Решение задач

Заочной физико-математической олимпиады ФМБФ МФТИ 2001 года

Физика

1. При нагревании воды образуется горячий водяной пар, который установившимся потоком быстро подымается вверх, подталкиваемый новыми нагретыми слоями пара и воздуха. При выключении чайника этот поток нарушается, вследствие чего пар замедляет свое движение вверх и соприкасается с холодным воздухом. При этом происходит конденсация воды с образованием облака из тумана.

2. Поскольку в действительности направление вращения Земли вокруг собственной оси совпадает с направлением вращения вокруг Солнца, к числу оборотов некоторой точки на поверхности Земли вокруг оси планеты добавляется еще один – вокруг Солнца. При обратном вращении Земли соответственно один оборот вычитается. Следовательно, количество суток *уменьшится* на 2.

3. Задача поставлена некорректно: ненулевого минимального угла, при котором шарик покатится по плоскости, не существует. Докажем это. Направим ось x по наклонной плоскости, а ось y – вдоль нормали. Изменение со временем компоненты скорости вдоль оси y:

   $$v_y(t) = v_0 \cos\beta - gt\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad v_{y0} = v_y(0) = v_0\cos\beta$$

   Изменение координаты вдоль оси *y*: $y(t) = v_0 t\cos\beta - \dfrac{gt^2\cos\alpha}{2}$

   Когда шарик соударяется с плоскостью, $y(t^*) = 0 \Rightarrow t^* = \dfrac{2v_0\cos\beta}{g\cos\alpha}$

   В этот момент компонента скорости вдоль оси *y* равна: $v_y^* = v_0\cos\beta - g\cos\alpha\dfrac{2v_0\cos\beta}{g\cos\alpha} = -v_0\cos\beta$

   После отражения знак скорости меняется на противоположный: $v_y^{**} = -v_y^* = v_0\cos\beta = v_{y0}$, то есть максимальная высота поднятия шарика по оси *y* ***не меняется***, в то время как необходимым условием качения является $v_y = 0$.

4. Пусть I_0 и I_0' – моменты инерции относительно оси через точку *O* для ΔABC и относительно оси через точку *O'* для ΔAOB соответственно. Тогда:

   $$I_0 = 2\left(\left(I_0' - (O'M')^2\cdot m/2\right) + (OM')\cdot m/2\right) \Rightarrow I_0 = 2I_0' + mL^2/12$$

   Поскольку I_0 и I_0' – моменты инерции подобных треугольников, они связаны соотношением:

   $\dfrac{I_0'}{I_0} = \dfrac{(m/2)\cdot\left(L/\sqrt{2}\right)^2}{mL^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow I_0 = 2\cdot\dfrac{I_0}{4} + \dfrac{mL^2}{12} \Rightarrow I_0 = \dfrac{mL^2}{6}$. По теореме Штейнера: $I = I_0 - m\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{L}{\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{mL^2}{9}$

5. Если в феврале 29 дней и 1 февраля – пятница, то максимальное количество дней по календарю – 5. Однако соль задачи заключается в существовании перемещения линии дат. Если человек пересечет ее ровно в 24.00 в четверг с востока на запад , то для него после четверга наступит суббота. Если же сделать то же самое в пятницу в 24.00 с запада на восток, то для человека будет подряд две пятницы. Таким образом, максимальное количество пятниц (и максимальное выпитое количество бокалов шампанского) – 10, минимальное – 0.

6. А) Пусть *S* – площадь стакана, *n* – концентрация молекул в насыщенном паре, *v* – их тепловая скорость. Тогда число молекул, пролетающих через поверхность жидкости за время *t*: $z=nSvt/4$

   Так как $n = \dfrac{p_н}{kT}$ и $v = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$, μ – молекулярная масса воды, то $z = \dfrac{1}{4}\dfrac{p_н}{k}\sqrt{\dfrac{3R}{T\mu}}St$

   Количество молей воды, испаряющихся за время t: $\nu = \dfrac{z}{N_A} = \dfrac{1}{4}\dfrac{p_н}{N_A k}\sqrt{\dfrac{3R}{T\mu}}St = \dfrac{p_н}{4}\sqrt{\dfrac{3}{RT\mu}}St$

   Масса воды, испаряющаяся с единицы площади поверхности в единицу времени:

   $$m = \frac{\nu\mu}{St} = \frac{1}{4}p_н\sqrt{\frac{3\mu}{RT}} = 2{,}6 \text{ кг/м}^2\text{с}$$

