_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Таким образом, действие сил сопротивление должно компенсироваться силой тяги двигателя, т.е. $\vec{F} = -\vec{F}_{сопр}$. Т.к. $\vec{F}_{сопр} = -kV\vec{V}$, то $\vec{F} = kV\vec{V}$. Работа силы тяги

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F} \cdot d\vec{l}\right) = k\int_1^2 \left(V\vec{V} \cdot \vec{V}dt\right) = k\int_0^T V^3 dt, \text{ т.к. } d\vec{l} = \vec{V}dt,$$

а $T = \frac{2V_0 \sin\alpha}{g}$ - время движения по траектории. Из закона сохранения энергии

$$V^2 = V_0^2 - 2gy = V_0^2 - 2gV_0 \sin\alpha \cdot t + g^2 t^2, \text{ откуда}$$

$$A = \frac{kV_0^4}{g} \int_0^{2\sin\alpha} \left(z^2 - 2\sin\alpha \cdot z + 1\right)^{\frac{3}{2}} dz = \frac{\sin\alpha}{4}\left(3\cos^2\alpha + 2\right) \cdot \frac{kV_0^4}{g},$$

где принято обозначение $z = \frac{gt}{V_0}$. Вспоминая, что $\alpha = \frac{\pi}{6}$, получим ответ в виде $A = \frac{17}{32}\frac{kV_0^4}{g}$.

Ответ: $A = \frac{17}{32}\frac{kV_0^4}{g}$.

10. (*8 баллов*) Объясним явление. Введем следующие обозначения: H – высота холодильника, b – ширина дверцы, l – расстояние от ручки (точки измерения силы) к ближайшему боковому краю, V – объем холодильной камеры, T_0 – температура воздуха в комнате (предполагается постоянной), T_x – нормальная температура в холодильной камере, $\Delta T = T_0 - T_x$, p_A – атмосферное давление.

Рассмотрим случай идеального холодильника без натекания. В этом случае после закрытия дверцы через некоторое время воздух внутри холодильника охладится на ΔT и будет оставаться при температуре T_x, что приведет к дополнительной разности давлений:

$$\Delta p = p_A \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Здесь изохорный процесс, поскольку число молей и объем камеры остаются постоянными. Найдем, какой дополнительный момент сил это создает для дверцы:

$$dF = \Delta p \cdot H dx$$

$$dM = dF \cdot x = \Delta p \cdot H x dx$$

Здесь ось x направлена от оси, на которой поворачивается дверца, к ручке. Интегрируя, получаем:

$$M = \Delta p \cdot H \cdot b^2 / 2$$

С другой стороны, момент силы, приложенной рукой к дверце, равен $M = \Delta F\left(b - l\right)$. Отсюда дополнительная сила, которую надо приложить к ручке холодильника, равна:

$$\Delta F = \frac{Hb^2 \Delta p}{2\left(b-l\right)} = \frac{Hb^2 p_A}{2\left(b-l\right)} \frac{\Delta T}{T_0}.$$

При существовании натечек воздуха внутрь холодильника давление внутри и снаружи выравнивается, и через большой промежуток времени сила стремится к предельному значению F_∞. Предполагая в качестве простейшей модели, что интенсивность натечек через микропоры пропорциональна разности давлений, а охлаждение воздуха внутри камеры происходит мгновенно (стенки холодные, теплоемкость газа малая, перемешивание газа быстрое), получаем экспоненциальную зависимость от времени:

$$F\left(t\right) = F_\infty + \Delta F \cdot e^{-t/\tau},$$

где τ – характерное время натечки, характеризующее степень герметичности холодильника.

Перенося F_∞ в левую часть и логарифмируя, получаем:

$$\ln\left(F\left(t\right) - F_\infty\right) = \ln \Delta F - \frac{t}{\tau} = a - bt$$

Имея экспериментальные точки $F\left(t\right)$, из предыдущего уравнения можно методом наименьших квадратов оценить ΔF и τ, а затем Δp и ΔT.

<u>Примечание.</u> Если охлаждение воздуха не происходит мгновенно, зависимость $F\left(t\right)$ сначала растет от F_∞ до некоторого максимума. Это зависит от мощности холодильника, объема камеры, скорости циркуляции воздуха внутри камеры и много другого. Эти параметры можно оценить, если полностью разморозить холодильник и потом включить. Положив внутрь градусник, мы знаем текущую температуру. Проводя опыты по измерению силы при открывании двери, можно уточнить зависимость натечек от разности давлений и температур внутри и снаружи холодильника.

