Решение задач Заочной Физико-математической Олимпиады ФМБФ 2002 года

ФИЗИКА

1. (3) У ерша, вдвинутого снизу в вертикальную трубку, щетинки изогнуты. При наклоне трубки давление щетинок на стенку трубки с одной стороны ослабевает и при некотором наклоне щетинка начинает скользить вверх по трубке до тех пор, пока из-за изменения кривизны щетинки давления на стенку, а следовательно и сила трения скольжения не возрастают настолько, что щетинка остановится. При выпрямлении трубки обратного скольжения не произойдет, так как сила трения покоя больше силы трения скольжения.

2. (5) Найдем угол, определяющий положение равновесия шайбы:

$$mg\sin\varphi_0 = \mu mg\cos\varphi_0 \quad\Rightarrow\quad \varphi_0 = \mathrm{arctg}\mu$$

Возвращающая сила, возникающая при смещении шайбы на малый угол $\Delta\varphi$:

$$F = mg\sin(\varphi_0+\Delta\varphi) - \mu mg\cos(\varphi_0+\Delta\varphi) \approx mg(\cos\varphi_0 + \mu\sin\varphi_0)\Delta\varphi = mg(\cos\varphi_0 + \mu\sin\varphi_0)\Delta x/R$$

Колебания будут гармоническими с частотой: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}(\cos\varphi_0 + \mu\sin\varphi_0)}$

Но $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\mu$, откуда: $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}\sqrt{1+\mu^2}}$

И окончательно: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g\sqrt{1+\mu^2}}}$

3. (4) Пусть q – объем жидкости, испаряющийся с единицы поверхности за единицу времени:

$$q = \frac{dV}{\Delta S dt} = \frac{\Delta S dh}{\Delta S dt} = \frac{dh}{dt},$$

где dh – изменение высоты жидкости в сосуде, t – время, ΔS – площадь поверхности, с которой происходит испарение жидкости. Итак, скорость изменения высоты жидкости в сосуде постоянна и равна q. Откуда искомое время: $t = R/q$

4. (7) Введем некоторую систему координат с началом в точке расположения звезды. Пусть $\vec r_1$ и $\vec r_2$ ($|\vec r_1| > |\vec r_2|$) – радиус-векторы планет 1 и 2 соответственно, $\vec v_1$ и $\vec v_2$ – векторы скоростей планет 1 и 2 соответственно, $\vec x$ – искомое расстояние между планетами, $\vec v_{отн}$ – скорость планеты 1 относительно планеты 2.

$$\vec x = \vec r_1 - \vec r_2 \qquad (1)$$

$$|\vec x| = \sqrt{\vec x\cdot\vec x} = \sqrt{\vec r_1^{\,2} + \vec r_2^{\,2} - 2(\vec r_1, \vec v_2)} \qquad (2)$$

$$\vec v_{отн} = \vec v_1 - \vec v_2 \qquad (3)$$

$$\vec x = \lambda\cdot\vec v_{отн},\ \lambda = const \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \vec r_1 - \vec r_2 = \lambda\cdot(\vec v_1 - \vec v_2) \qquad (5)$$

$$|\vec v_1| = \sqrt{\frac{gM}{r_1}},\ |\vec v_2| = \sqrt{\frac{gM}{r_2}} \qquad (6)$$

где g – гравитационная постоянная, M – масса звезды.

Скалярно умножая (5) на $\vec r_1$ и на $\vec r_2$, и используя тот факт, что $(\vec r_1, \vec v_1) = (\vec r_2, \vec v_2) = 0$ (каждая планета движется по окружности), получаем:

$$(\vec r_1, \vec r_2) - r_2^2 = \lambda(\vec v_1, \vec r_2) \qquad (7)$$

$$(\vec r_1, \vec r_2) - r_1^2 = \lambda(\vec v_2, \vec r_1) \qquad (8)$$

Из (2), (7), (8) получаем:

$$|\vec x| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\frac{r_2^2 - r_1^2\dfrac{(\vec v_1, \vec r_2)}{(\vec v_2, \vec r_1)}}{1 - \dfrac{(\vec v_1, \vec r_2)}{(\vec v_2, \vec r_1)}}}$$