   Б) При испарении массы воды отбирается теплота, при этом оставшаяся вода охлаждается и замерзает. Пусть *M* – исходная масса воды, *m* – масса испарившейся воды, *r* – удельная теплота парообразования, *c* – удельная теплоемкость воды, λ – удельная теплота плавления льда, Θ=20°C – исходная температура. Тогда:

   $$rm = c(M-m)\Theta + \lambda(M-m)$$

$$\frac{m}{M}=\frac{c\Theta+\lambda}{r+c\Theta+\lambda}=0{,}14$$

7. Электрическая сила, действующая на верхний заряд, должна быть не меньше силы тяжести: $\frac{qQ}{d^2}\geq mg$, где Q – искомый заряд. => $Q\geq\frac{mgd^2}{q}$

Проверим, будет ли это равновесие устойчиво. Для этого необходимо, чтобы при отклонении шарика на малый угол α (относительно нижней точки сферы) проекция силы электрического взаимодействия зарядов на касательную к сфере была больше или равна проекции силы тяжести на ту же касательную: $\frac{qQ}{d^2}\sin\alpha\geq mg\sin 2\alpha$

Поскольку угол α мал, $\sin\alpha\approx\alpha$, $\sin 2\alpha\approx 2\alpha$ => $\frac{qQ}{d^2}\alpha\geq 2mg\alpha$ => $Q\geq 2\frac{mgd^2}{q}$

8. При слиянии пузырей суммарная масса в них не меняется: $m_3=m_1+m_2$

По уравнению состояния: $m=\frac{pV\mu}{RT}$, где $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ – объем пузыря, μ – молярная масса воздуха, T – температура воздуха.

Условие равновесия пузыря: $p=p_0+\frac{2\sigma}{r}$, где p_0 – атмосферное давление.

$$\left(p_0+\frac{2\sigma}{r_3}\right)\frac{4}{3}\pi r_3^3\frac{\mu}{RT}=\left(p_0+\frac{2\sigma}{r_1}\right)\frac{4}{3}\pi r_1^3\frac{\mu}{RT}+\left(p_0+\frac{2\sigma}{r_2}\right)\frac{4}{3}\pi r_2^3\frac{\mu}{RT}$$

Отсюда $p_0=\frac{2\sigma\left(r_3^2-r_1^2-r_2^2\right)}{r_1^3+r_2^3+r_3^3}$

9. Под действием сила тяжести электроны перераспределяются внутри куба, стремясь опуститься на нижнюю грань, образуя электрическое поле, сила которого равна силе гравитационного поля. Следовательно, позитрону приходится двигаться против гравитационного и электрического полей (на нижней грани куба – избыток отрицательных зарядов, на верхней – положительных). Поэтому работа равна $A=2m_egh\approx 1{,}8\cdot 10^{-29}$ кг.

10. При решении задачи приймем, что освещенность в пятне зайчика равномерна, отсутствует поглощение и рассеяние потока света, Солнце стоит в зените, а плоскость зеркала составляет 45° с направлением на Солнце. Пусть α – угловой диаметр Солнца. Заменив ход лучей от Солнца ходом лучей от его изображения, заметим, что в середине зайчика в каждую точку приходят лучи только от тех точек Солнца, которые видны из этой точки в угле β, в котором лежит диаметр зеркала, то есть в телесном угле Ω_1~β^2. При освещенности прямыми лучами в каждую точку приходят лучи, идущие в угле α, то есть в телесном угле Ω~α^2.

Отсюда $\frac{E}{E_0}=\frac{\Omega_1}{\Omega}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, где E_0 – освещенность прямыми солнечными лучами.

$\beta\approx 2\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{d\cos 45^0}{L}$ (угол β мал) => $E=E_0\frac{d^2}{2\alpha^2L^2}$ – освещенность пятна зайчика от одного зеркала. По принципу суперпозиции, освещенность от n зеркал будет в n раз больше.

Найдем освещенность, необходимую для возгорания дерева. Диаметр Солнца в фокусной плоскости линзы $2F\mathrm{tg}(\alpha/2)\approx F\alpha$. Световой поток, собираемый линзой: $\Phi=E_0\pi D^2/4$. Учитывая сохранение потока и неравенство $D/F\geq 0{,}07$, получаем:

$$E_1=E_0\frac{\pi D^2/4}{\pi(F\alpha)^2/4}=E_0\frac{D^2}{F^2\alpha^2}\geq 4{,}9\cdot 10^{-3}\frac{E_0}{\alpha^2}$$

Чтобы поджечь корабль, необходимо:

$$nE_0\frac{d^2}{2\alpha^2L^2}\geq 4{,}9\cdot 10^{-3}\frac{E_0}{\alpha^2} \Rightarrow n\geq 4{,}9\cdot 10^{-3}\frac{2L^2}{d^2}\approx 392 \text{ человека.}$$

В реальности же было необходимо примерно 100 человек – сказываются неоднородность распределения освещенности по пятну, возможность постепенного разогрева древесины, ее плохая теплопроводность и другие факторы. Пусть живут Сиракузы! ☺

Математика

1. Пусть объем камеры равен 1, производительность одного насоса – v (1/час), n – число насосов, u – промежутки между включениями. Понятно, что nv=1/9 (насосы работали 9 часов). Последний насос проработал 4 часа, предпоследний – (4+u) часа, …, первый – (4+(n-1)u) часов. Всего:

$$[4+(4+u)+\ldots+(4+(n-1)u)]v=1$$

Арифметическая прогрессия: $\frac{1}{2}[4+(4+(n-1)u)]nv=1$

Учитывая nv=1/9, получаем Т=4+(n-1)u=14 часов.