Математика

1. (*2 балла*) При делении на натуральное число n существует n-1 ненулевых остатков: 1, 2, …, n-1. По принципу Дирихле n-й остаток при делении будет равен одному из них, а длина периода дроби m/n не больше, чем n-1.

2. (*4 балла*) Условие задачи поставлено некорректно – треугольник с площадью 669 невозможно вписать в окружность с радиусом, равным 2.

3. (*4 балла*) Сделаем замену переменных: $u = x - 3$, $v = y - 3$ (при этом число точек внутри фигуры не меняется), тогда:

$|v|+|u|+|u-1|+|u+1|=2007$

При $-669 \le u \le -1$: $|v|=2007+3u$

При $-1 \le u \le 0$: $|v|=2005+u$

При $0 \le u \le 1$: $|v|=2005-u$

При $1 \le u \le 669$: $|v|=2007-3u$

Эта фигура симметрична относительно осей абсцисс и ординат. В точке абсциссы u=–669 имеем одну целочисленную точку, при u=–668 – 7 точек, и т.д., то есть на отрезке $-669 \le u \le -1$ для числа точек имеем арифметическую прогрессию с начальным членом 1 и разностью 6. При $u=0$ имеем $2005*2+1=4011$ точек. Всего:

$$S=\frac{2a_1+k(N-1)}{2}*N*2+4011=2686701.$$

4. (*4 балла*) Преобразуем левую часть:

$$\text{Л.Ч.}=\left(\cos\alpha\right)^{2\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}\cdot\left(\cos\beta\right)^{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\left(\cos\gamma\right)^{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}=$$

$$=\left(\cos\alpha\right)^{\sin\gamma-\sin\alpha}\cdot\left(\cos\beta\right)^{\sin\alpha-\sin\beta}\cdot\left(\cos\gamma\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}.$$

При циклической перестановке углов α,β,γ Л.Ч. не меняется, следовательно можно положить $\gamma=\max\{\alpha,\beta,\gamma\}$.Рассмотрим два случая:

а) $\gamma\ge\beta\ge\alpha$, тогда $\sin\gamma\ge\sin\beta\ge\sin\alpha$ и $\cos\gamma\le\cos\beta\le\cos\alpha$ (так как углы острые), и поэтому: $\left(\cos\alpha\right)^{\sin\gamma-\sin\alpha}\ge\left(\cos\beta\right)^{\sin\gamma-\sin\alpha}$ и $\left(\cos\gamma\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}\ge\left(\cos\beta\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}$.

Тогда Л.Ч$\ge\left(\cos\beta\right)^{\sin\gamma-\sin\alpha}\cdot\left(\cos\beta\right)^{\sin\alpha-\sin\beta}\cdot\left(\cos\beta\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}=1$.

б) $\gamma\ge\alpha\ge\beta$, тогда $\left(\cos\gamma\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}\ge\left(\cos\alpha\right)^{\sin\beta-\sin\gamma}$, $\left(\cos\beta\right)^{\sin\alpha-\sin\beta}\ge\left(\cos\alpha\right)^{\sin\alpha-\sin\beta}$ и неравенство также выполняется, что и требовалось доказать.

5. (*4 балла*) Заменяя $\{a\}$ на $a-[a]$, получим: $2004x=[2005x]+[2006x]-[2007x]$. То есть $x=\frac{p}{2004}$, где p - некоторое целое число, тогда $\{2005x\}=\left\{\frac{2005}{2004}p\right\}=\left\{p+\frac{1}{2004}p\right\}=\{x\}$, аналогично $\{2006x\}=\{2x\}$, $\{2007x\}=\{3x\}$.

Уравнение принимает вид: $\{x\}+\{2x\}=\{3x\}$ или $[x]+[2x]=[3x]$.

Очевидно $x=1$ - корень, а при $x\in[0,1)$ $[x]=0$, следовательно $[2x]=[3x]$.

Имеют место три случая:

а) $[2x]=[3x]=0 \Leftrightarrow 3x<1,\ 3p<2004,\ p<668$.

б) $[2x]=[3x]=1 \Leftrightarrow \begin{cases}2x\ge1\\3x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\ge1002\\p<1336\end{cases}$.