Рассмотрим два случая. Если планеты движутся в одном направлении, то $\frac{(\vec{v}_1,\vec{r}_2)}{(\vec{v}_2,\vec{r}_1)}=-\frac{|\vec{v}_1||\vec{r}_2|}{|\vec{v}_2||\vec{r}_1|}$ и

$$|\vec{x}|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\frac{r_1v_1+r_2v_2}{r_1v_2+r_2v_1}}$$

Используя (6), получаем: $|\vec{x}|=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\frac{r_1\sqrt{r_2}+r_2\sqrt{r_1}}{r_1\sqrt{r_1}+r_2\sqrt{r_2}}}$ (9)

Если планеты движутся в разном направлении, то $\frac{(\vec{v}_1,\vec{r}_2)}{(\vec{v}_2,\vec{r}_1)}=\frac{|\vec{v}_1||\vec{r}_2|}{|\vec{v}_2||\vec{r}_1|}$ и

$$|\vec{x}|=\sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\frac{r_1\sqrt{r_2}-r_2\sqrt{r_1}}{r_1\sqrt{r_1}-r_2\sqrt{r_2}}} \qquad (10)$$

5. (5) Пусть T_0 – установившаяся температура станции без оболочки, T_1 – температура станции с оболочкой, T_2 – температура оболочки, w – мощность, вырабатываемая оборудованием станции, которая идет на ее нагрев.
Тогда по закону сохранения энергии:

$$\alpha T_0^4 = w$$
$$\alpha T_1^4 = w + \alpha T_2^4$$
$$\alpha T_1^4 = 2\alpha T_2^4$$

Решая эту систему легко находим, что $T_1=T_0\sqrt[4]{2}\approx 600K$.

6. (5) Результирующая сила электростатического взаимодействия, действующая на шарик равна

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{l^2}\cos\alpha \qquad (1)$$

Условия равновесия шарика: $T\sin\alpha - mg = 0$, $T\cos\alpha - F = 0$
Откуда: $F=mg/tg\alpha$ (2)

Из выражений (1) и (2) получаем: $l=\sqrt[3]{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QqR}{mg}}$

7. (5) Плотность поверхностного заряда определяется из значения напряженности электричес-кого поля вблизи заряженной поверхности: $E = \sigma/2\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2E\varepsilon_0$
Значение электромагнитной индукции **B** определяется из теоремы о циркуляции вектора B:
$2Bl = \mu_0 I$, где $2l$ – длина контура, который охватывает пленку, и вдоль которого находится циркуляция B; I – ток, охватываемый этим контуром. I находится по определению, как dq/dt:

$$I = dq/dt = (\sigma lvdt)/dt = \sigma lv,$$

Откуда: $B = \mu_0 v\sigma/2$
Численные значения: σ= 3,54*10^{-5} Кл/м^2; B = 3.3*10^{-10} Тл.

8. (5) Так как $d<<R$, то емкость такого конденсатора равна: $C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi RH}{d}$

При наличии диэлектрика в конденсаторе, не полностью его заполняющего, конденсатор можно представить в виде двух конденсаторов, емкостями $C_1=\frac{\varepsilon_0 2\pi Rh}{d}$ и $C_2=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi R(H-h)}{d}$, которые соединены параллельно.

Из равенства потенциалов каждого из конденсаторов следует: $\sigma_1 = \sigma_2 \cdot \varepsilon$
Из постоянства суммарного заряда: $2\pi Rh\sigma_1 + 2\pi R(H-h)\sigma_2 = Q$

Искомая суммарная энергия конденсатора равна: $W=\frac{q_1}{2C_1}+\frac{q_2}{2C_2}=\frac{(\sigma_1 S_1)^2}{2\varepsilon_0 S_1}d+\frac{(\sigma_2 S_2)^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S_2}d$

Откуда: $W=\frac{Q^2 d}{4\pi R\varepsilon_0[\varepsilon vt+(H-vt)]}$

9. (7) Найдем сначала распределение газа вблизи оси сосуда. Рассмотрим элемент объёма газа $r\Delta S$ (рис. 1). Центростремительное ускорение этого элемента $a = \omega^2 r$ обеспечивается разностью соответствующих давлений: $\left[p(r+\Delta r) - p(r)\right]\Delta S = \rho \Delta r \Delta S \omega^2 r$