2. Пусть A, B, C, D – заданные точки. Проведем через точку B прямую, перпендикулярную отрезку AC, и отложим на ней отрезок BL=AC, чтобы он пересекал AC. Пусть d – прямая, проходящая через точки D и L. Через точку B проведем прямую $b//d$, а через точки A и C – прямые a и c, перпендикулярные прямой d. Прямые a, b, c, d пересекаются и образуют искомый квадрат, поскольку прямые a и c отстоят друг от друга на такое же расстояние, что и прямые b и d. Это следует из того, что угол между a и AC равен углу между b и BL, а отрезки AC и BL равны по построению. В общем случае задача допускает 6 решений.

3. Пусть $f(x)$ – левая часть уравнения, $f(a)$ – правая часть. Нетрудно видеть, что рациональная функция $f(x)$ инвариантна (не меняет вид) относительно группы подстановок:

$$x=\xi,\quad x=1/\xi,\quad x=1-\xi,\quad x=1/(1-\xi),\quad x=(\xi-1)/\xi,\quad x=\xi/(\xi-1)$$

Так как $x=a$ является решением, то решениями будут и $x=1/a$, $x=1-a$, $x=1/(1-a)$, $x=(a-1)/a$, $x=a/(a-1)$, $a\neq0$, $a\neq1$, то есть уравнение имеет 6 корней.

4. Докажем методом математической индукции, что $k_n \geq n+1$. Для n=0 неравенство очевидно. Пусть для $0\leq m<n$ справедливо $k_n \geq m+1$. Тогда

$$k_n=1+\min\{2k_{[n/2]};3k_{[n/3]};5k_{[n/5]}\}\geq 1+\min\left\{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right);3\left(\left[\frac{n}{3}\right]+1\right);5\left(\left[\frac{n}{5}\right]+1\right)\right\}\geq 1+n$$

Тогда выполняется $k_n>n$.

5. Если a, b, c – стороны ΔABC, то $l_a^2\geq bc-a^2/4$ и $4m_a^2=2c^2+2b^2-a^2$. Применяя неравенство $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$ (оно получается из уравнений основного неравенства треугольника) , получаем:

$$\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{l_a^2+l_b^2+l_c^2}\leq\frac{\left(\frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{a^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)+\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}\right)}{\left(bc-\frac{a^2}{4}\right)+\left(ac-\frac{b^2}{4}\right)+\left(ab-\frac{c^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}{(bc+ac+ab)-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)}<\frac{\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)}=3$$

Учитывая, что длина медианы треугольника меньше биссектрисы, получаем левое неравенство.

6. А) Индукцией легко доказываются следующие утверждения:

1) Старший коэффициент многочлена $P_n(x)$ положителен.

2) Докажем по индукции, что корни $P_{n-1}(x)$ лежат строго между корней $P_n(x)$. Для $P_1(x)$ и $P_2(x)$ утверждение очевидно. Допустим, что оно справедливо для $P_{n-1}(x)$ и $P_n(x)$. Пусть x_i – корни многочлена $P_n(x)$, x_1 и $x_2<x_1$ – максимальные числа. Поскольку $P_n(x_1)=0$ и $P_n(x_2)=0$, то $P_{n+1}(x_1)=-P_{n-1}(x_1)$, $P_{n+1}(x_2)=-P_{n-1}(x_2)$. Так как по предположению индукции многочлен $P_{n-1}(x)$ имеет на интервале $(x_2;x_1)$ один корень, то знаки его значений на концах интервала разные. Следовательно, разные знаки имеет и многочлен $P_{n+1}(x)$, то есть многочлен $P_{n+1}(x)$ имеет на интервале $(x_2;x_1)$ один корень.

3) Многочлен $P_n(x)$ является многочленом n-ой степени и имеет n действительных корней.