в) $[2x]=[3x]=2 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3}{2}>x\ge1\\1>x\ge\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Таким образом решениям данного уравнения являются все x вида $x=\frac{p}{2004}$, где

$p\in\{0,1,...,667\}\cup\{1002,...,1335\}\cup\{2004\}$.

6. (*4 балла*) Уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\left(y+\sqrt{a^2+3a+1}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2=3a$$

В координатах $v=y+\sqrt{a^2+3a+1}$, $u=\dfrac{x-1}{x}$ это уравнение окружности с радиусом $\sqrt{3a}$. Единственность решения возможна только при $a=0$, при этом $x=1$, $y=-1$.

7. (*4 балла*) $\exists\left(0\le\alpha<N,\alpha\in\mathbb{R},P\in\mathbb{Z}\right)$: $x=P+\dfrac{\alpha}{N}$: тогда:

$$\sum_{n=0}^{N}\left[x+\frac{n}{N}\right]=[P]+\left[P+\frac{1}{N}\right]+\ldots+\left[P+\frac{\alpha+n}{N}\right]+\ldots+\left[P+\frac{N-1+\alpha}{N}\right]=\left\langle\exists n:[\alpha+n]=N\right\rangle=$$

$$=NP+N-1+[\alpha]-(N-1)=PN+[\alpha]=\left[N\left(P+\frac{\alpha}{N}\right)\right]=[Nx];\forall x\in\mathbb{R},N\in\mathbb{N}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left[e+\frac{n}{N}\right]+2007=[Ne]+[e+1]+2007$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left[\pi+\frac{n}{N}\right]=[N\pi]+[\pi+1].$$

Отсюда (*) $\Leftrightarrow[\pi N]-[eN]=2006$

$x_N=[\pi N]-[eN]\uparrow$ т.к. $x_{k+i}-x_k=\left[x_2(N+1)-[x_2N]-\left(\left[x_1(N+1)\right]-[x_1N]\right)\right]\ge$

$\left\langle\left[x_1(N+1)\right]\le x,[x_1N]\ge x_1-1\right\rangle$

$\ge(x_2-1)-x_1\ge 2{,}14-2{,}7>-0{,}6$

$$\begin{cases}x_{k+1}>x_k-0{,}6\\ x_k,x_{k+1}\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow\ x_{k+1}\ge x_k$$

Вначале найдем N приближенно как $N_{пр}(\pi-e)\approx 2006$.

Отсюда $N_{пр}=\left[\dfrac{2006}{\pi-e}\right]\approx\left[\dfrac{2006}{0{,}423310825}\right]=4738$.

Найдем некоторые x_N:

$x_{4737}=14881-12876=2005$

$x_{4738}=14884-12879=2005$

$x_{4739}=14888-12881=2007$

$x_{4740}=14891-12884=2007$

$\Rightarrow$ т.к. x_N возрастает, то решений нет.

Ответ: решений нет.

8. (*4 балла*) Запишем очевидные равенства:

$\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{A_1M}$, $\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{A_2M}$, …, $\overrightarrow{A_nO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{A_nM}$

Возведя в квадрат и почленно сложив все эти равенства, получим:

$A_1O^2+A_2O^2+\ldots+A_nO^2+nOM^2+2\overrightarrow{OM}\cdot\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+\ldots+\overrightarrow{A_nO}\right)=A_1M^2+A_2M^2+\ldots+A_nM^2$.

Сумма $\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+\ldots+\overrightarrow{A_nO}$ равна нулю, так как при повороте каждого из этих векторов на угол $\dfrac{2\pi}{n}$ вокруг точки O их сумма не изменится.

Тогда $A_1O^2+A_2O^2+\ldots+A_nO^2+nOM^2=A_1M^2+A_2M^2+\ldots+A_nM^2$ **(1)**

откуда $A_1M^2+A_2M^2+\ldots+A_nM^2=A_1O^2+A_2O^2+\ldots+A_nO^2+nOM^2\ge A_1O^2+A_2O^2+\ldots+A_nO^2$,

$A_1M^2+A_2M^2+\ldots+A_nM^2\ge A_1O^2+A_2O^2+\ldots+A_nO^2=nOA_1^2$.