Поэтому для изменения давления получим уравнение $dp/dr = \rho\omega^2 r$

Так как для идеального газа выполняется соотношение $\mu p = \rho RT$ (R – универсальная газовая постоянная), то $\frac{dp}{dr} = \frac{\mu p}{RT}\omega^2 r$

Согласно условию задачи, при $r \le r_n$ $p(r) - p_0 << p_0$;

Следовательно, $p(r) \approx p_0\left(1 + \frac{\mu\omega^2}{2RT}r^2\right)$

Соответственно для плотности газа при $r \le r_n$ получим $\rho(r) \approx \rho_0\left(1 + \frac{\mu\omega^2}{2RT}r^2\right)$, $\rho_0 = p_0\frac{\mu}{RT}$,

а для показателя преломления имеем $n(r) = n_0 + kr^2$, $n_0 = 1 + \alpha\rho_0$, $k = \frac{\alpha p_0}{2}\left(\frac{\mu\omega}{RT}\right)^2$.

Найдем теперь угол преломления луча, проходящего через сосуд на расстоянии r от оси. Оптический путь, пройденный им в сосуде, равен $n(r)l$.

Оптическая разность хода $\delta_{\text{опт}}$ двух близких лучей после прохождения сосуда должна равняться геометрической разности хода δ, вызванной отклонением лучей от первоначального направления распространения. В этом случае интерференция лучей приведет к их усилению (принцип Гюйгенса). Из рис. 2 следует, что $\delta_{\text{опт}} = \left[n(r+\Delta r) - n(r)\right]\cdot l$, $\delta = r\sin\varphi$.

Отсюда $\sin\varphi = \frac{\delta}{r} = \frac{\left[n(r+\Delta r) - n(r)\right]\cdot l}{r} = 2klr$

Здесь можно сделать следующий вывод. Если рассматривать узкий пучок света такой, что угол отклонения φ будет мал, то $\varphi \sim r$, т.е. вращающийся сосуд будет работать как рассеивающаяся линза с фокусным расстоянием $F = (2klr)^{-1}$.

Итак, для максимального угла отклонения получим $\sin\varphi_{\max} = 2klr_n$.

Поэтому искомый радиус пятна на экране равен $R = r_n + L\,\mathrm{tg}\,\varphi_{\max}$.

В приближении рассеивающей линза получим

$$R \approx r_n + L\varphi_{\max} \approx r_n + 2klr_nL = r_n\left[1 + \alpha\rho_0 lL(\mu\omega/RT)^2\right]$$

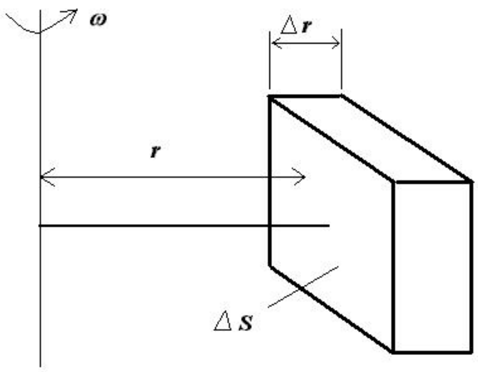

рис. 1

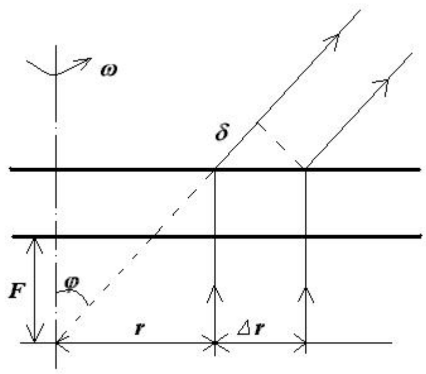

рис. 2

10. (4) Когда карандаш входит в воду, поверхность воды около карандаша образует рассеивающую линзу – лучи от источника света отклоняются от оси карандаша. Поэтому под карандашом образуется большое темное пятно.

Когда карандаш вытаскивают из воды, поверхность воды около карандаша образует собирающую линзу – лучи от источника света отклоняются от карандаша. Поэтому под карандашом образуется светлое пятно.