Б) Докажем, что все корни многочлена $P_n(x)$ лежат в интервале (-2;2). Воспользуемся методом от противного. Пусть для многочлена $P_n(x)$ максимальный корень $x_0<2$, а для многочлена $P_{n+1}(x)$ максимальный корень $y_0\geq2$, то следующий корень $y_1<2$ (согласно пункту 1). Поскольку при $y>y0$ $P_{n+1}(y)>0$, то $P_{n+1}(2)<0$. В то же время $P_{n+1}(2)=2P_n(2)-P_{n-1}(2)$ => $P_{n+1}(2)+P_{n-1}(2)=2P_n(2)$ – арифметическая прогрессия, где $P_0(2)=1$, $P_1(2)=2$, $P_2(2)=3$, и так далее, то есть $P_n(2)>0$ – противоречие.

7. Покажем, что геометрическим местом точек, отношение расстояний от которых до заданных двух точек равно m, 0<m<1, является окружность. Пусть (0;0) и (a;0) – заданные точки (иначе можно сделать замену системы координат, чтобы получить данные координаты). Тогда: $x^2 + y^2 = m^2\left((x-a)^2 + y^2\right)$

$$\left(x + \frac{am^2}{1-m^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{am}{1-m^2}\right)^2$$

Получили уравнение окружности, причем ее центр лежит на прямой, проходящей через заданные точки, ближе к точке с меньшим расстоянием. Для построения окружности достаточно найти 2 точки, лежащие на данной прямой – это будет диаметр окружности.

Ход решения следующий: для каждой пары точек $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{B,C\}$строим окружности для отношений длин 1/2, 1/3, 2/3 соответственно. Пересечение этих окружностей и даст искомую точку.

8. Понятно, что уравнение имеет как минимум один корень $f(x)$=1. Пусть $\underbrace{f(f(f(...}_{2000}(x_1)))...) = \lambda$ (нас интересуют функции, имеющие смысл на всей действительной оси аргументов). Тогда $f(\lambda) = \underbrace{f(f(f(...}_{2001}(x)))...) = 1$ и $x=\lambda$ – корень. Предположим, что $x=\lambda$ – единственный корень, тогда равенство $\underbrace{f(f(f(...}_{2000}(x)))...) = \lambda$ должно выполняться для всех x. (Если при x_i это равенство не выполняется, то есть $\underbrace{f(f(f(...}_{2000}(x_i)))...) = \mu$, $\lambda\neq\mu$, то $f(\mu)$=1, то есть $x=\mu$ – второй корень, что противоречит предположению о единственности.)

Тогда рассмотрим $f(x)$=1 => $\underbrace{f(f(f(...}_{2001}(x)))...) = 1$ => $\underbrace{f(f(f(...}_{2000}(1)))...) = \lambda$, то есть $\lambda = 1$. Получаем, что $\underbrace{f(f(f(...}_{2000}(x)))...) = 1$ для всех x. Продела такую операцию 1999 раз, получим, что $f(x)$=1 для всех x, но по предположению $f(x)$=1 имеет один корень $x=\lambda$ => наше предположение неверно, значит, корней хотя бы два.

Пример: $f(x) = \begin{cases} 1, x=1, x=2 \\ 2, x\neq 1, x\neq 2 \end{cases}$

9. Можно доказать следующие положения:

А) Количество областей равно количеству точек пересечения границ областей плюс 1 (доказывается методом математической индукции) – следовательно, достаточно подсчитать максимальное количество точек пересечения.

Б) Граница выпуклой области имеет не более 2 точек пересечения с прямой (область является выпуклой, если касательная к границе, проведенная через любую точку границы, не содержит внутренних точек области) – каждую сторону многоугольника любая выпуклая фигура пересекает максимум 2 раза.

Отсюда следует: 1) каждый k-угольник пересекает окружность максимум $2k$ раз 2) При пересечении k-угольника и m-угольника (m>k) максимальное количество точек пересечения равно $2k$.

Общее количество точек пересечения (n=2001):

$$\sum_{k=3}^{n}\left(2k + 2k(n-k)\right) = 2(n+1)\sum_{k=3}^{n}k - 2\sum_{k=3}^{n}k^2 = 2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k - 6(n+1) - 2\sum_{k=1}^{n}k^2 + 10 =$$

$$= 2(n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6n + 4 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 6n + 4$$

Количество областей: $X = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - 6n + 5 = 2674662001$

10. Случаи, когда a=0 или n=0, малоинтересны.

Рассмотрим функцию $f(n) = \sqrt[n]{\frac{a^n + d^n}{2}} - \sqrt[n]{\frac{b^n + c^n}{2}}$ при n>0 и $f(0)=ad\text{-}bc$. Тогда $f(n)$ непрерывна на [0;+∞), поскольку предел $\lim_{n\to 0}\left(\frac{a^n + d^n}{2}\right)^{1/n} = ad$. Поскольку $f(0)$<0, а для достаточно больших значений n функция $f(n)$>0, существует n_0 такое, что $f(n_0)$=0. В этой точке выполняется равенство.