По неравенству Коши – Буняковского:

$$\sqrt{\left(1^2+1^2+\ldots+1^2\right)\left(A_1M^4+A_2M^4+\ldots+A_nM^4\right)} \ge A_1M^2+A_2M^2+\ldots+A_nM^2 \ge nOA_1^{\,2},$$

$$n\left(A_1M^4+A_2M^4+\ldots+A_nM^4\right) \ge n^2OA_1^{\,4},$$

$$A_1M^4+A_2M^4+\ldots+A_nM^4 \ge nOA_1^{\,4}.$$

Замечание: равенство (1) следует из теоремы Гюйгенса – Штейнера для моментов инерции, если в точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ поместить единичные массы.

9. (*5 баллов*) Обозначим $a_i\left(x_0\right)=p_i$, тогда имеем

$$p_k < 2^k x < p_k+1$$

$$p_{k+1} < 2^{k+1} x < p_{k+1}+1$$

…………………….

$$p_{k+m} \le 2^{k+m} x < p_{k+m}+1$$

Причем $\forall i=k,\ldots,k+m-1 \to p_i < 2^i x$ (строгое неравенство), так как если $2^i x = p_i$, то $a_{i+1}=2p_i$ не является простым.

Рассмотрим два неравенства:

$$\begin{cases} p_k < 2^k x < p_k+1 \\ p_{k+1} < 2^{k+1}x < p_{k+1}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p_k < 2^{k+1}x < 2p_k+2 \\ p_{k+1} < 2^{k+1}x < p_{k+1}+1 \end{cases}$$

Очевидно, что тогда $\begin{cases} p_{k+1} > 2p_k \\ p_{k+1}+1 \le 2p_k+2 \end{cases}$, откуда $p_{k+1}=2p_k+1$.

Аналогично $p_{k+2}=2p_{k+1}+1,\ldots,p_{k+m}=2p_{k+m-1}+1=2^m p_k+2^{m-1}+2^{m-2}+\ldots+1=2^m p+2^m-1$.

10. (5 *баллов*) Пусть основания высот H_1, H_2 и H_3. Пусть радиус окружности описанной около треугольника ABC равен $2R$, тогда радиус окружности описанной около треугольника $H_1H_2H_3$ равен R (это следует из гомотетичности треугольников $H_1H_2H_3$ и $N_1N_2N_3$, где треугольник $N_1N_2N_3$ образован отрезками, которые соединяют точки пересечения высот остроугольного треугольника ABC с описанной около него окружностью. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC тогда справедливы равенства: $HH_1 = H_1N_1$, $HH_2 = H_2N_2$, $HH_3 = H_3N_3$ ($\angle H_1N_1B=\angle ACB=\angle BHN_1$, тогда BHN_1 - равнобедренный, а следовательно $HH_1 = H_1N_1$), следовательно треугольники $H_1H_2H_3$ и $N_1N_2N_3$ гомотетичны с коэффициентом гомотетии 2.). Величины углов ортоцентрического треугольника равны $\angle H_2H_1H_3$=180°-2A, $\angle H_1H_2H_3$=180°-2B, $\angle H_1H_3H_2$=180°-2C (действительно, например : $\angle H_2H_1H_3$=2$\angle AN_1N$=2(90°-A)=180°-2A). Но углы треугольника можем легко найти, так как он прямоугольный. $\angle H_2H_1H_3$=180°-2A, но угол H_1 прямой, следовательно, угол A = 45. Запишем формулы для площади треугольника $S=\frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin A=\frac{1}{2}AC\cdot CB\cdot\sin C$, тогда получим : $AB\sin A=BC\sin C$, $\sin A=45°$, $BC=2R\sin A$, $\sin C=\sin\frac{180°-\angle H_1H_2H_3}{2}$. Подставим:

$$AB=2R\sin\frac{180°-\angle H_1H_3H_2}{2}=2R\cos\frac{\angle H_1H_3H_2}{2}=2R\sqrt{\frac{\cos\angle H_1H_3H_2+1}{2}}=\sqrt{468}$$

(у меня $\cos\angle H_1H_3H_2=\frac{5}{13}$).

Найдем $\sin B$: $\sin B=\sin\frac{180°-\angle H_1H_2H_3}{2}=\cos\frac{\angle H_1H_2H_3}{2}=\sqrt{\frac{\cos\angle H_1H_2H_3+1}{2}}=\sqrt{\frac{25}{26}}$

Тогда площадь треугольника равна:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\frac{1}{2}\sqrt{468}\cdot2\cdot13\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{25}{26}}=6\cdot\sqrt{13}\cdot13\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{5}{\sqrt{26}}=195$$

Ответ: площадь равна 195 ед.кв.