МАТЕМАТИКА

1. (4) Всегда есть решение $x = n-1$, $y = n(n-1)$. При $n = km$ есть также решение $x = k(m-1)$, $y = km(m-1)$. При простом n $y = sn$ ($x < n$, поэтому x не делится на n). Перенося член с y в правую часть и приводя к общему знаменателю, получаем, что $s+1 = n$.

2. (3) Вопрос сводится к единственности решения уравнения $28x+37y = N$ в натуральных числах. Если (x, y) - решение, то ``ближайшими" к нему решениями в целых числах будут $(x-37, y+28)$ и $(x+37, y-28)$. Поэтому $x < 38$ и $y < 29$. Значит, наибольшее $N = 28*37+37*28 = 2072$.

3. (5) Если угол при вершине не меньше 60^o, то уже удвоенное расстояние p до боковой стороны не меньше радиуса r. Если же угол при вершине меньше 60^o, то p – длина катета треугольника с гипотенузой r, а разность между радиусом и расстоянием до основания треугольника равна длине катета в треугольнике, гипотенуза которого - хорда, на которую опирается половина угла при вершине. Она меньше p.

4. (7) Сдвинем эти отрезки на $0{,}2$ вправо. Полученные отрезки не пересекаются с исходными, а длины их не изменятся. Все отрезки расположены на $[0;1{,}2]$, поэтому их общая длина не больше $1{,}2$. Следовательно, длина отрезков не превосходит $0{,}6$. Кроме того, промежуток $[0{,}8;1]$ не может содержаться целиком в одном из отрезков, иначе приходим к противоречию в условии. Поэтому на нем существует хотя бы один отрезок длины l, разделяющий два отрезка исходного множества. Но тогда при сдвиге на $0{,}2$ он не будет ничем накрыт, из-за чего удвоенная сумма длин отрезков будет не больше $1{,}2-l$, что и дает требуемую оценку.

5. (5) Выиграет первый. Он может после своего хода оставлять нечетное число. Тогда второй игрок обязан к нему прибавлять также нечетное, и в результате после его хода всегда будет получаться четное число, т.е. он не сможет закончить на 2001.

6. (3) Среди пяти вершин правильного пятиугольника, вписанного в окружность три обязательно окрашены в один цвет. Они и образуют равнобедренный треугольник.

7. (8) Пусть ученик ***A*** занимается в первом кружке. Если есть ученик, не посещающий этот кружок (иначе все очевидно), то он вместе с ***A*** занимается во втором (причем одном и том же для всех учеников, не посещающих первый). Аналогично, любой ученик, не посещающий второй кружок занимается в первом. Если один из этих кружков содержит всех членов другого, то туда ходят все. В противном случае есть ученик ***B***, посещающий первый и не посещающий второй кружок, и ученик ***C***, у которого все наоборот. ***B*** и ***C*** должны ходить в третий кружок. Легко видеть, что этот третий кружок один и тот же для любой такой пары. Итак, есть три кружка, которые дважды покрывают весь состав класса.

8. (7) Любая сторона квадрата не может полностью лежать вне треугольника, так как она касается окружности. Значит, одна из вершин квадрата, а вместе с ней и четверть периметра квадрата лежит внутри треугольника. Если вершина квадрата лежит снаружи треугольника, то сумма отрезков касательных, проведенных из этой вершины, лежащих внутри треугольника, равна гипотенузе треугольника, катетами которого служат отрезки этих же касательных, лежащие вне треугольника. Поэтому внутри треугольника лежит не менее трети от оставшихся трех четвертей периметра.

9. (5) При модуле *x*, большем или равном 1, правая часть обоих исходных уравнений положительна. Следовательно, $2x^2+2Ax+2B > 0$ и $x^2+Cx+D > 0$. Осталось сложить эти неравенства и разделить на 3.

10. (3) Если точка ***D*** лежит внутри треугольника ***ABC***, то 6 углов в вершинах треугольника ***ABC*** в сумме дают 180°. Если ***ABCD*** - выпуклый четырехугольник, то один из его углов не больше 90°. Диагональ разбивает этот угол на два, один из которых не больше 45°.